TD : Numération – Arithmétique

base et numération

Exercice 1 base inconnue

On dispose des symboles *a e i o u (ordre croissant)* pour écrire tous les entiers. Ecrire les 20 premiers entiers naturels.

Exercice 2 base 5

1. Un nombre est écrit $\overline{1111}^5$ en base 5. Quelle est la valeur de chacun des 1 utilisés? Quel est ce nombre en base 10?

2. Quel nombre précède $\overline{1200}^5$ et succède à $\overline{4124}^5$.

3. Déterminer l'écriture en base 5 de 442.

4. Effectuer les calculs suivants sans utiliser la base 10. Vérifier vos résultats après être passé en base 10.

a. $\overline{323}^5+\overline{122}^5$ **b.** $\overline{323}^5-\overline{124}^5$ **c.** $\overline{323}^5\times \overline{3}^5$

Exercice 3

Dans quelles bases a-t-on $32 \times 14 = 438$? $27 \times 35 = 708$?

Exercice 4 Sujet IUFM

La numération sexagésimale (base 60) exigerait l'utilisation de soixante chiffres distincts! En pratique on décide d'écrire chacun de ces chiffres en utilisant le codage en base 10 du nombre qu'il représente et en l'écrivant entre parenthèses. Par exemple (2)(19)(51) est l'écriture sexagésimale du nombre qui s'écrit 8391 en base 10 : $8391 = 2 \times 3600 + 19 \times 60 + 51$.

1. Ecrire en base dix le nombre dont l'écriture sexagésimale est (3)(0)(17)(48).

2. Trouver l'écriture sexagésimale du nombre qui s'écrit 54 325 432 en base 10.

3. Soit N un entier naturel dont l'écriture sexagésimale est ($\overline{ab}$)($\overline{ba}$), a et b étant deux chiffres de notre système de numération en base 10.

a. Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que l'écriture ($\overline{ab}$)($\overline{ba}$) soit correcte?

b. On suppose désormais que N est un multiple de 5. Qu'en déduisez vous?

c. Si de plus, on sait que N=$\overline{b21a}$ en base 10, déterminer les valeurs de a et b et par suite N.

Exercice 5 Sujet IUFM

On convient que $\overline{abc}^6$ est l'écriture d'un nombre en base 6. Par exemple, le nombre entier 103 s'écrit $\overline{251}^6$.

1. Quel nombre entier est représenté par $\overline{132}^6$. Ce nombre est-il multiple de 6? de 2?

2. Montrer que $\overline{324}^6$, $\overline{222}^6$, $\overline{550}^6$ sont multiples de 2. Sont-ils multiples de 6?

3. Montrer que $\overline{abc}^6$ est multiple de 2 si c=0 c=2 ou c=4. A quelle condition est-il multiple de 6?

4. Enoncer les théorèmes de divisibilité par 6 et par 2 à partir de l'écriture en base 6 de ce nombre.

5. **a.** Montrer que $\overline{325}^6$ $\overline{212}^6$ $\overline{555}^6$ sont multiples de 5.

b. Quel critère de divisibilité par 5 pourrait être énoncé? On pourra noter que 6 = 5 +1.

Exercice 6 Le but de cet exercice est de déterminer un nombre entier a. Ce nombre s'écrit avec 4 chiffres, il est supérieur à 7 000, il est multiple de 45, il est impair et le chiffre des milliers est le double de celui des centaines. Quel est ce nombre ?

Exercice 7 Un nombre N a pour écriture décimale 72a83b.
a. N est divisible par 6 et 45. Quel est le chiffre b?
b. Déterminer N.
c. Reprendre le même exercice avec 37a28b.

Exercice 8 Un nombre A s'écrit avec 3 chiffres.
En permutant les chiffres des unités et des dizaines on obtient B.
En permutant les chiffres des centaines et des dizaines on obtient C.
En permutant les chiffres des unités et des centaines on obtient D.
On sait de plus que A-B=18 et C-A=360.
a. Calculer D-A.
b. Montrer que A est multiple de 3.
c. Trouver A sachant qu'il est multiple de 9.

Exercice 9 Expliciter le système que nous utilisons pour compter les jours, heures, minutes, secondes sous forme d'une formule. Même question pour le système de mesure des angles : degré, minute d'arc, seconde d'arc.

Arithmétique

Exercice 10 Crible d'Erasthostène

a. Pour chaque nouveau nombre premier, barrer ses multiples jusqu'à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b. Les nombres 1789 et 1961 sont-ils premiers?

De nombreuses recherches sont menées pour déterminer des règles spécifiques sur les nombres premiers.

- Fermat (XVII$^{\text{ème}}$ s) a cru que les nombre $F_n=2^{2^n}+1$, $n \in \mathbb{N}$, étaient premiers.
- Pour qu'un nombre de Mersenne (XVII$^{\text{ème}}$ s), 2^n-1, $n \in \mathbb{N}$, soit premier il faut que n soit entier (condition non nécessaire).
- Wilson (XVII$^{\text{ème}}$ s) a montré que pour tout nombre premier p, (p-1)!+1 est multiple de p.

Exercice 11 géométrie
Les pythagoriciens ont associés une figure visible à chaque entier naturel.
1. Le nombre trois est triangulaire. Construire les premiers nombres entiers pouvant être représentés par un triangle. En donner la forme générale.
2. Quels sont les 5 premiers nombres carrés? En donner la forme générale.
3. Quels sont les sept premiers nombres pentagonaux

Exercice 12 Décomposition en facteurs premiers
Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants
a. 658 **b.** 420 **c.** 8820 **d.** 10200

Exercice 13 PGCD PPCM
Calculer les pgcd et ppcm des paires d'entiers suivants
a. (31,321) **b.** (300,408) **c.** (13230, 2940) **d.** (3534,198)

Exercice 14 Diviseurs
1. Trouver tous les diviseurs de :
a. 28 **b.** 60 **c.** 210 **d.** 600

2. On appelle nombre parfait un nombre égal à la somme de ses diviseurs, excepté lui-même.
a. Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits
b. Démontrer le théorème d′ Euclide :
" Si un nombre a s′ écrit $2^n(2^{n+1}-1)$ avec $2^{n+1}-1$ premier alors a est un nombre parfait."

Exercice 15
1. Trouver les nombres entiers a et b dont la somme vaut 256 et le pgcd 16.
2. Trouver les nombres entiers a et b dont le produit vaut 1734 et le pgcd 17.
3. Trouver les nombres entiers a et b dont le produit vaut 3240 et le ppcm 360.
4. Trouver les nombres entiers a et b dont la somme vaut 252 et le ppcm 735.
5. Trouver les nombres entiers a et b dont le pgcd vaut 6 et ppcm 420.

Exercice 16 Divisibilité par 11 et 25
1. Montrer qu'un entier (représenté en base 10) est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.
2. Déterminer a et b de manière que l'entier $\overline{aabb}^{10}$ soit un carré parfait.
Indication : on pourra montrer que a + b doit être divisible par ... 11 !
3. Trouver un critère de divisibilité par 25.

Exercice 17 Equation diophantienne

1. Effectuer la division euclidienne de 1812 par 1572, en déduire :

a. d = pgcd(1812; 1572); m=ppcm(1812; 1572)
b. Deux entiers relatifs u et v tels que d = 1812u +1572v
c. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: 437x + 241y = 1 ; 2520x + 3960y = 6480

2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $11u + 31v = 1$
b. En déduire des entiers positifs x et y tels que : $11x + 31y = 755$

Exercice 18 Histoires de bulles
Dans le cas où une bêtabulle éclate, elle fait soit 42 soit 44 nouvelles bêtabulles. On se demande combien d'éclatement il faut pour produire 1993 bêtabulles.
1. On note a et b les nombres d'éclatements en respectivement 42 et 44 bêtabulles. Après avoir remarqué que chaque éclatement produit soit 41 soit 43 nouvelles bêtabulles, montrer que $41a + 43b = 1992$.
2. Combien d'éclatements a-t-il fallu pour produire 1993 bêtabulles ?

Exercice 19 Développement en fraction continue d'un nombre rationnel
1. Expliquer, à partir des exemples fournis, comment l'algorithme d'Euclide appliqué à deux entiers $r_0 \in \mathbb{N}$ et $r_1 \in \mathbb{N}$, permet d'obtenir un développement en fraction continue du nombre rationnel R sous la forme :
2.

$$R = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_n}}}$$

Par souci de simplification on note cette fraction continue $R = [a_0; a_1; a_2;\dots;a_n]$:

2. Pour le nombre rationnel R que vaut a_0 ?

3. La suite des nombres $a_1; a_2; \dots; a_n$ est formée d'entiers positifs appelés les quotients partiels associés à la fraction continue. Vérifier sur les exemples et expliquer pourquoi le dernier quotient partiel a_n (obtenu par l'algorithme d'Euclide) est toujours supérieur ou égal à 2.

4. **Exemples :**

a. (r0; r1) = (233; 177) **b.** (r0; r1) = (56; 177) ; **c.** (r0; r1) = (121; 177) ;
d. (r0; r1) = (1572; 1812) ; **e.** (r0; r1) = (131; 151) ; **f.** (r0; r1) = (20; 171) ;

Congruences

Exercice 20 Congruence

a. Montrer que $671^{800}-1$ est divisible par 6.
b. Montrer que : $5^2 \equiv -1\ (13)$ $5^4 \equiv 1\ (13)$ $5^{4k} \equiv 1\ (13)$.
c. Montrer que $15^5-3^5 \equiv 0\ (12)$ et $9^{10}-5^{10} \equiv 0\ (7)$
d. Montrer que $5^n \equiv 1\ (4)$ et $12^{2n} \equiv 1\ (13)$
e. Démontrer que $7^{3n} \equiv 1\ (19)$

Exercice 21 Congruence
Trouver les restes par la division euclidienne par 7 de $375^9 \times 829^{16}$ et $829^{16} - 375^9$

Exercice 22 Congruence

Trois entiers naturels vérifient $a^2 = b^2 + c^2$. Montrer que :

a. l'un au moins des nombres b et c est multiple de 3,
b. l'un au moins des 3 nombres est multiple de 5,
c. l'un au moins des nombres b et c est multiple de 2 et 4.

Exercice 23 Congruence

Montrer que pour tout entier n:

d. $4^{3n} - 4^{n}$ est multiple de 5,
e. $3^{2n} - 2^{n}$ est multiple de 7,
f. $2^{4n+2} + 2^{4n+1} - 1$ est multiple de 5,
g. $n^2\left(n^4 - 1\right)$ est multiple de 60.

Exercice 24 Petits problèmes (QCM)

1. Soit n un diviseur de un million. On sait que n n'est ni multiple de 25 ni de 64. Que peut-on conclure ?
a. n est un multiple de 10? **b.** n est un multiple de 2?
c. n est un multiple de 5? **d.** n est un multiple de 80?

2. Jean possède une certaine somme mais a oublié sa valeur. Il sait que cette somme s'écrit avec 3 chiffres, que ces trois chiffres sont 1, 3 et 5 et qu le montant est multiple de 5 et 7. Trouver cette somme.

3. Trouver tous les entiers naturels a et b tels que la différence de leur carré soit égale à 255.

4. Déterminer tous les nombres de 3 chiffres abc non multiples de 10 qui vérifient le conditions suivantes: le chiffre des dizaines est quadruple de celui des unités et en retranchant à ce nombre 297 on obtient le nombre écrit à l'envers.

5. Un enfant range toutes les petites voitures dont il dispose.
Il les met par rangées de 6, il lui en reste 3. Il les met par rangées de 5; il n'en reste pas.
a. S'il les range par 3, en reste-t-il? Justifier cette réponse.
b. S'il les range par 2, en reste-t-il? Justifier cette réponse.
c. Quel peut être le nombre de voitures de cet enfant, sachant qu'il en a moins de 100?

6. Trouver tous les entiers naturels *n* à quatre chiffres satisfaisant aux conditions suivantes :
- le nombre de centaines de *n* est un nombre premier inférieur à 20 ;
- le reste de la division de *n* par 100 est un multiple de 24 ;
- le reste de la division de *n* par 9 est supérieur à 6 ;
- le reste de la division de *n* par 5 est égal à 1.

7. Eric possède 587 CD. Il veut les ranger dans des boîtes pouvant en contenir 25 chacune. Combien de boîtes doit-il prévoir ?

8. On dispose d'un carton de forme parallélépipédique rectangle de dimension 24 cm, 36 cm, et 60 cm. On veut y ranger des savons cubiques dont la mesure de l'arête est un nombre entier de cm, et de façon à remplir exactement le carton. Quels sont les trois plus gros savons permettant de faire ce rangement ? Dans chaque cas, combien y a t il de savons dans la boîte ?

9. On veut remplir exactement un carton cubique dont le volume est inférieur à 1 m2, avec des savons dont la forme est un parallélépipède rectangle de dimension 48 mm, 54 mm et 72 mm. Quelles sont les dimensions possibles de ce carton ?

QCM IUFM

Question n° 1 (aix 2003)
Albert est enrhumé. Il utilise des mouchoirs carrés de 25cm de côté. En huit jours, il a utilisé 3 m² de tissu. Combien a-t-il en moyenne utilisé de mouchoirs par jours ?

a. 1,5 **b.** 3 **c.** 6 **d.** 18 **e.** 24

Question n° 2 (aix 2003)
Soit le nombre 7 unités 4 centièmes. Sélectionner la(les) écritures(s) correcte(s) de ce nombre

a. 7 400 millièmes **b.** 7 040 millièmes
c. 704 centièmes **d.** 7,400 **e.** 7,040

Question n° 3 (aix 2003)
Le nombre possède une écriture décimale illimitée.
1/ Quelle est la valeur de sa cinquième décimale ?
a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4 **e.** 5

2/ Quelle est la valeur de sa centième décimale ?
a. 5 **b.** 6 **c.** 7 **d.** 8 **e.** 9

Question n° 4 (aix 2003)
On choisit un nombre, on le divise par 7, on trouve un reste égal à 5.
On divise à nouveau le quotient obtenu par 7, on trouve un reste égal à 3 et un quotient égal à 12. Quel était le nombre de départ ?

a. 591 **b.** 593 **c.** 609 **d.** 614 **e.** 619

e. 0,45 est une approximation de N au centième près par excès.

Question n° 5 (bordeaux 2003)
On note *N*=. Déterminer les 2 réponses correctes :
a. *N* est un nombre décimal. **b.** *N*=1++. **c.** *N*=19+
d. *N*= **e.** N n'est pas un nombre rationnel.

Question n° 6 (bordeaux 2003)
On considère le nombre P=456 709 × 598 706. L'écriture usuelle de P se termine par (1 réponse correcte) :

a. *9 454* **b.** *8 554* **c.** *7 084* **d.** *6 254* **e.** 3 254

Question n° 7 (bordeaux 2003)
Dans les opérations suivantes, certains chiffres ont été remplacés par des étoiles. Indiquer quelle est l'opération incorrecte.

a.	**b.**	**c.**	**d.**	**e.**
*9 **	1 9 * 7	** 2 5*	*5 * 4*	3 2 *
- * 9	+ * * 9 1	× 7	× 8	+ 8 * 8
9	* 0 8 7 *	7 * * 5	4 * * 2	1 * 0 3

Question n° 8 (bordeaux 2003)
On écrit la suite des nombres entiers de 43 à 77, 43 et 77 compris. Quelles sont les 2 réponses correctes ?

a. *le chiffre 5 apparaît 5 fois.* **b.** *Le chiffre 9 apparaît 3 fois.*
c. *Le chiffre 7 apparaît 11 fois.* **d.** *Le chiffre 4 apparaît 11 fois.*
e. Cette suite comporte 34 nombres.

Question n° 9 (caen 2003)
Quelles sont les affirmations vraies concernant le nombre 34 013,120 ?

a. *Le nombre des centaines est 0 ?* **b.** *Le nombre d'unités est 13*
c. *Le nombre de centaines est 340.* **d.** *Le nombre des centièmes est 20*
e. Le chiffre des millions est 4 ?

Question n° 10 (caen 2003)
Combien y-a-t-il de 1 dans l'écriture chiffrée de douze millions cent treize mille cent onze ?

a. *5* **b.** *6* **c.** *7* **d.** *8* **e.** *9*

Question n° 11 (caen 2003)
Quelles sont parmi les égalités suivantes celles qui sont vraies ?

a. += **b.** $\times =$ **c.** $\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{11}{14}} = \dfrac{11}{10}$

d. $\dfrac{\frac{15}{9}}{\frac{5}{3}} = 3$ **e.** *12 $\times =$*

Question n° 11 (toulouse 2003)
On sait que 12 345 679 $\times$ 18=222 222 222. Que vaut 12 345 679 $\times$ 63 ?

a. *777 777 777* **b.** *767 676 767* **c.** *7 676 767 6767*

d. *7 777 777 777* **e.** 666 666 666

Question n° 21 (toulouse 2003)
Combien y-a-t-il de nombres entiers entre 1 et 1 000 000 qui se terminent par 2003 ?

a. *100* **b.** *99* **c.** *101* **d.** *1 001* **e.** *autre*

Question n° 23 (lille 2003)
Dans la division euclidienne de 3 576 542 507 par 748 :

a. *le reste est impair.* **b.** *le reste est 849.* **c.** *le reste est nul*
d. *le quotient est supérieur à trois millions et demi.*
e. *le quotient est supérieur à 50 000 000.*