GEOMETRIE PLANE

I PETITE HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE

(inspiré de http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/)

Les origines

Les premières recherches connues de la géométrie sont dues aux Egyptiens et aux Babylonniens (2000 ans avant notre ère). Les inondations périodiques du Nil obligeaient les arpenteurs égyptiens à refaire chaque année le tracé des propriétés.

Activité 1 : calcul d'aire

Les formules utilisées étaient empiriques:

- l'aire d'un quadrilatère de côtés a, b, c, d était donnée par : $\frac{a+c}{2}\times\frac{d+b}{2}$
- l'aire d'un triangle isocèle de côtés a, b était donnée par $\frac{a\times b}{2}$.

1. Dans quel cas la formule 1 est-elle correcte ?
2. La formule 2 est-elle correcte ?
3. Montrer que la formule 2 est correcte si l'angle est petit.

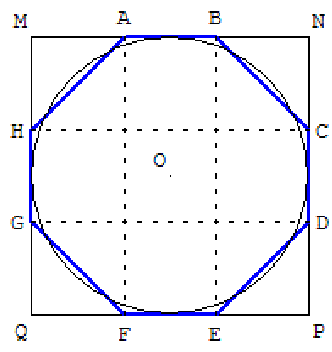
Ces informations proviennent d'un papyrus, appelé papyrus de Rhind (manuel de calcul du scribe Ahmès) qui a été daté de 1700 à 2000 ans avant notre ère. On a cependant constaté que les Egyptiens connaissaient le volume du tronc de pyramide et la surface de la sphère. On a aussi retrouvé sur des tablettes babylonniennes (2000 avant notre ère) une série de problèmes se ramenant à la résolution d'équations du second degré et même d'équations bicarrées.

Activité 2 : La quadrature du cercle

"***tracer à la règle et au compas un carré de même aire qu'un cercle donné***".

Ce problème n'est pas résoluble car π n'est pas constructible. Dans le Papyrus Rhind, écrit par le scribe Ahmés vers 1650 avant J.-C., on trouve la règle suivante pour la quadrature du cercle :

« construire un carré équivalent à un cercle... : retirer $\frac{1}{9}$ au diamètre et construire le carré sur ce qui reste ».



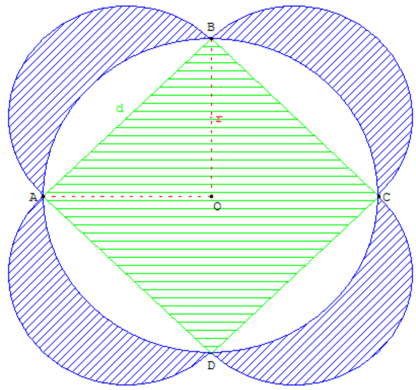
Démonstration: Calculer l'aire d'un disque, l'approximation précédente et l'aire de l'octogone ABCDEFGH.

La valeur approchée utilisée pour π était $\frac{256}{81}$, justifier ce choix.

Activité 3 Lunules d'Hippocrate

Au Ve siècle avant J.-C. Hippocrate de Chios est le premier à s'être intéressé aux quadratures.

Il n'a pas réussi pour le cercle mais il prouva la « quadrature » des lunules.



Les quatre lunules hachurées sont les surfaces comprises entre le cercle de rayon r circonscrit au carré ABCD et les demi-cercles ayant pour diamètre d les côtés du carré. Démontrer la proposition de Hippocrate de Chios :

"L''aire du carré ABCD est égale à la somme des quatre aires des lunules. »

Géométrie grecque

Les connaissances mathématiques des Egyptiens et des peuples orientaux parvinrent en Grèce à la faveur d'échanges commerciaux. La tradition attribue à Thalès (600 ans avant notre ère) l'introduction en Grèce de la géométrie égyptienne. Thalès fut un précurseur surtout préoccupé de problèmes pratiques (calcul de hauteurs de monuments à l'aide d'un bâton et de la proportionnalité des ombres).

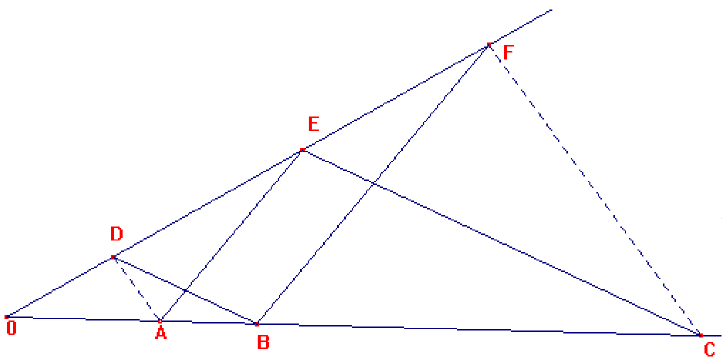
Activité 4 : Démonstration du théorème de Thalès (vers 6ème s av J.C)

"*Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en segments proportionnels.*"

Démonstration par les aires (Euclide 3ème s av JC)
Soit un triangle ABC et M un point du segment [AB], N un point du segment [AC], (MN) étant parallèle à (BC). On note I,J,K les pieds des hauteurs issues de A, B et C dans le triangle ABC et L l'intersection de (MN) et (AI).

1. Démontrer que les triangles MBC et NBC ont même aire.
2. Exprimer les aires de AMC et ABC en fonction de CK et celles de ABN et ABC en fonction de BJ.
3. En déduire la propriété de Thalès.
4. Montrer que les aires des triangles LNC et LNI sont égales. En déduire que les triangles AIN et ALC ont même aire. En déduire que $\frac{AL}{AI} = \frac{LN}{IC}$ *puis* $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$.

Activité 5: Pappus d'Alexandrie (vers l'an 300)



Placer un point O, tracer deux demi-droites issues de O.

Placer les points A et B sur la première demi-droite, D et E sur la deuxième demi-droite et tracer les segments [AE] et [BD],
tracer la droite passant par B parallèle à la droite (AE). Cette droite coupe la demi-droite [OD] en F.
Tracer la droite passant par E parallèle à la droite (BD). Cette droite coupe la demi-droite [OA] en C.

Que peut dire des droites (AD) et (CF) ?

La géométrie grecque qui fut une réussite éclatante de la science humaine en faisant preuve d'une ingéniosité exceptionnelle, fut marquée par deux Ecoles : celle de Pythagore et celle d'Euclide.

Géométrie Pythagoricienne: Ecole de Crotone

Pythagore fut un philosophe grec né à Samos vers 580 avant notre ère et mort vers 500 avant notre ère. Il voyagea en Egypte et s'installa à Crotone en Italie où il fonda une école célèbre. Nous devons à l'école de Crotone une nouvelle démarche dans la recherche géométrique.

A cette époque les concepts de point, ligne et surface étaient particuliers:

- ***Le point n'était pas le point sans dimension, c'était un être concret, appelé monade, matérialisé par un grain de sable.***
- ***La ligne était alors une succession de monades dont le nombre donnait la mesure.***
- ***Toutes les longueurs étaient donc commensurables.***

Le théorème de Pythagore devait ruiner la géométrie construite sur le concept de monade. En effet si on considère un triangle rectangle isocèle dont le rapport de l'hypoténuse sur le côté de l'angle droit est m/n tel que m et n soient premiers entre eux, le théorème permet d'établir:

$m^2 = 2\,n^2$ d'où l'on tire que m est pair

Soit m^2 est un multiple de 4

ainsi n^2 est pair donc n est pair!

ce qui est contraire à l'hypothèse que m et n sont premiers entre eux.
Le fait de s'apercevoir qu'il existait des longueurs incommensurables modifia fondamentalement la géométrie de l'époque.

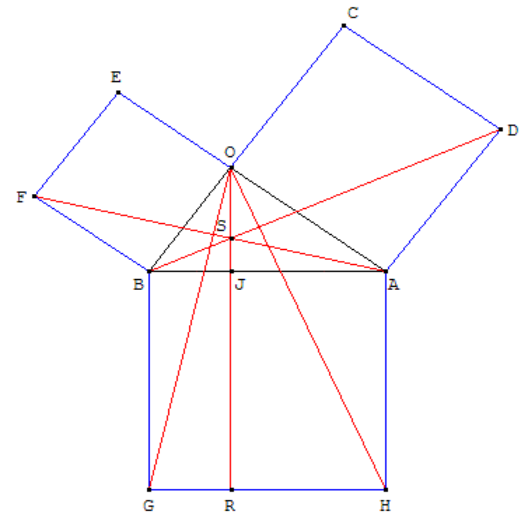
Activité 6: Démonstration du théorème de Pythagore par l'école d'Euclide

Livre I proposition 47 : Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés de l'angle droit.

On construit trois carrés OEFB, OADC et ABGH de côtés a, b et c à l'extérieur du triangle BOA rectangle en O. Par O menons (OR) parallèle à (BG) et traçons [OG] et [FA].

1. Montrer que les tes triangles OBG et FBA sont isométriques.
2. Montrer que les triangles FBA et FBO ont même aire.
3. En déduire que :

   $Aire(\text{OBG}) = Aire(\text{BGRJ}) = a^2$.
4. Que peut-on en déduire par symétrie de $Aire$(AHRJ).



5. En déduire un fameux théorème.

Géométrie Euclidienne : Ecole d'Alexandrie


202 EUCLIDIS Elementorum

1. Hyp. Si fieri potest, sit D ipsarum AC, AB communis mensura. ª ergò D metitur AC — AB (BC). ᵇ ergò AB ⊓ BC, contra Hypoth.

2. Hyp. Dic AB ⊓ BC. ᶜ ergò AC ⊓ AB, contra Hypoth.

a 3. ax. 10.
b 1. def. 10.
c 16. 10.

Coroll.

Hinc etiam, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliquæ incommensurabilis erit.

PROP. XVIII.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales AB, GK; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori GK, æquale parallelogrammum ADB ad majorem AB applicetur, deficiens figurâ quadratâ, & in partes AD, DB longitudine commensurabiles ipsam dividat, major AB tanto plus poterit quàm minor GK, quantum est quadratum rectæ lineæ FD sibi longitudine commensurabilis: Quòd si major AB tanto plus possit, quàm minor GK, quantum est quadratum rectæ lineæ FD sibi longitudine commensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori GK, æquale parallelogrammum ADB ad majorem AB applicetur, deficiens figurâ quadratâ, in partes AD, DB longitudine commensurabiles ipsam dividet.

ª Biseca GK in H; & ᵇ fac rectang. ADB = GHq: abscinde AF = DB. Estque ABq ᶜ = 4 ADB ᵈ (4 GHq, vel GKq) + FDq. Jam primò

a 10. 1.
b 28. 6.
c 8. 2.
d constr. & 4. 2.

A l'époque d'Alexandre le Grand vers -350 avant notre ère, les bords du Nil étaient annuellement fertilisés par les inondations du fleuve. Les agriculteurs devaient retrouver les limites de leurs terres ou du moins retrouver une parcelle d'une superficie équivalente, car le fleuve nourricier détruisait tous les repères. Cette tâche était confiée à des gens qui "mesuraient la terre" : des GEOMETRES (du grec géo pour la terre et metron, mesure). Fondée en 331 avant notre ère par Alexandre le Grand, la ville d'Alexandrie devint rapidement sous la protection des Ptolémées, le centre intellectuel du monde antique. Les mathématiques y furent particulièrement travaillées et la célèbre Ecole mathématicienne d'Alexandrie connut trois représentants exceptionnels: Euclide, Archimède et Appolonius. Les travaux de cette école débouchèrent sur une oeuvre qui pendant plus de 20 siècles servit de base à toute étude géométrique: les Eléments. Cette oeuvre est composée de 15 livres dont 13 sont dus à Euclide (300 avant notre ère). On retrouve dans les deux premiers des règles de démonstration qui permettent de dérouler des suites de théorèmes logiquement reliés les uns aux autres. Mais les mathématiciens d'Alexandrie ne se sont pas satisfaits pas de la résolution de ces partages de terres. Ils déroulèrent leur raisonnement hors du domaine pratique, comme un jeu de l'esprit soumis à de nouvelles règles : celles de la logique.

<u>Activité 7</u> Rectangles d'Euclide

"Les deux rectangles de chaque côté de la diagonale ont la même aire."

Soit un rectangle ABCD et M un point de la diagonale AC. On définit les rectangle BIMJ tel que I ∈ [AB] et le rectangle CKML tel que K ∈ [DC]. Montrer que les deux rectangles ont la même aire.

Archimède (287-212 avant notre ère) compléta les Eléments par une étude très approfondie sur les cercles, les sphères et les cylindres... Il donna un encadrement du nombre Π :

3 + 10/71 < Π < 3 + 1/7 soit 3.1408 < Pi < 3.1428

Avec l'étude des coniques par Appolonius (200 avant notre ère) nous avons l'ensemble de la géométrie élémentaire telle qu'elle était enseignée il y a quelques années.

<u>Activité 8</u> Quadrature du rectangle

On veut construire un carré ayant la même aire qu'un rectangle; Cela s'appelle la quadrature du rectangle. La démonstration d'Euclide montre comment construire un carré de même aire que celle d'un rectangle.

- Soit ABCD un rectangle de longueur AB.
- On place le point I sur la droite (AB) à l'extérieur de [AB] tel que BI=BC.
- On trace le demi-cercle de diamètre [AI] extérieur au rectangle ABCD.
- Soit E le point d'intersection de ce demi-cercle et de la droite (BC).

  Montrer que le carré BEFG de côté [BE] a même aire que le rectangle ABCD.

Question subsidiaire : Procéder de façon analogue pour passer de l'aire d'un triangle à celle d'un carré (en utilisant le parallélogramme et le rectangle comme figures intermédiaires).

Des grecs jusqu'à nos jours

La décadence grecque coïncide avec une longue période de temps obscurs pour les mathématiques en général et la géométrie en particulier... jusqu'au XVème siècle début de la Renaissance.
Nous pouvons, dans cette longue période d'immobilisme et presque de régression scientifique retenir deux facteurs:

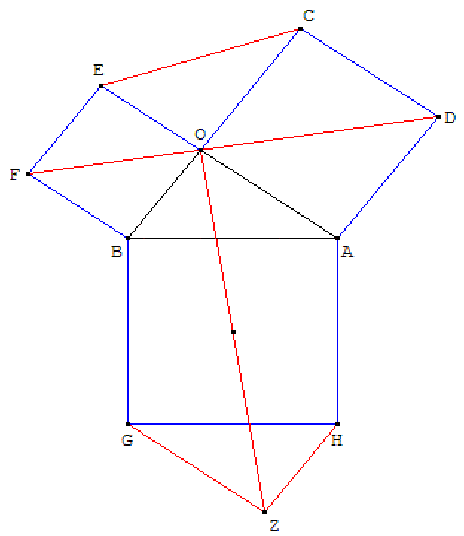
- ***La civilisation romaine qui fit suite à la civilisation grecque était toute portée vers la conquête militaire, l'administration civile, l'acquisition de richesses et la construction de monuments gigantesques, cela au détriment de la science et de l'humanisme... En 529 (après J.C) l'Empereur romain Justinien, par sanction d'un enseignement païen fit fermer les écoles d'Athènes.***

- *La grande bibliothèque d'Alexandrie brula à plusieurs reprises.
  En raison de l'unicité, du nombre et de la richesse des ouvrages disparus, cela représente une perte considérable pour l'humanité.*

Jusqu'au XIII^e^ siècle seuls les Arabes et les Hindous empêchèrent la régression scientifique de prendre une ampleur qui aurait fait sombrer dans l'oubli les merveilleux travaux des Grecs. Dans cette période, en effet ce sont les savants de culture arabe qui sont les héritiers de la Grèce et les promoteurs de la connaissance. Ce sont eux dont les oeuvres, une fois traduites en latin, vont déclencher en Occident le grand mouvement de pensée qui aboutit au brillant essor du XIII^e^ siècle. Dès lors, ce sont les philosophes et les chercheurs des pays de chrétienté, qui prennent l'initiative.

- *Avec la Renaissance et l'invention des presses d'imprimerie débuta une période d'intense activité pour le développement des sciences en général et des mathématiques en particulier. Cette activité se poursuit jusqu'à nos jours parfois ralentie par les guerres et les invasions.*
- *Jusqu'au XVIIème siècle on admettait en gros que la géométrie s'occupait des figures de l'espace et que l'algèbre s'intéressait aux nombres.*
- *En 1637 Descartes associa ces deux notions en créant le concept de repère. La géométrie analytique était née ! Elle apporta une richesse nouvelle aux mathématiques en contribuant entre autres aux théories de Newton et Leibniz pour aboutir à celle de la relativité d'Einstein.*
- *Cantor, Hilbert, Galois ainsi que bien d'autres apportèrent enfin aux mathématiques une assise différente au XIXème siècle, créant une nouvelle pensée, un nouvel éclairage, dont les retombées de nos jours sont connues sous le nom de Mathématiques Modernes…*

Activité 9 Démonstration du théorème de Pythagore par Léonard de Vinci (1452-1519)



On reprend la figure d'Euclide et on construit sur [GH] un triangle rectangle ZGH égal à OAB.

On mène [OZ], [EC], [OF] et [OD].

1. Montrer que les points F, O et D sont alignés.
2. Montrer que les hexagones BFECDA et BOAHZG ont même aire.
3. En déduire un fameux théorème.

II POLYGONES CONSTRUCTIBLES

1. Généralités

Définition : Un polygone est dit régulier si il est inscrit dans un cercle et si tous ses côtés sont de même longueur.

Exercice: Pour les polygones réguliers, à 3, 4 et 6 côtés, inscrits dans un cercle unitaire, calculer la longueur d'un côté.

Théorème de Gauss : Il est possible de diviser la circonférence d'un cercle en un nombre impair de parties égales si *et seulement si,* le nombre est un nombre premier de Fermat 3, 5, 17, 257, 65 537 (2^n+1).

Propriété: Soit m et n deux nombres premiers entre eux $\frac{2\pi}{mn}$ est constructible si et seulement si $\frac{2\pi}{n}$ et $\frac{2\pi}{m}$ sont constructibles. ***à démontrer***

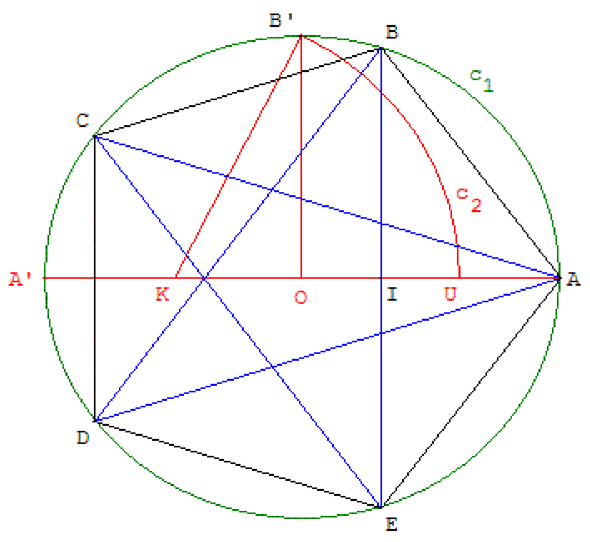
On peut ensuite construire des multiples de ces nombres (3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,…).

2. Exemple du pentagone

Construction dite de Ptolémée ; Alexandrie 85-165 après J.-C.

Soit deux points O et A distincts. Tracer un cercle (c_1) de centre O, passant par A. On choisira comme unité le rayon du cercle. Placer un diamètre [AA'] et un rayon [OB'], perpendiculaire à [AA'].

K est le milieu de [OA'], le cercle de « *Ptolémée* » (c_2) de centre K et de rayon KB' coupe [OA] en U. La longueur du côté du pentagone est égal à B'U. La médiatrice de [OU] coupe le premier cercle (c_1) aux points B et E qui sont deux sommets du pentagone. Le cercle de centre B passant par A recoupe (c_1) en C. Le symétrique D de C par rapport à (AA') termine la construction du pentagone.

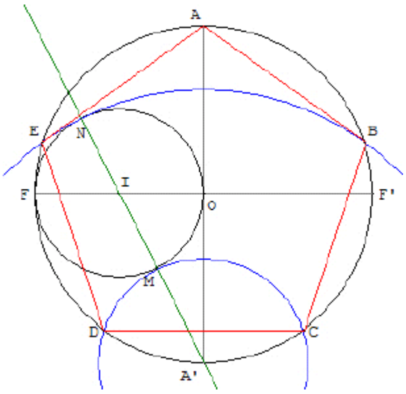


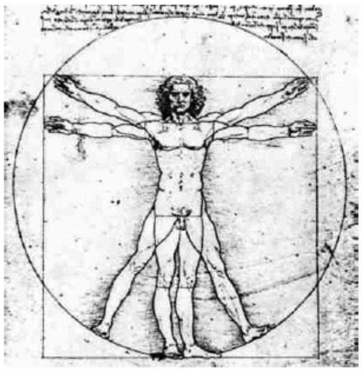
Démonstration : Montrons que ABCDE est bien un pentagone régulier.

1. Montrer que KB' = KU = $\frac{\sqrt{(5)}}{2}$. En déduire OU, OI.
2. On rappelle que cos $\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{(5)}-1}{4}$. En déduire la nature de ABCDE.

Autre construction du pentagone

Ecrire un programme de construction de cette figure.





3. Le nombre d'or

a. section dorée

La proportion divine est celle que l'on rencontre lorsqu'un grand segment est partagé en un petit et un moyen segments et que le rapport du grand par le moyen est égal à celui du moyen par le grand. On parle de section dorée.

"Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison quand, comme elle est toute entière relativement au plus grand segment, ainsi est le plus grand relativement au plus petit." Euclide

i. *Calculer la proportion correspondante, notée φ.*
ii. Etes vous divinement proportionné (e) ?
(faire le rapport de votre taille par la hauteur de votre nombril).

b. rectangle d'or

La proportion d'un rectangle est le rapport longueur sur largeur. Un rectangle est dit doré si en construisant à l'intérieur de celui-ci un carré de côté la largeur du rectangle, le petit rectangle restant est proportionnel au rectangle initial.

1. Calculer la proportion correspondante.
2. Proposer une construction d'un tel rectangle à partir d'un carré.

c. nombre d'or

1. Démontrer que φ vérifie $\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1$. En déduire un développement en fraction continue.
2. On construit la suite définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ et u_0=1. Calculer les 5 premiers termes et conclure.

d. liens: http://www.univ-lille1.fr/irem/publications/fascicules/pentaetats.pdf
http://trucsmaths.free.fr/nombre_d_or.htm
http://perso.orange.fr/debart/college/thales_classique.html#ch1

LES MATHÉMATICIENS GRECS DE L'ANTIQUITÉ.

Mathématiciens	Dates	Œuvres caractéristiques
		Ecole Ionienne.
Thalès de Milet	636- - 546	Fondateur de la géométrie.
Anaximandre	610- - 547	Astronome.
Héraclite	576- - 480	Philosophe du changement.
Anaxagore	500- - 428	Théorie de la perspective, quadrature du cercle.
		Ecole des Eléates.
Xénophane de Colophon	570- - 478	Paradoxes sur le mouvement.
		Ecole des Pythagoriciens.
Pythagore	585- - 500	Irrationalité de $\sqrt{2}$.
Philolaüs de Crotone	470- - ???	Ecrits de Pythagore.
Archytas de Tarente	428- - 347	Duplication du cube.
Hippasos de Métaponte	vers 450	Divulgation de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
		Ecole des Sophistes.
Leucippe	$5^{ème}$ siècle	Théorie atomiste.
Démocrite	460- - 370	Publie un traité sur les irrationnels.
Hippocrate de Chios	470- - 400	Eléments de géométrie et duplication du cube.
Hippias d'Elis	450- - 400	Quadratrice.
Antiphon	480- - 411	Tente la quadrature du cercle par exhaustion.
Dinostrate	$4^{ème}$ siècle	Quadratrice. Aire du cercle.
Zénodore	$2^{ème}$ siècle	Traité des isopérimètres.
		Ecole de Platon
Platon	428- - 348	La république, Le Ménon…
Eudoxe	408- - 355	Livre 5 des éléments.
Théodore de Cyrène	460- - 369	Irrationalité de $\sqrt{3}$ de $\sqrt{5}$
Théétète	410- - 369	Théorie des nombres : étude des irrationnels.
Ménechme	375- - 325	Sections coniques.
Aristée	320- - ??	Géomètre.
Autolycus de Pilane	360- - 300	Géomètre.
		Ecole d'Aristote
Aristote	384- - 322	Considérations sur l'infini et le continu.
Eudème de Rhodes	$4^{ème}$ siècle	Histoire de l'arithmétique, de la géométrie et de l'astronomie.
Aristoxène	350- - ???	Eléments d'harmonie musicale. Sur le rythme.

Ecole d'Alexandrie

Euclide	vers 300	Les éléments. Théorie des nombres irrationnels.
Archimède	287- - 212	La mesure du cercle. Conoïdes et sphéroïdes. Quadrature de la parabole.
Apollonios de Perge	262- - 190	Les coniques. De Locis Planis.
Eratosthène	284- - 192	Astronome, mathématicien, géographe.
Hipparque	190- - 125	Astronome, précurseur de la trigonométrie.
Nicomède	2ème siècle	Découverte de la conchoïde.
Dioclès	2ème siècle	Cissoîde pour la duplication du cube.
Théodore de Bithynie	1er siècle	Les sphériques.
Héron	1er siècle après jc	Les métriques.
Ménélaüs	1er siècle ap.jc.	Les sphériques.
Nicomaque de Gérasa	1er siècle ap.jc.	Introductio Arithmética.
Ptolémée Claude	128- - 168	Syntaxis mathématica. (Almageste)
Théon d'Alexandrie	4ème siècle ap. jc.	Calculs à l'aide des fractions sexagésimales, extraction des racines
Porphyre	234- - 305	Explications sur les éléments d'Euclide.
Diophante	325- - 409	Arithmetica.
Pappus	4ème siècle ap.jc.	La collection mathématique.