

Cours de GEOMETRIE PLANE

I Droites

Notations :

- Un point du plan est représenté par une lettre majuscule : A, B ...
- Une droite est notée (d), d , (D) ou (AB) si elle passe par les points A et B.
- On utilise les symboles suivant :
 - $\in$: "élément de";
 - $\perp$: "perpendiculaire à";
 - $//$: "parallèle à".

Exemple : Associer à chaque notation sa signification :

- [AB]
- (AB)
- AB
- $\overrightarrow{AB}$:

Propriétés sur les droites :

1. Par un point donné, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.
2. Par un point donné, il passe une unique droite perpendiculaire à une droite donnée.
3. Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles.
4. Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles.
5. Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une l'est à l'autre.

Construction d'une droite parallèle passant par un point :

Médiatrice d'un segment

1. La médiatrice d'un segment [AB] est la droite passant perpendiculairement par le milieu I de [AB].
2. La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

Construction de la médiatrice d'un segment

Construction d'une droite perpendiculaire passant par un point.

II Angles

Définition : Un angle est défini par un sommet et deux côtés.

On le note $\widehat{ABC}$, $\widehat{xOy}$, $\widehat{A}$. La lettre centrale représente le sommet.
Au collège on mesure un angle en degré.

Construction d'un angle de même mesure :

Définitions:

Angle plat Angle droite Angle aigu Angle obtus Angle rentrant Angle saillant

Angles complémentaires : Deux angles sont dits complémentaires si la somme de leur mesure vaut 90° .

Angles supplémentaires : Deux angles sont dits supplémentaires si la somme de leur mesure vaut 180° .

Bissectrice d'un angle :

1. On appelle bissectrice d'un angle la demi-droite issue du sommet partageant l'angle en deux angles de même mesure.
2. La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des deux côtés de l'angle.

Construction d'une bissectrice

Angle et triangle : La somme des mesures des trois angles intérieurs d'un triangle vaut 180° .

III Cercle

Définition : Un cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) est l'ensemble des points M du plan tels que $OM = R$.

Notations :

Construction de l'hexagone

Angle au centre : Soient A, B, M et N quatre points d'un cercle de centre O.

1. Si deux angles interceptent le même arc de cercle
alors ils ont même mesure : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.
2. L'angle interceptant un arc de cercle vaut la moitié
de l'angle au centre : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$

IV Triangles

1. Construction

Construire un triangle ABC tel que :

$$AB=4 \quad AC=3 \quad BC = 5$$

$$AB=3 \quad AC=4 \quad \widehat{BAC}=45^\circ$$

$$AB=3 \quad AC=4 \quad \widehat{ACB}=45^\circ$$

$$AB=5 \quad \widehat{ABC}=45^\circ \quad \widehat{ACB}=120^\circ$$

2. Droites remarquables

a. Hauteur

Définition : Une hauteur dans un triangle est une droite issue d'un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Propriété : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre.

b. médiane

Définition : Une médiane est une droite issue d'un sommet et passant par le milieu du côté opposé.

Propriétés :

1. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G appelé centre de gravité.
2. Le centre de gravité partage la médiane en proportion 1/3 et 2/3.
3. La médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

c. médiatrice

Définition : Une médiatrice est une droite passant perpendiculairement par le milieu d'un côté.

Propriété : Les trois médiatrices sont concourantes en un point O centre du cercle circonscrit.

d. bissectrice

Définition : Une bissectrice est une demi-droite partageant un angle défini par deux côtés du triangle en deux angles de même mesure.

Propriété : Les trois bissectrices sont concourantes en un point I centre du cercle inscrit.

2. Triangles particuliers

a. Triangle équilatéral

Définition : Un triangle équilatéral est un triangle qui a 3 côtés de même longueur.

Propriétés du triangle équilatéral :

1. Les trois angles mesurent 60° .
2. Les quatre droites remarquables sont confondues.
3. Le triangle admet 3 axes de symétrie.
4. La hauteur d'un triangle équilatéral vaut $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Construire un triangle équilatéral de côté 4 cm :

b. Triangle isocèle

Définition : Un triangle isocèle est un triangle qui a 2 côtés de même longueur.

Le 3^{ème} côté est appelé base et le sommet commun aux deux côtés de même longueur est le sommet.

Propriétés du triangle isocèle:

1. Les angles à la base ont la même mesure.
2. Les quatre droites remarquables issues du sommet sont confondues.
3. Le triangle admet un axe de symétrie.

Construire un triangle ABC isocèle en A tel que :

$$BC=3 \text{ et } \widehat{CBA}=40^\circ$$

$$AB=4 \text{ et } BC=3$$

c. Triangle rectangle

Définition : Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit.

Le plus grand côté est appelé hypoténuse, les autres côtés sont les petits côtés.

Propriétés du triangle rectangle:

1. Les deux angles aigus sont complémentaires.
2. Le cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse.
3. La médiane issue de l'angle droit est la moitié de l'hypoténuse.

Propriété : Si un triangle est inscrit dans un cercle dont un diamètre est un côté du triangle alors le triangle est rectangle.

Construire un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$AB=3 \text{ et } AC=4$$

$$AB=3 \text{ et } BC=6$$

V Quadrilatères

1. Notions générales

Propriétés et définitions :

1. Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés.
2. L'ordre des points ABCD ou ABDC est important.
3. La somme des quatre angles mesure 360° .
4. On appelle diagonale le segment reliant deux sommets opposés.
5. On appelle médiane la droite passant par les milieux de deux côtés opposés.

2. Trapèze et parallélogramme

a. Trapèze

Définition : Un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles. Ces deux côtés sont appelés petite et grande base du trapèze.

Construire un trapèze rectangle tel que
 $B=5 \quad b=3 \quad h=2$

Construire un trapèze isocèle tel que
 $B=5 \quad b=3 \quad h=2$

b. Parallélogramme

Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses deux côtés opposés parallèles 2 à 2.

Propriétés :

1. Un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.
2. Un parallélogramme est un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.

Propriétés :

1. Un parallélogramme est un quadrilatère ayant un centre de symétrie (intersection des diagonales).
2. Un parallélogramme a ses angles opposés de même mesure.

Construire un parallélogramme ABCD tel que
 $AB=5 \quad BC=3$

Construire un parallélogramme ABCD tel que
 $AB=5 \quad BC=3 \quad AC=6$

3. Parallélogrammes particuliers

a. Losange

Définition : Un losange est un quadrilatère ayant ses 4 côtés de même longueur.

Propriétés :

1. Un losange est un quadrilatère dont les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu.
2. Un losange est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.

Propriétés :

Un losange est un quadrilatère dont les diagonales sont des axes de symétries (et des bissectrices).

Construire un losange ABCD tel que
AB=4

Construire un losange ABCD tel que
AC=4 AB=3

b. Rectangle

Définition : Un rectangle est un quadrilatère ayant 4 angles droits.

Propriétés :

1. Un rectangle est un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu.
2. Un rectangle est un parallélogramme ayant un angle droit.

Propriétés :

1. Un rectangle est un quadrilatère dont les médianes sont des axes de symétrie (et des médiatrices).
2. Un rectangle est circonscrit au cercle de diamètre une diagonale.

Construire un rectangle ABCD tel que
AB=4 AD=2

Construire un rectangle ABCD tel que
AB=4 AC=5

c. Carré

Définition : Un carré est à la fois un losange et un rectangle.

Propriétés : Un carré a toutes les propriétés du losange et du rectangle.

1. Un carré a ses diagonales de même longueur se coupant perpendiculairement en leur milieu.
2. Un carré est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur.