Université d'Angers — Année universitaire 2018-2019

L3 Math & Math appli.

Probabilités

Démonstration de la linéarité de l'espérance dans le cadre fini

Proposition 0.1. *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires et λ un nombre réel. On a :*

(1) $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$

(2) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Démonstration. La première égalité est de loin la plus facile[1]. Posons $Z = \lambda X$. Si $\lambda = 0$, alors Z est constante égale à 0 et le résultat est clair. Supposons donc $\lambda \neq 0$ et notons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les différentes valeurs de X. Alors les différentes valeurs de Z sont $\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n$ donc

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) \mathbb{P}(Z = \lambda x_i).$$

Or $Z = \lambda x_i$ si et seulement si $X = x_i$; fait qui se traduit par l'égalité des événements $\{Z = \lambda x_i\}$ et $\{X = x_i\}$. D'où

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) \mathbb{P}(X = x_i) = \lambda \mathbb{E}(X).$$

Pour démontrer la deuxième égalité, posons $Z = X + Y$ et cherchons d'abord quelles peuvent être les valeurs de Z. Par définition, $z \in \mathcal{V}_Z$ signifie qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $z = Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$, ce qui implique que $z = x + y$ avec $x \in \mathcal{V}_X$ et $y \in \mathcal{V}_Y$. L'ensemble $\mathcal{V}_Z$ est donc inclus dans l'ensemble

$$S = \{z \in \mathbb{R} | \exists (x, y) \in \mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y, x + y = z\}.$$

Attention ! S et $\mathcal{V}_Z$ ne sont pas égaux en général (pourquoi ?), mais l'inclusion permet quand même d'écrire

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in S} z \mathbb{P}(Z = z).$$

En effet, les termes $z\mathbb{P}(Z = z)$ pour $z \in \mathcal{V}_Z$ sont bien tous présents dans cette somme, et si $z \in S$ n'est pas une valeur de Z, alors $z\mathbb{P}(Z = z)$ vaut 0 car l'événement $\{Z = z\}$ est vide.

Calculons maintenant $\mathbb{P}(Z = z)$ pour $z \in S$. Puisque les événements $\{X = x\}$, $x \in \mathcal{V}_X$ forment un système complet, on a

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{x \in \mathcal{V}_X} \mathbb{P}(Z = z, X = x).$$

Les événements $\{Y = y\}$, $y \in V_Y$ forment aussi un système complet donc

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{x \in \mathcal{V}_X} \sum_{y \in \mathcal{V}_Y} \mathbb{P}(Z = z, X = x, Y = y) = \sum_{(x,y) \in \mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y} \mathbb{P}(Z = z, X = x, Y = y).$$

1. Et en forçant un peu les choses on pourrait déduire cette relation de la seconde en utilisant la positivité de l'espérance (essayez ! !)

Comme $Z = X + Y$, l'événement $\{Z = z, X = x, Y = y\}$ est vide si $x + y \neq z$ et égal à $\{X = x, Y = y\}$ si $x + y = z$, donc la somme précédente peut s'écrire plus simplement

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{(x,y)\in H_z} \mathbb{P}(X = x, Y = y),$$

où $H_z = \{(x, y) \in \mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y | x + y = z\}$.

Puisque tout couple dans H_z a z pour somme, on a

$$\begin{aligned} z\mathbb{P}(Z = z) &= \sum_{(x,y)\in H_z} z\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{(x,y)\in H_z} (x + y)\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{(x,y)\in H_z} x\mathbb{P}(X = x, Y = y) + \sum_{(x,y)\in H_z} y\mathbb{P}(X = x, Y = y). \end{aligned}$$

Si bien que

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z\in S} \sum_{(x,y)\in H_z} x\mathbb{P}(X = x, Y = y) + \sum_{z\in S} \sum_{(x,y)\in H_z} y\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Il n'y plus qu'à remarquer que la première double somme est $\mathbb{E}(X)$ et l'autre $\mathbb{E}(Y)$. Vu la symétrie entre ces deux sommes, il suffit d'établir le résultat pour la première. Posons

$$A = \sum_{z\in S} \sum_{(x,y)\in H_z} x\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Les ensembles H_z, $z \in S$ forment une partition de $\mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y$ (les couples (x, y) sont simplement classés selon la valeur de leur somme $x + y$), donc

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(x,y)\in \mathcal{V}_X\times\mathcal{V}_Y} x\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{x\in\mathcal{V}_X} \sum_{y\in\mathcal{V}_Y} x\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{V}_X} \left(x \sum_{y\in\mathcal{V}_Y} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right) = \sum_{x\in\mathcal{V}_X} x\mathbb{P}(X = x), \end{aligned}$$

où la dernière égalité est justifiée par le fait que les événements $\{Y = y\}$, $y \in V_Y$ forment un système complet. On voit donc que $A = \mathbb{E}(X)$ et ceci achève la démonstration.

$\square$