Université d'Angers Année universitaire 2018-2019
L3 Math & Math appli.

Travaux dirigés de Probabilités

Feuille 4

Espaces probabilisés généraux

Variables aléatoires, lois, espérance

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On appelle loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ la loi de la variable $Y=\sigma X+m$ où $\sigma>0$ et $m\in\mathbb{R}$.
1) Montrer que cette loi possède une densité et la calculer.
2) Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 2. 1) Trouver la densité de $Y=X^2$, où X est une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
2) Trouver la densité de $Y=-\lambda^{-1}\ln(1-U)$ où U est une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3. 1) Soient X une v.a. de loi $\mathcal{B}(p)$ et Y une v.a. indépendante de X et de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Z=XY$. Démontrer que $\mathbb{P}_Z=p\mathbb{P}_Y+q\delta_0$, calculer la fonction de répartition de Z et la représenter graphiquement. La loi de Z est-elle discrète ? Est-elle à densité ?
2) La fonction nulle sur $]-\infty,0[$ et égale à $1-e^{-t}/2$ sur $[0,+\infty[$ est la fonction de répartition d'une variable Z. Trouver deux v.a. indépendantes dont le produit a même loi que Z.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X.
1) Pour $p\geq 1$, démontrer que

$$\mathbb{E}(X^p)=p\int_0^\infty t^{p-1}(1-F_X(t))dt.$$

(Indication : utiliser l'identité $X^p=p\int_0^X t^{p-1}dt$.)
2) On suppose que X est discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Démontrer que

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(X>k).$$

3) Application : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage sans remise de r boules dans cette urne ($r\leq n$). On note X le plus petit des r nombres tirés. Montrer que pour $k\geq 0$,

$$\mathbb{P}(X>k)=\begin{cases}\binom{n-k}{r}/\binom{n}{r} & \text{si } k\leq n-r;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

En déduire $\mathbb{E}(X)$ [1].

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a. dans $\mathcal{L}^2$.
1) De l'étude du polynôme $t\mapsto\mathbb{E}((Y-tX)^2)$, déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(XY)|\leq\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

1. Le problème revient à calculer $\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{n}{r}$. Pour se faire, on pourra remarquer qu'il s'agit du coefficient de x^r dans le polynôme $\sum_{k=0}^n(1+x)^k$ qu'on cherchera à exprimer d'une autre manière.

2) Montrer alors l'inégalité triangulaire

$$\|X+Y\|_2 \leq \|X\|_2 + \|Y\|_2,$$

où $\|Z\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}(Z^2)}$.

Exercice 6. Soit (U,V) un couple de loi uniforme sur le carré $[0,1]^2$. On pose $R = \sqrt{-2\ln U}$ et $\Theta = 2\pi V$. Déterminer la densité du couple (R,Θ), puis démontrer que le vecteur $(X,Y) = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ possède la densité $f(x,y) = (2\pi)^{-1}\exp(-(x^2+y^2)/2)$.

Exercice 7. Soit (X,Y) un couple de densité $(2\pi)^{-1}\exp(-(x^2+y^2)/2)$. On pose $(U,V) = (X/Y, Y)$.
1) Montrer que pour toute fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne positive, on a

$$\mathbb{E}\left(h(U,V)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} h(x/y,y)\exp\left(-(x^2+y^2)/2\right)dxdy.$$

2) Déterminer la densité du couple (U,V), puis celle de la variable U. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 (Effet d'une sélection)**.** On choisit au hasard un point X dans l'intervalle $[0,1]$ (selon une loi uniforme). L'intervalle privé de ce point est la réunion de deux intervalles successifs I_1 et I_2 dont on note ℓ_1 et ℓ_2 les longueurs respectives.
1) Donner les lois de ℓ_1 et ℓ_2 ainsi que leur espérance.
2) On fixe un point $a \in]0,1/2[$ et on note I celui des deux intervalles I_1 ou I_2 qui contient a. Démontrer que la longueur ℓ de cet intervalle a pour fonction de répartition

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ t-a & \text{si } a \leq t < 1-a \\ 2t-1 & \text{si } 1-a \leq t \end{cases}$$

Déterminer la densité de ℓ puis montrer que $\mathbb{E}(\ell) = 1/2 + a(1-a)$.