Université d'Angers — Année universitaire 2018-2019
L3 Math & Math appli.

Travaux dirigés de Probabilités

Feuille 3

Variables aléatoires à valeurs entières

1. Loi géométrique

Dans toute cette partie, on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1]$ (et $q = 1-p$). On appellera *instants* les indices n.

Exercice 1. On note T l'instant de premier succès, c'est-à-dire la v.a. définie par

$$T = \inf\{n \geq 1 | X_n = 1\}.$$

1) Montrer que $\mathbb{P}(T = n) = pq^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On dit que T suit une *loi géométrique* $\mathcal{G}(p)$. Établir que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Pourquoi a-t-on exclu le cas $p = 0$?
2) Calculer $\mathbb{P}(T > n)$ et montrer que $P(T > n + k | T > k) = \mathbb{P}(T > n)$. (On dit que la loi géométrique est sans mémoire.)
3) Montrer que $\mathbb{E}(T) = 1/p$ et $\mathbb{V}(T) = q/p^2$. Chaque semaine, j'ai une chance sur 2 millions de gagner au loto ; combien de temps va passer avant que je ne gagne ?

Exercice 2. Soient T_1 et T_2 deux v.a. indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. On pose $M = \min(T_1, T_2)$. Calculer $\mathbb{P}(M > n)$, en déduire $\mathbb{P}(M = n)$. Quelle loi suit la variable M ? Expliquer ce résultat en interprétant T_1 et T_2 comme dans l'Exercice 1.

Exercice 3. Soient T_1 et T_2 deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $S = T_1 + T_2$. Montrer que, sachant $S = n + 1$, la loi de T_1 est uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 4. Pour tout $r \geq 1$, on note T_r l'instant du r-ème succès ($T_r = +\infty$ si un tel instant n'existe pas).
1) Montrer[1] que la loi de T_r est donnée par

$$\mathbb{P}(T_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}, \quad k = r, r+1, \ldots$$

La loi de T_r s'appelle *loi de Pascal* $\mathcal{P}(r, p)$.
2) Montrer que pour toute suite d'entiers $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_r$, on a

$$\mathbb{P}(T_1 = n_1, T_2 = n_2, \ldots, T_r = n_r) = p^r q^{n_r - r}.$$

3) On pose $U_1 = T_1$ et, pour tout $r \geq 2$, $U_r = T_r - T_{r-1}$ ($U_r = +\infty$ si T_r n'est pas fini). Démontrer que les variables $U_1, U_2, \ldots, U_r$ sont indépendantes, de même loi $\mathcal{G}(p)$. En déduire que $\mathbb{P}(T_r < \infty) = 1$, $\mathbb{E}(T_r) = r/p$, $\mathbb{V}(T_r) = rq/p^2$.

---

1. On pourra utiliser le résultat suivant : si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p, Z_1, Z_2, \ldots, Z_q$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors $f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ et $g(Z_1, Z_2, \ldots, Z_q)$ sont des variables indépendantes pour toutes fonctions mesurables f, g.

2. Loi de Poisson

Exercice 5. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, si pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

1) Montrer que pour une telle variable on a $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.
2) Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

a) Montrer que leur somme $N = X + Y$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

b) Montrer que, sachant $N = n$, la variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ (dont on précisera le paramètre), c'est-à-dire que pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(X = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Exercice 6. (Poissonisation de la loi multinomiale.) On effectue n tirages indépendants dans un ensemble de r objets notés $1, 2, \ldots, r$. On suppose que la probabilité p_i de tirer l'objet i ne varie pas lors des différents tirages. On note N_i le nombre de fois où l'on a tiré l'objet i.
1) Montrer que pour tout r-uplet $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ d'entiers ≥ 0 tel que $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, on a

$$\mathbb{P}(N_1 = k_1, N_2 = k_2, \ldots, N_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}.$$

2) Quelle est la loi de N_1 ? Les variables $N_1, N_2, \ldots, N_r$ sont-elles indépendantes ?
3) Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ des v.a. indépendantes suivant des lois de Poisson et N leur somme. Trouver un choix de paramètres pour ces lois de Poisson tel que, pour tout r-uplet $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ d'entiers ≥ 0 vérifiant $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, la probabilité

$$\mathbb{P}(Y_1 = k_1, Y_2 = k_2, \ldots, Y_r = k_r | N = n)$$

soit donnée par la même formule qu'à la question 1.

3. Outillage : fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. La fonction génératrice de (la loi de) X est la fonction $\phi_X(z)$ égale à la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$, partout où cette série converge.

A) Un peu de théorie (démontrer les assertions suivantes)

1) Montrer que ϕ_X est au moins définie à l'intérieur du disque unité de $\mathbb{C}$ et en $z = 1$.

2) Si ϕ_X et ϕ_Y sont égales au voisinage de 0, alors X et Y ont la même loi.

3) Si X et Y sont indépendantes, alors $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$ (au moins à l'intérieur du disque unité).

4) On se restreint maintenant à une variable réelle t. On a

$$\lim_{t\to 1^-} \phi'_X(t) = \mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1^-} \phi''_X(t) = \mathbb{E}(X(X-1)).$$

(que les espérances en question soient finies ou non.)

B) Applications

1) Calculer la fonction génératrice lorsque X suit une loi : de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

2) Retrouver l'espérance et la variance d'une variable de loi géométrique et d'une variable de loi de Poisson à l'aide de la fonction génératrice.

3) Montrer qu'une somme de variables indépendantes de loi binomiale de même paramètre p suit une loi binomiale. Montrer qu'une somme de variables indépendantes de loi de Poisson suit une loi de Poisson.

4) Une urne contient quatre boules numérotées 0, 1, 1, 2. On effectue n tirages avec remise. Donner la loi de la somme S des nombres tirés.

5) Montrer qu'il n'est pas possible de truquer un dé de sorte que toutes les sommes des résultats de deux lancers successifs soient équiprobables.