Université d'Angers — Année universitaire 2018-2019

L3 Math & Math appli.

Travaux dirigés de Probabilités

Feuille 2

Espaces probabilisés finis 2

Variables aléatoires

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de X, X^2 et $\sin(\theta X)$ où θ est un nombre réel.

Exercice 2. On joue n fois à pile ou face avec une pièce truquée dont la probabilité de tomber sur pile est $p \in]0,1[$. On gagne $n/(k+1)$ euros si l'on obtient k piles exactement. Calculer l'espérance du gain.

Exercice 3. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 4. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des parties d'un ensemble fini Ω de cardinal n. On suppose que chaque A_i possède au moins k éléments. Montrer qu'il existe un élément $\omega \in \Omega$ qui appartient à au moins km/n des ensembles A_i. (On pourra munir Ω de la probabilité uniforme et s'intéresser à l'espérance de la variable aléatoire $X = 1_{A_1} + 1_{A_2} + \cdots + 1_{A_n}$.)

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires.
1) Montrer que le minimum de la fonction $c \mapsto \mathbb{E}((Y-c)^2)$ est atteint pour $c = \mathbb{E}(Y)$.
2) Déterminer les valeurs a^* et b^* de a et b qui minimisent la quantité $\mathbb{E}((Y - aX - b)^2)$. La droite d'équation $y = a^*x + b^*$ est appelée droite de régression linéaire de Y par rapport à X. (Indication : on pourra d'abord minimiser en b pour chaque a fixé.)

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Démontrer que la loi de leur somme S est donnée par

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{n - |n+1-k|}{n^2}, \quad k = 2, \ldots, 2n.$$

Exercice 7. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même espérance m et de même variance σ^2. On considère les variables aléatoires

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad Z = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2.$$

Calculer $\mathbb{E}(\overline{X})$, $\mathbb{V}(\overline{X})$. Montrer que $\mathbb{V}(X_i - \overline{X}) = \sigma^2(1 - \frac{1}{n})$ puis calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 8. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires prenant les valeurs $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(0,-1)$ avec équiprobabilité. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 9 (Convergence Binomiale vers Poisson)**.** 1) On suppose que $np_n \to \lambda > 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que pour tout $k \geq 0$ fixé, on a

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

2) *Application.* Durant un intervalle de temps $[0,T]$, un nombre aléatoire N de clients entrent un magasin. On sait que $\mathbb{E}(N) = \lambda > 0$ et l'on suppose que les clients arrivent de manière "homogène" dans le temps. On se propose de modéliser (la loi de) N de la façon suivante :
a) Un entier n étant fixé, on découpe l'intervalle $[0,T]$ en n intervalles de même longueur T/n et l'on suppose que
- dans chacun de ces intervalles arrive 1 ou 0 client ;
- les variables X_k, $k = 1,\ldots,n$, donnant le nombre d'arrivées durant le k-ème intervalle de temps sont indépendantes.

Quelle est la loi de N ?
b) On fait maintenant tendre n vers l'infini de façon à obtenir un modèle de plus en plus fin. Pour k fixé, quelle expression pour $\mathbb{P}(N = k)$ vous invite à choisir le passage à la limite ?

Exercice 10 (Théorème de Weierstrass)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit M un majorant de $|f|$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0,1]$, on se donne une variable aléatoire B_n^x de loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$ et l'on pose $S_n^x = B_n^x/n$.
1) Donner une expression de $P_n(x) = \mathbb{E}\left(f\left(S_n^x\right)\right)$ qui montre qu'il s'agit d'une fonction polynôme de degré $\leq n$.
2) Soit $\delta > 0$. En majorant convenablement la variable à l'intérieur de l'espérance, démontrer que

$$\mathbb{E}\left(|f(S_n^x) - f(x)| 1_{\{|S_n^x - x| > \delta\}}\right) \leq 2M\mathbb{P}(|S_n^x - x| > \delta).$$

3) L'oscillation de f d'ordre $\delta > 0$ est le nombre $\chi(\delta)$ défini par :

$$\chi(\delta) = \sup\{|f(a) - f(b)| : (a,b) \in [0,1]^2, |a-b| \leq \delta\}.$$

3.a) Établir que, pour tout $\delta > 0$, on a la majoration suivante :

$$\mathbb{E}\left(|f(S_n^x) - f(x)| 1_{\{|S_n^x - x| \leq \delta\}}\right) \leq \chi(\delta).$$

3.b) Démontrer que $\lim_{\delta\to 0} \chi(\delta) = 0$.
4) Calculer l'espérance et la variance de S_n^x.
5) Établir que pour tout $\delta > 0$, tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0,1]$, on a

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}(|f(S_n^x) - f(x)|) \leq \frac{2Mx(1-x)}{\delta^2 n} + \chi(\delta).$$

On pensera à utiliser l'inégalité de Tchebychev.
6) Démontrer que la suite de polynômes $(P_n)_n$ converge uniformément vers f.