Université d'Angers | Année universitaire 2018-2019
L3 Math & Math appli.

Travaux dirigés de Probabilités
Feuille 1
Espaces probabilisés finis 1
Modélisations sans variable aléatoire

1. Modélisation à l'aide d'un univers explicite

Exercice 1. On lance quatre fois de suite un dé équilibré. Choisissez un modèle pour cette expérience puis calculer la probabilité d'obtenir : (a) quatre fois le même chiffre ; (b) trois fois un même chiffre et un autre différent ; (c) deux paires ; (d) une paire simple ; (e) quatre chiffres distincts.

Exercice 2. On tire sans remise 4 cartes dans un jeu standard de 32 cartes. Calculer la probabilité d'avoir en main : (a) au moins un as ou au moins un trèfle ; (b) au moins trois rois ou au moins un as ; (c) quatre cartes dont toutes les couleurs et toutes les valeurs sont différentes.

Exercice 3. On lance simultanément deux pièces équilibrées et indiscernables, et on note FF, PP et PF les trois issues possibles. Quelle probabilité devrait-on mettre sur l'univers constitué de ces trois issues ?

Exercice 4. On lance deux dés. Pour $k = 2, \dots, 12$, calculer la probabilité que la somme fasse k. Même question avec trois dés.

Exercice 5. Une urne contient B boules blanches et R boules rouges. On extrait successivement avec remise et au hasard n boules de l'urne. Pour k compris entre 0 et n. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement k boules blanches ?

Exercice 6. Une urne contient B boules blanches et R boules rouges. On extrait simultanément (donc sans remise) et au hasard $n \leq \min(B, R)$ boules de l'urne. Pour k compris entre 0 et n, quelle est la probabilité d'obtenir exactement k boules blanches ? Pour k et n fixés, on fait tendre $N = B + R$ vers $+\infty$ de telle sorte que B/N tende vers une proportion limite $p \in]0, 1[$; que devient la probabilité précédente ? Interprétez.

Exercice 7. Donner la probabilité pour que, dans une assemblée de n personnes, deux au moins aient la même date d'anniversaire. Faire le calcul numérique lorsque $n = 23$.

Exercice 8. La loterie nationale émet N tickets dont n sont gagnants. Un joueur en achète n. Montrer que la probabilité pour que ce joueur ait au moins un ticket gagnant vaut

$$1 - \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(1 - \frac{n}{N-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{N-n+1}\right).$$

(On supposera que $2n \leq N$; pourquoi ?)

2. Probabilité conditionnelle

Exercice 9. On dispose d'un jeu de 32 cartes. Je tire 4 cartes et mon adversaire en tire 4 lui aussi.
1) Quelle est la probabilité que mon jeu comporte exactement 3 rois ?
2) Je vais tirer une nouvelle carte parmi celles restantes. Sachant que j'ai 3 rois dans mon jeu, quelle est la probabilité que j'obtienne le quatrième roi ?
3) Avant que je tire cette nouvelle carte, mon adversaire m'apprend qu'il n'a pas de roi dans son jeu. Qu'elle est la probabilité que j'obtienne le quatrième roi ?

Exercice 10. Deux usines A et B produisent le même type de pièces automobiles. 70% des pièces provenant de l'usine A sont sans défaut, tandis que 90% des pièces provenant de l'usine B sont sans défaut. On suppose que l'usine A produit 40% des pièces consommées et que B produit le reste.
1) Quelle est la probabilité qu'une pièce tirée au hasard soit sans défaut ?
2) Sachant qu'une pièce est sans défaut, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine A ?

Exercice 11. On lance n fois de suite une pièce équilibrée. Sachant qu'on a obtenu k piles exactement, quelle est la probabilité que le premier lancer ait donné un pile ?

Exercice 12. Loi de succession de Laplace.
1) Une urne contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches ($0 \leq k \leq N$). On tire successivement et avec remise $\ell \geq 1$ boules dans cette urne. Calculer la probabilité de ne tirer que des boules rouges.
2) On dispose de N urnes numérotées de 1 à N. L'urne numéro k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches. Un entier $n \geq 1$ étant fixé, on choisit au hasard (de façon équiprobable) une urne dans laquelle on tire successivement et avec remise n boules.
a) Pour $k = 1 \dots N$, on note U_k l'événement « l'urne choisie est la numéro k » ; pour $\ell = 1 \dots n$, on note R_ℓ l'événement « les ℓ premières boules tirées sont toutes rouges ». En vous appuyant sur la première question, déterminez $\mathbb{P}(R_\ell|U_k)$.
b) Justifier la formule suivante :

$$\mathbb{P}(R_\ell) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^\ell,$$

puis montrer que la limite de cette quantité lorsque N tend vers $+\infty$ est $1/(\ell+1)$. *(On pourra penser aux sommes de Riemann.)*
c) On s'intéresse à la probabilité pour que la n-ème boule tirée soit rouge sachant que les $n-1$ premières boules tirées étaient toutes rouges. Comment s'écrit cette probabilité avec les notations de l'énoncé ? Déterminer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.