Licence à distance.

Laurent Evain

Cours de Topologie

Chapitre 1

L'ensemble $\mathbb{R}$

La topologie est l'étude des espaces topologiques. La définition générale d'espace topologique ne sera donnée que plus tard dans ce cours. En première approximation, un bon exemple d'espace topologique est un espace pour lequel on peut mesurer la distance entre les points. Par exemple, l'espace $\mathbb{R}^3$ dans lequel nous vivons muni de la distance euclidienne est un espace topologique.

Une fois que l'on dispose d'une distance, on peut parler de suites convergentes et de fonctions continues. La topologie traite aussi de ces notions, et plus généralement de toutes les notions que l'on peut définir à l'aide d'une distance.

L'exemple le plus fondamental d'espace topologique est l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, où la distance entre deux points x et y est $d(x, y) = |x-y|$. Ce chapître introduit l'ensemble $\mathbb{R}$.

1.1 Construction

Nous connaissons depuis le collège les fractions et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationels : $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers$\}$. Cet ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas suffisant pour les mathématiques que nous souhaitons faire. L'exercice suivant montre par exemple qu'il y a des nombres dont nous avons besoin pour faire des calculs et qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers a, b tels que $x = \frac{a}{b}$ vérifie $x^2 = 2$. En d'autres termes, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (Indication: traduire le problème en termes de nombres entiers et considérer la puissance de 2 dans le développement en nombres premiers).

Correction 1. Supposons qu'il existe deux entiers a, b tels que $x = \frac{a}{b}$ verifie $x^2 = 2$. Ecrivons $a = 2^k r$ où r est impair et de même $b = 2^l s$. Soit l'entier $n := a^2 = 2b^2$.Alors l'exposant de de 2 dans la décomposition en nombres premiers de n est $2k$ car $n = a^2$, et $2l + 1$ car $n = 2b^2$. C'est impossible car $2k$ est pair et $2l + 1$ impair.

Pour disposer de tous les nombres dont nous avons besoin pour nos calculs, on construit classiquement un ensemble $\mathbb{R}$ plus grand que $\mathbb{Q}$ Rappelons rapidement la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

Définition 1. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ est dite de Cauchy si $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \epsilon$.*

Pour chaque suite de Cauchy x_n, on introduit un symbole $L(x_n)$. Lorsque l'on a deux suites x_n et y_n de Cauchy, on pose $L(x_n) = L(y_n)$ si $x_n - y_n$ est une suite qui tend vers 0. De façon intuitive, l'ensemble des symbôles $L(x_n)$ ainsi construit est donc l'ensemble des limites possibles de suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$.

Exercice 2. Soit $L \in \mathbb{R}$ un réel. Montrer qu'il y a une infinité de suites de Cauchy x_n telles que $L = L(x_n)$.

Correction 2. Par construction de $\mathbb{R}$, il existe au moins une suite x_n telle que $L = L(x_n)$. Soit k un entier et considérons la suite $S_n(k) := (x_n + \frac{k}{n})$. La difference entre les suites x_n et $S_n(k)$ est la suite $\frac{k}{n}$ qui tend vers 0, donc $L(x_n) = L(S_n(k)) = L$. Pour chaque entier k, on a une nouvelle suite $S(k)$ définissant L, ce qui donne l'infinité de suites associées à L.

Définition 2. *L'ensemble des symboles $L(x_n)$ ainsi construit soumis à la relation d'équivalence $L(x_n) = L(y_n)$ si $x_n - y_n$ est une suite qui tend vers 0 est par définition l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.*

Remarque 3. *Si $x \in \mathbb{Q}$ est un nombre rationel, on peut considérer la suite constante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = x$ pour tout n. Cette suite constante est évidemment de Cauchy et définit donc un symbole $L(x_n)$. On note également $x = L(x_n)$ le réel associée à la suite constante valant x. En d'autres termes, pour chaque rationel x il y a un nombre réel x qui lui correspond. Cette remarque permet de voir l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationels comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

Soient x et y deux réels. On choisit deux suites x_n et y_n telles que $x = L(x_n)$ et $y = L(y_n)$. On peut faire les operations usuelles sur les réels qu'on faisait sur les rationels à l'aide des définitions suivantes.

Définition 4. *Les opérations usuelles sont définies sur les réels par les formules* $x+y = L(x_n+y_n)$, $x-y = L(x_n-y_n)$, $xy = L(x_n y_n)$, $|x| = L(|x_n|)$.

D'après l'exercice 2, il y a une infinité de choix pour les suites x_n et y_n. A priori, le résultat des opérations de la définition peut dépendre du choix d x_n et y_n. Ce n'est en fait pas le cas. L'exercice suivant montre que l'addition de 2 réels et les autres opérations courantes sont bien définies indépendamment des choix faits lors du calcul.

Exercice 3. Vérifier que si $x, y \in \mathbb{R}$, si x_n, x'_n, y_n, y'_n sont des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ telles que $x = L(x_n) = L(x'_n)$ et $y = L(y_n) = L(y'_n)$, alors $L(x_n + y_n) = L(x'_n + y'_n)$, $L(x_n - y_n) = L(x'_n - y'_n)$, $L(x_n y_n) = L(x'_n y'_n)$, $L(|x_n|) = L(|x'_n|)$.

Correction 3. La difference entre les suites $(x_n + y_n)$ et $(x'_n + y'_n)$ vaut $(x'_n - x_n) + (y'_n - y_n)$ qui tend vers 0 car chacun des 2 termes tend vers 0, ce qui montre que $L(x_n + y_n) = L(x'_n + y'_n)$.

La difference entre les suites $(x_n y_n)$ et $(x'_n y'_n)$ vaut $x_n(y_n - y'_n) + (x_n - x'_n)y'_n$. Chacun des 2 suites de l'addition tend vers 0 comme produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0. En particulier la somme tend vers 0 et $L(x_n y_n) = L(x'_n y'_n)$. Les deux autres égalités se démontrent de façon similaire.

Définition 5. *On ordonne l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des réels en posant* $x < y$ *si* $x \neq y$, $x = L(x_n)$, $y = L(y_n)$ *et* $x_n < y_n$ *pour* n *grand.*

On vérifie évidemment comme précédemment que c'est indépendant du choix des suites x_n et y_n.

Puisqu'on sait maintenant faire la différence de 2 réels, prendre une valeur absolue et comparer deux réels, on peut parler de suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la définition suivante:

Définition 6. *Une suite* x_n *de réels est dite de Cauchy si* $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N, |x_m - x_n| < \epsilon$.

1.2 Complétude de $\mathbb{R}$

En partant des rationels, on a construit toutes les limites possibles de suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ et on a obtenu un ensemble plus gros : l'ensemble $\mathbb{R}$. On peut maintenant essayer de recommencer le processus en partant des nombres réels et essayer de construire un ensemble plus gros que $\mathbb{R}$. Il suffit à priori d'ajouter à $\mathbb{R}$ tous les nombres obtenus par passage à la limite de suites de réels. En fait, on n'obtient pas d'avantage de nombres. Alors qu'une limite de rationels peut etre réelle non rationnelle une limite de nombre réels est forcément un réel. On ne construit donc aucun nombre nouveau en prenant les limites de suites de réel. C'est essentiellement, ce que dit le théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 7. *Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est convergente dans $\mathbb{R}$: Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombre réels, alors il existe un réel x tel que $x = lim(x_n)$.*

Définition 8. *On dit que $\mathbb{R}$ est un ensemble complet pour signifier que toute suite de Cauchy de réels est convergente dans $\mathbb{R}$.*

1.3 Conséquences de la complétude de $\mathbb{R}$

Le fait que $\mathbb{R}$ soit complet a des conséquences importantes que nous détaillons dans cette section.

Définition 9. *On dit que deux suites de réels x_n et y_n sont adjacentes si $x_n < y_n$ pour tout n, x_n est une suite croissante, y_n une suite décroissante, et si $x_n - y_n$ tend vers 0.*

Théorème 10. *Si x_n et y_n sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes de même limite : $\lim(x_n) = \lim(y_n)$. En outre toute suite z_n vérifiant $x_n \leq z_n \leq y_n$ pour $n >> 0$ est également convergente de même limite.*

Démonstration Soit $n > m$ deux entiers. Puisque x_n et y_n sont croissante et décroissante, $|x_n - x_m| = x_n - x_m < y_n - x_m < y_m - x_m$ et $y_m - x_m < \epsilon$ pour m plus grand qu'un nombre $N(\epsilon)$. Donc $|x_n - x_m| < \epsilon$ si $n > m > N(\epsilon)$, ce qui montre qui x_n est de Cauchy et convergente vers un réel x. La suite $y_n = x_n + (y_n - x_n)$ tend également vers x comme somme d'une suite tendant vers x et d'une suite tendant vers 0. La suite $z_n - x_n$ verifie $0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$ tend vers 0. Donc $z_n = x_n + (z_n - x_n)$ tend vers x.

Définition 11. *Soit $L \subset \mathbb{R}$ un ensemble. Une borne supérieure de L est un élément $m \in \mathbb{R}$ tel que*

- *m majore L: $\forall l \in L, l \leq m$.*
- *m est le plus petit des majorants: si M majore L, alors $m \leq M$.*

Théorème 12. *Tout sous-ensemble $L \subset \mathbb{R}$ majoré admet une borne supérieure notée $sup(L)$.*

Démonstration Soit $x_0 \in L$ et $y_0 > x_0$ un majorant de L. Posons $z_0 = \frac{x_0+y_0}{2}$. Si z_0 est un majorant de L, on pose $x_1 = x_0$, $y_1 = z_0$. Sinon, il existe un élement l de L supérieur à z_0 et on pose $x_1 = l$, $y_1 = y_0$. Dans tous les cas, on a $0 \leq y_1 - x_1 \leq \frac{y_0-x_0}{2}$ et y_1 est un majorant de L. On répète le processus et on construit ainsi deux suites x_n et y_n, vérifiant $0 \leq y_n - x_n \leq \frac{y_{n-1}-x_{n-1}}{2}$. En particulier, $y_n - x_n \leq \frac{y_0-x_0}{2^n}$. Les suites x_n et y_n sont donc adjacentes et convergent vers une même limite m.

Vérifions que m est une borne supérieure.

Tout d'abord m majore L. Sinon, il existe $l \in L$ vérifiant $m < l$. Puisque y_n tend vers m par valeurs supérieures, on a pour n grand l'inégalité $m \leq y_n < l$. Contradiction car pour tout n, y_n est un majorant de L.

Montrons maintenant que m est le plus petit majorant de L. Si $M < m$, alors pour n grand, $M < x_n \leq m$ car x_n tend vers m par valeurs inférieures. En particulier M vérifie $M < x_n$ et n'est pas un majorant de L.

Définition 13. *Si E n'est pas majoré, on pose par convention $sup(E) = +\infty$.*

Exercice 4.
a)Proposer une définition analogue pour la borne inférieure d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$.
b)Donner l'enoncé correspondant au théorème 12

Correction 4.
a)Une borne inférieure d'un ensemble E est un réel m tel que:

- m minore E : $\forall e \in E, m \geq e$.
- m est le plus grand minorant de E: si M minore E, $m \geq M$.

Notation 14. *La borne inférieure d'un ensemble minoré E est notée $inf(E)$. Si E n'est pas minoré, on pose par convention $inf(E) = -\infty$.*

Nous avons vu que le nombre $\sqrt{2}$ n'existait pas dans $\mathbb{Q}$. Nous allons montrer qu'il existe dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'on peut trouver un réel x dont le carré vaut $x^2 = 2$. L'idee est la suivante. Je cherche la racine carrée à tatons en testant les carrées. Par exemple, $1^2 = 1 < 2 < 2^2$. Donc si $\sqrt{2}$ existe, ce nombre est compris entre 1 et 2. Je recommence avec des nombres ayant un chiffre après la virgule: $1.4^2 < 2 < 1.5^2$. Je construis ainsi deux suites $x_1 = 1$, $x_2 = 1.4$, $x_3 = 1.41....$ et $y_1 = 2$, $y_2 = 1.5$, $y_3 = 1.415...$ qui vont converger vers le nombre $\sqrt{2}$ que je veux construire.

L'exercice suivant formalise la construction.

Exercice 5.
a) Soit $x_i = \frac{n_i}{10^{i-1}}$ et $y_i = \frac{m_i}{10^{i-1}}$ les rationels definis par $x_i^2 < 2$ et $n_i \in \mathbb{N}$ maximal pour cette propriété, $y_i^2 > 2$ et $m_i \in NN$ minimal pour cette propriété. Montrer que $m_i = n_i + 1$.
b) Montrer que les suites x_i et y_i sont adjacentes.
c) En déduire qu'il existe un réel x tel $x^2 = 2$.

Correction 5.
a) Supposons $m_i > n_i + 1$. Posons $z = \frac{n_i+1}{10^{i-1}}$. Puisque $\sqrt{2}$ n'est pas rationel, on a $z^2 \neq 2$. Si $z^2 > 2$, alors $n_i + 1$ contredit la minimialité de m_i. Si $z^2 < 2$, alors $n_i + 1$ contredit la maximialité de n_i.
b) Puisque $x_i = \frac{10n_i}{10^i}$ vérifie $x_i^2 < 2$, on a par maximalité de n_{i+1} l'inégalité $10n_i \leq n_{i+1}$, donc $x_i \leq x_{i+1}$. La suite x_i est donc croissante. De même, la suite y_i est décroissante. Comme $y_i - x_i = \frac{m_i - n_1}{10^{i-1}} = \frac{1}{10^{i-1}}$ tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini, les suites y_i et x_i sont bien adjacentes.
c) Soit x la limite commune des suites y_i et x_i. Comme $x_i^2 < 2$, on a a la limite l'inégalité (large !) $\lim x_i^2 = x^2 \leq 2$. De même, $y_i^2 > 2$ donne à la limite $x^2 \geq 2$.

1.4 Les sous-ensembles connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Définition 15. *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit connexe par arcs si $\forall x, y \in E, \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \Rightarrow z \in E$.*

En d'autres termes, E est connexe par arcs s'il n'y a pas de "trous" entre ses éléments.

Théorème 16. *Si $E \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs, alors E est un intervalle de la forme $[a, b], [a, b[,]a, b]$, $]a, b[, [a, +\infty[,]a, +\infty[,] - \infty, b[,] - \infty, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.*

La démonstration de ce théorème est longue et fastidieuse avec de nombreux sous-cas identiques et répétitifs. On ne démontrera que quelques sous-cas pour comprendre les idées. Par exemple, démontrons le cas particulier suivant:

Proposition 17. *Si $E \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs, minoré, non majoré, et si $inf(E) \notin E$, alors E est de la forme $]a, +\infty[$.*

Démonstration Puisque E est minoré, il existe une borne inférieure de E que l'on note a. Tous les élements de E valent au moins a, donc $E \subset [a, +\infty[$. Par hypothèse, $a \notin E$, donc $E \subset]a, +\infty[$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in]a, +\infty[$. Puisque E est non majoré, il existe $e > x$, $e \in E$. Puisque $x > a$ et que a est le plus grand minorant de E, x n'est pas minorant de E. Il existe donc $f \in E$, $f < x$. En résumé, $f < x < e$, $e, f \in E$, donc $x \in E$ par connexité par arcs.

En vous inspirant de la démonstration précedente et en la modifiant, faire l'exercice suivant.

Exercice 6. Si $E \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs, minoré, non majoré, et si $inf(E) \in E$, alors E est de la forme $[a, +\infty[$.

Correction 6. Puisque E est minoré, il existe une borne inférieure de E que l'on note a. Tous les élements de E valent au moins a, donc $E \subset [a, +\infty[$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in [a, +\infty[$. Si $x = a$, $x = inf(E) \in E$ par hypothèse. Supposons maintenant $x > a$. Puisque E est non majoré, il existe $e > x$, $e \in E$. En résumé, $a < x < e$, $a, e \in E$, donc $x \in E$ par connexité par arcs.

1.5 La frontière d'un sous-ensemble

La frontière de E est formé des points qui sont arbitrairement proches de E et de son complémentaire. Formellement, la définition est la suivante:

Définition 18. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. Un point $x \in \mathbb{R}$ est dans la frontière de E si $\forall \epsilon > 0, \exists e \in E, \exists f \notin E, |x - e| < \epsilon, |x - f| < \epsilon$. On notera ∂E la frontiere de E.*

Remarquons que la définition est symétrique entre l'ensemble E et son complémentaire $E^c = \mathbb{R} \setminus E$. En particulier, on a la proposition suivante:

Proposition 19. $\partial E = \partial E^c$.

Exercice 7.
a)Montrer que la frontiere de l'intervalle $[a, b]$ est l'ensemble a, b.
b)Montrer que la frontiere de l'intervalle $]a, b]$ est l'ensemble a, b.
c)Quelle est la frontiere de l'intervalle $]a, +\infty[$?

Correction 7.
a)Soit $\epsilon > 0$, $x = a + \epsilon/2$, $y = a - \epsilon/2$. On a $x \in E$, $y \notin E$, et $|x - a| < \epsilon$, $|y - a| < \epsilon$, ce qui montre que a est dans la frontière de E. Le même raisonnement montre que $b \in \partial E$.

Si $x < a$, posons $\epsilon = \frac{a-x}{2}$. Tous les élements z de E vérifient $|z - x| > \epsilon$, donc x n'est pas arbitrairement proche de E et $x \notin \partial E$.

Le même raisonnement montre que si $x > b$, $x \notin \partial E$.

Enfin si $x \in]a, b[$, posons $\epsilon = min(\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2})$. Tous les élements z de $\mathbb{R} \setminus E$ vérifient $|z - x| > \epsilon$, donc x n'est pas arbitrairement proche du complémentaire de E et $x \notin \partial E$.

En résumé $x \in \partial E \Leftrightarrow x = a \ ou \ x = b$.

b)La même démonstration mot pour mot que la question précédente montre que $x \in \partial E \Leftrightarrow x = a \ ou \ x = b$.

c)La frontiere de l'intervalle $]a, +\infty[$ est l'ensemble a.

1.6 Ouvert, fermé et voisinage

Pour étudier les fonctions réelles, il nous faut introduire des notions plus fines que celle d'intervalles ouvert, fermé, semi-ouvert.

Définition 20. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $x \in E$. On dit que $V \subset E$ est un voisinage de x si V contient un segment $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.*

Proposition 21. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- *E est une réunion d'intervalles ouverts*
- *E est voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration Si $E = \cup]a_i, b_i[$ est réunion d'intervalles ouverts. Soit $x \in E$. Alors il existe i tel que $x \in]a_i, b_i[$. En posant, $\epsilon = min(\frac{x-a_i}{2}, \frac{b_i-x}{2})$, l'intervalle $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ est inclus dans $]a_i, b_i[$ donc dans E, ce qui montre que E est bien un voisinage du point x.

Réciproquement, supposons que E soit voisinage de chacun de ses points. Pour chaque point x, choisissons ϵ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset E$. Alors $\cup_{x \in E}]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset E$. L'inclusion réciproque $\cup_{x \in E}]x - \epsilon, x + \epsilon[\supset E$ est évidente car tous les points x de E sont dans le terme de gauche. L'égalité $\cup_{x \in E}]x - \epsilon, x + \epsilon[= E$ montre que E est bien une réunion d'intervalles ouverts.

Définition 22. *Un ensemble qui vérifie les conditions précédentes est appelé un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Par convention, l'ensemble vide est un ouvert (il s'écrit comme réunion de 0 intervalle ouvert).

Proposition 23. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *le complémentaire de E est ouvert*
- *E contient sa propre frontière: $x \in \partial E \Rightarrow x \in E$.*

Démonstration Supposons le complémentaire O de E ouvert. Alors O est réunion d'intervalles ouverts $]a_i, b_i[$. Soit $x \in O$, alors il existe i tel que $x \in]a_i, b_i[$. Posons $\epsilon = min(\frac{x-a_i}{2}, \frac{b_i-x}{2})$. Il n'y a pas de z dans le complémentaire de O tel que $|x-z| < \epsilon$. Donc $x \notin \partial O$ et $O \subset (\partial O)^c$, ou encore par complémentarité $E \supset \partial O = \partial E$.

Supposons réciproquement que $\partial E \subset E$. Alors $O = E^c \subset (\partial E)^c$. Montrons alors que O est bien un ouvert. Soit $x \in O$. Puisque $x \notin \partial E$, il existe un $\epsilon > 0$ pour lequel l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

- il n'existe pas de $z \in E$, $|z-x| < \epsilon$.
- il n'existe pas de $z \in O$, $|z-x| < \epsilon$.

La deuxième condition est évidemment fausse avec $z = x$. Donc tous les $z \in E$ sont à distance au moins ϵ de x. Il s'ensuit que $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset O$ et par suite O est bien voisinage de chacun de ses points x, donc ouvert.

Définition 24. *On appelle fermé de $\mathbb{R}$ un sous-ensemble qui vérifie les conditions précédentes.*

Exercice 8.
a)Vérifier qu'un intervalle ouvert est un ouvert
b)Vérifier qu'un intervalle fermé est fermé.
c)Donner un ensembe ni ouvert ni fermé.

Correction 8.
a)Evident : un intervalle ouvert est réunion de un intervalle ouvert, à savoir lui-même.
b)Le complémentaire d'un intervalle fermé F est la réunion de deux intervalle ouverts (quand F est borné), un intervalle ouvert (quand F est non borné et différent de $\mathbb{R}$), ou vide. Dans tous les cas, F est fermé comme complémentaire d'un ouvert.
c)L'intervalle $I = [0, 1[$ n'est pas fermé car il ne contient pas sa frontiere $\{0, 1\}$. Son complémentaire $I^c =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ n'est pas fermé non plus car I^c ne contient pas non plus la frontiere. Si I^c n'est pas fermé, I n'est pas ouvert.

Théorème 25. *[Bolzano-Weierstrass] Si $E \subset \mathbb{R}$ est un ensemble fermé borné, alors pour toute suite $x_n \in E$, on peut extraire une suite $x_{\varphi(n)}$ qui converge vers un point $x \in E$.*

Démonstration Puisque E est borné, il admet une borne supérieure et inférieure. Soit $a_0 = inf(E), b_0 = sup(E)$. Posons $\varphi(0) = 0$. Soit $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. La suite $x_1, \ldots, x_n...$ a ses termes dans $[a_0, b_0] = [a_0, m_0] \cup [m_0, b_0]$.

L'un de ces deux intervalles contient une infinité de termes de la suite. Si c'est le premier on pose $a_1 = a_0, b_1 = m_0$ sinon on pose $a_1 = m_0, b_1 = b_0$. On choisit $\varphi(1) > \varphi(0) = 0$ de sorte que $x_{\varphi(1)}$ soit dans $[a_1, b_1]$.

Supposons par récurrence qu'on ait construit des intervalles $[a_i, b_i]$, $i \leq k-1$ tels que $[a_i, b_i]$ contient une infinité de termes de la suite et que l'on ait définit une suite croissante $\varphi(0), \ldots, phi(k-1)$ tel que pour tout $i \leq k-1$, $x_{\varphi(i)} \in [a_i, b_i]$. Soit $m_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$. La suite $x_1, \ldots, x_n$... a une infinité de termes dans dans $[a_{k-1}, b_{k-1}] = [a_{k-1}, m_{k-1}] \cup [m_{k-1}, b_{k-1}]$. L'un de ces deux intervalles contient une infinité de termes de la suite. Si c'est le premier on pose $a_k = a_{k-1}, b_k = m_{k-1}$. Sinon on pose $a_k = m_{k-1}, b_k = b_{k-1}$. Il y a donc une infinité de termes de la suite dans $[a_k, b_k]$. En particulier, on peut trouver un terme x_n de la suite dans $[a_k, b_k]$ avec $n > \varphi(k-1)$. On pose alors $\varphi(k) = n$.

Les suites a_k et b_k sont adjacentes et convergent vers une même limite x. La suite extraite $x_{\varphi(k)}$ est coincée entre les deux suites adjacentes donc converge également vers x.

Nous avons extrait une suite convergente vers x. Il reste à montrer que $x \in E$. Si $x \notin E$, x est dans le complémentaire de E qui est ouvert. En particulier, il existe un intervalle non vide $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ dans le complémentaire de E. La suite $x_{\varphi(n)}$ étant une suite de E, elle ne rentre jamais dans l'intervalle $]x-\epsilon, x+\epsilon[$, et elle ne converge donc pas vers x. Contradiction. Donc $x \in E$.

Exercice 9.

a)Montrer que le théorème de Bolzano-Weierstrass ne reste pas vrai si on ne suppose pas E borné.

b)Montrer que le théorème de Bolzano-Weierstrass ne reste pas vrai si on ne suppose pas E fermé.

Correction 9.

a)Si l'on prend $E = \mathbb{R}$, la suite $x_n = n$ est une suite de E qui tend vers l'infini. Toute suite extraite de x_n tend aussi vers l'infini et donc ne converge pas. On ne peut pas extraire de suite convergente.

b)Si l'on prend $E =]0, 1[$, la suite $x_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 qui n'est pas dans E. Toute suite extraite de x_n converge vers 0 et on ne peut pas trouver de suite extraite qui converge vers un point de E.

1.7 Théoremes utilisant la notion d'ouvert et de fermés

Notation 26. *Si $f : E \to F$ est une application, et si $X \subset E$, on note $f(X)$ le sous-ensemble de F défini par $f(X) := \{y \in F, \exists x \in X, y = f(x)\}$. Si $Y \subset F$, on note $f^{-1}(Y)$ le sous ensemble de E défini par $f^{-1}(Y) := \{x \in E, \exists y \in Y, f(x) = y\}$.*

Définition 27. *On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet un maximum si la borne supérieure de $f(E)$ est atteinte en un point e: il existe $e \in E$, $f(e) = sup(f(E))$.*

Exercice 10.
a)Montrer que la fonction tangente $tan :]-\pi/2, pi/2[\to \mathbb{R}$ n'admet pas de maximum.
b)Montrer que sa réciproque $ArcTan$ n'admet pas non plus de maximum.
c)Montrer que $1 - x^4$ admet un maximum.

Correction 10.
a)La fonction tangente tend vers $-\infty$ et $+\infty$ en $-\pi/2$ et $\pi/2$ respectivement, donc il n'y a pas de maximum et de minimum.
b)La fonction $ArcTan$ tend vers $-\pi/2$ et $+\pi/2$ en $-\infty$ et ∞ respectivement. D'où $ArcTan(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La borne supérieure $\pi/2$ n'est atteinte en aucun point e donc $ArcTan$ n'admet pas de maximum.
c)Le maximum de $1 - x^4$ est atteint en $x = 0$ et vaut 1.

Théorème 28. *Si $E \subset \mathbb{R}$ est fermé borné et si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors f admet un maximum et un minimum.*

Démonstration On rappelle le résultat suivant que nous utiliserons : si f est continue au point x et si x_n est une suite qui tend vers x, alors $f(x) = \lim_n f(x_n)$.

Par symétrie, il suffit de démontrer l'existence d'un maximum.

Soit $M = supf(E) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Choisissons une suite M_n qui tend en croissant vers M. Par exemple $M_n = n$ si $M = +\infty$ et $M_n = M - \frac{1}{n}$ si M est fini. Puisque $M_n < M$, ce n'est pas un majorant de $f(E)$. Donc il existe un élement e_n tel que $M_n < f(e_n) \leq M$. On peut extraire de la suite e_n une suite $e_{\varphi(n)}$ qui converge vers e d'après le théorème 25. Alors $f(e) = \lim f(e_{\varphi(n)})$ d'àprès le rappel.

En particulier, on ne peut pas avoir $M = +\infty$, sinon M_n tend vers $+\infty$, $f(e_n) > M_n$ également, et la suite extraite $f(e_{\varphi(n)})$ de $f(e_n)$ tend également vers $+\infty$, alors qu'on vient de voir qu'elle tend vers le réel $f(e)$.

La suite M_n et la suite consante $C_n = M$ sont deux suites adjacentes par constructions, donc elles tendent vers la même limite M. La suite $f(e_n)$ coincée entre les deux suites adjacentes converge également vers M, et la suite extraite $f(e_{\varphi(n)})$ de la suite convergente converge également vers M.

En résumé, la borne supérieure $M = supf(E)$ est atteinte au point e puisque $M = \lim_n f(e_{\varphi(n)}) = f(e)$.

Exercice 11.
a)Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{+\infty} f = \lim_{-infty} f = -\infty$, alors f admet un maximum

Correction 11.
a)Soit a un point quelconque de $\mathbb{R}$ et $b = f(a)$. Puisque f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $f(x)$ est plus petit que b quand x est plus grand qu'un nombre B bien choisi. De même, il existe un A tel que $f(x) < b$ si $x < A$. On a donc $inf(f(\mathbb{R})) = inf(f([A, B]))$. Et cette borne inférieure est atteinte car $[A, B]$ est fermé borné d'après le théorème 28

Théorème 29. *Si f est une fonction dérivable sur un ouvert $E \subset \mathbb{R}$ qui atteint son maximum en a, et si $E \subset \mathbb{R}$ est ouvert alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration Puisque E est ouvert, il contient un intervalle non vide $]a - \epsilon, a + \epsilon[$. Pour les points x dans $]a, a + \epsilon[$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. A la limite, quand x tend vers a, on obtient $f'(a) \geq 0$. En raisonnant de la même façon avec des x dans $]a - \epsilon, a[$, on obtient $f'(a) \leq 0$. Et finalement $f'(a) = 0$.

Exercice 12. Si f est une fonction dérivable sur un ouvert $E \subset \mathbb{R}$ qui atteint son maximum en a, alors $f'(a)$ peut être non nul si E n'est pas ouvert.

Correction 12. La fonction $f(x) = x$ pour $x \in E = [0, 1]$ atteint son maximum en $x = 1$. Mais $f'(1) = 1 \neq 0$.

Chapitre 2

Espaces métriques

Les notions utilisées dans le chapître précédent sur les nombres réels, à savoir suites de Cauchy, fonctions continues, ouvert, fermé, frontière ... peuvent être généralisées. Ces notions s'étendent de $\mathbb{R}$ à des espaces munis d'une distance appelée espaces métriques et introduits dans le présent chapître.

2.1 Distance et continuité

Définition 30. *Un distance sur un ensemble E est une application $d : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tout triplet (x, y, z) dans E:*

- *$d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)*
- *$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)*
- *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).*

Le couple (E, d) est appelé espace métrique.

L'exercice suivant donne quelques exemples de distance. Parmi ces exemples, on notera que l'ensemble $\mathbb{R}$ du chapître précédent est bien un cas particulier d'espace métrique.

Exercice 13. Vérifier que les exemples suivants définissent bien des distances:

- $E = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$
- $E = \mathbb{R}^n$, $d_1(x, y) = \sum |x_i - y_i|$ avec $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$
- En étudiant le signe de $\sum_{i=1}^n (\lambda |x_i| + |y_i|)^2$, montrer que $\sum |x_i||y_i| \leq \sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}$. En déduire que sur $E = \mathbb{R}^n$, $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ est une distance.
- $E = \mathbb{R}^n$, $d_\infty(x, y) = \max |x_i - y_i|$

Correction 13.
a)En utilisant les propriétés suivantes de la valeur absolue: $|z| = 0$ ssi $|z| = 0$, $|-z| = |z|$ et $|a + b| \leq |a| + |b|$, on vérifie aussitôt que $d(x, y)$ est une distance sur $\mathbb{R}$.
b)La symétrie est évidente. On a $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall i, |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Puisque $|a + b| \leq |a| + |b|$, on a $|x_i - z_i| \leq |x_i + y_i| + |y_i - z_i|$. On en déduit en sommant les termes que $d(x, z) \leq d(x, z) + d(y, z)$.
c)Le signe de l'expression proposée est positif pour tout λ, donc le polynôme de degré 2 en λ a un discriminant négatif, ce qui donne l'inégalité préliminaire demandée $(\sum |x_i||y_i|)^2 \leq \sum x_i^2 \sum y_i^2$.

La symétrie de la distance est évidente. On a $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum(x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i, (x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$. Pour vérifier l'inégalité triangulaire, il faut voir que $\sum(x_i - z_i)^2 \leq \sum(x_i - y_i)^2 + \sum(y_i - z_i)^2 + 2\sqrt{\sum(x_i - y_i)^2 \sum(y_i - z_i)^2}$.En passant tous les termes sans racine à gauche de l'inégalité, c'est équivalent à $\sum(x_i - y_i)(y_i - z_i) \leq \sqrt{\sum(x_i - y_i)^2(y_i - z_i)^2}$. Et cette dernière égalité est vraie d'après l'inégalité préliminaire.
d)La symétrie est évidente. $d_\infty(x, y) = 0 \Leftrightarrow max(|x_i - y_i|) = 0 \Leftrightarrow \forall i, x_i = y_i$. Enfin $d_\infty(x, z) = \sum |x_i - z_i| = \sum |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leq \sum |x_i - y_i| + \sum |y_i - z_i|$ car $|a + b| \leq |a| + |b|$.

La distance d_2 du deuxième exemple s'appelle distance euclidienne. Dans le cas $n = 3$, d_2 est la distance qu'on utilise dans la vie de tous les jours lorsque l'on fait des mesures en utilisant un mètre.

Remarque 31. *Dans la suite, lorsque nous travaillerons dans $\mathbb{R}^n$ sans préciser la distance,* ***nous utiliserons implicitement l'une des 3 distances ci-dessus*** *et les raisonnements seront valables dans les trois cas.*

Exercice 14. Montrer que dans un espace métrique, la relation $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|$ est toujours satisfaite (deuxième inégalité triangulaire).

Correction 14. Si le terme $t = d(x, z) - d(y, z)$ dans la valeur absolue est positif, c'est simplement l'inégalité triangulaire usuelle. Si $t < 0$, alors la deuxième inégalité s'écrit $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$ qui est encore une inégalité triangulaire usuelle.

La notion de fonction continue entre espaces métriques est bien définie:

Définition 32. *Soit (E, d), (E', d') deux espaces métriques. Une fonction $f : E \to E'$ est dite continue au point $x \in E$ si: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \eta > 0, \forall y \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

En termes intuitifs, cela signifie que $f(y)$ est arbitrairement proche de $f(x)$ pourvu que y soit arbitrairement proche de x.

De même, on peut définir la notion de suite convergente et de suite de Cauchy dans un espace métrique.

Définition 33. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace métrique (E,d) est dite convergente vers $u \in E$ si la distance $d(u_n, u)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. La suite u_n est dite de Cauchy si $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, d(u_n, u_m) < \epsilon$.*

Exercice 15.
a)Soit $x, y \in (E,d)$ deux points d'un espace métrique E et $r = d(x,y)$. Montrer qu'il n'existe aucun point z tel que $d(x,z) < \frac{r}{2}$ et $d(y,z) < \frac{r}{2}$.
b)En déduire que la limite d'une suite est unique si elle existe.

Correction 15.
a)Si un tel z existait, on aurait par inégalité triangulaire $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r$. Contradiction.
b)Soit u_n une suite qui tend vers x. Soit $y \neq x$ et $r = d(x,y)$. Pour n grand, $d(u_n, x) < r/2$. D'après la question précédente, cela implique que $d(u_n, y) \geq r/2$. Donc u_n ne tend pas vers $y \neq x$.

2.2 Boules et ouverts

Définition 34. *On appelle boule ouverte de centre x et de rayon r l'ensemble $B(x,r) := \{y \in E, d(x,y) < r\}$. On appelle boule fermée de centre x et de rayon r l'ensemble $\overline{B}(x,r) := \{y \in E, d(x,y) \leq r\}$.*

Exercice 16. Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance valeur absolue. Montrer que les boules ouvertes sont exactement les intervalles ouverts bornés.

Correction 16. Un intervalle ouvert borné $]a,b[$ s'identifie à la boule $B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$. Réciproquement, la boule $B(x,r)$ est l'intervalle $]x-r, x+r[$.

Exercice 17. Tracer dans $\mathbb{R}^2$ les boules ouvertes et fermées de centre 0 et de rayon 1 pour les distances d_1, d_2, d_∞ de $\mathbb{R}^2$.

Correction 17. Pour d_2 la boule ouverte est le disque sans bord d'équation $x^2 + y_2 \leq 1$, tandis que la boule fermée est le disque avec bord. Pour d_∞, la boule ouverte est le carré sans bord produit des intervalles ouverts $]-1,1[\times]-1,1[$, tandis que la boule fermée est le carré avec bord produit des intervalles fermés. Enfin, les boules ouvertes et fermées pour d_1 sont également des carrés sans bord et avec bord respectivement. Les coins du carré sont les points $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$.

L'exercice suivant montre qu'une suite de $\mathbb{R}^n$ est convergente si et seulement si chacune des coordonnées est convergente.

Exercice 18.
a)Montrer qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_k^1, \ldots, u_k^n)$ est convergente dans $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ si et seulement si pour tout j, la j^{eme} coordonnée u_k^j est convergente vers un réel u^j.
b)Même questions avec les distances d_1 et d_2.

Correction 18. On rappelle qu'une somme finie $s_1 + \cdots + s_n$ de suite positives réelles s_i tend vers 0 si et seulement chaque suite s_i tend vers 0. De même, $max(s_i)$ tend vers 0 ssi chaque s_i tend vers 0 (toujours sous la condition s_i positive.
a)Si $u = (u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$, on a les équivalence de convergence $d_\infty(u_k, u) \to 0 \Leftrightarrow max_j(|u_k^j - u^j|) \to 0 \Leftrightarrow \forall j, u_k^j \to u_j$. La dernière équivalence utilise le rappel.
b)$d_1(u_k, u) \to 0 \Leftrightarrow \sum_j |u_k^j - u^j| \to 0 \Leftrightarrow \forall j, u_k^j \to u_j$. La dernière équivalence utilise le rappel. De même, $d_2(u_k, u) \to 0 \Leftrightarrow \sum_j \sqrt{(u_k^j - u^j)^2} \to 0 \Leftrightarrow \forall j, \sqrt{(u_k^j - u_j)^2} \to 0 \Leftrightarrow \forall j u_k^j \to u_j$.

Définition 35. *Soit (E, d) un espace métrique et $x \in E$. On dit que $V \subset E$ est un voisinage de x si V contient une boule ouverte $B(x, \epsilon)$ avec $\epsilon > 0$.*

La proposition suivante est la généralisation de la proposition 21 montrée sur $\mathbb{R}$. La démonstration est formellelement la même,en remplaçant les intervalles ouverts par des boules ouvertes. Le lecteur se convaincra que j'ai fait un simple copié-collé de la démonstration du cas réel avant de faire les changements mineurs correspondants.

Proposition 36. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*
- *$V \subset E$ est une réunion de boules ouvertes de E*
- *V est voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration Si $E = \cup B(x_i, \epsilon_i)$ est réunion de boules ouverts. Soit $x \in E$. Alors il existe i tel que $x \in B(x_i, \epsilon_i$. En posant, $\epsilon = min(\epsilon_i)$, la boule $B(x, \epsilon)$ est incluse dans $B(x, \epsilon_i)$ donc dans E, ce qui montre que E est bien un voisinage du point x.

Réciproquement, supposons que E soit voisinage de chacun de ses points. Pour chaque point x, choisissons ϵ tel que $B(x, \epsilon) \subset E$. Alors $\cup_{x\in E} B(x, \epsilon \subset E$. L'inclusion réciproque $\cup_{x\in E} B(x, \epsilon) \supset E$ est évidente car tous les points x de E sont dans le terme de gauche. L'égalité $\cup_{x\in E} B(x, \epsilon) = E$ montre que E est bien une réunion de boules ouvertes.

Remarque 37. *Par convention une réunion de* 0 *boule ouverte est l'ensemble vide. Donc l'ensemble vide est un ouvert.*

Définition 38. *Un ensemble V qui vérifie les conditions précédentes est appelé un ouvert de E.*

Exemple 39. *Le demi-plan $P := \{(x,y), y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de la distance d_2 car pour pour chaque point $M = (x,y) \in P$, la boule ouverte $B(M, \frac{y}{2})$ est incluse dans P.*

Exemple 40. *Le demi-plan $P := \{(x,y), y \geq 0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de la distance d_2 car $(0,0)$ in P et P n'est pas un voisinage de $M = (0,0)$: pour tout $\epsilon > 0$, la boule $B(M,\epsilon)$ contient $(0, \frac{-\epsilon}{2})$ qui n'est pas dans P.*

Proposition 41. *Une réunion d'ouverts de E est un ouvert de E. Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.*

Démonstration Soient O_i des ouverts de E et $x \in U = \cup_{i\in I} O_i$. Il existe i tel que $x \in O_i$, et puisque O_i est ouvert, $O_i \supset B = B(x,\epsilon)$ pour un $\epsilon > 0$ assez petit. Puisque $B \subset U$, U est bien un voisinage de chaque point $x \in U$.

Supposons maintenant I fini et soit $V = \cap_{i\in I} O_i$. Pour chaque i, O_i contient une boule $B(x, \epsilon_i)$ avec $\epsilon_i > 0$. Le réel $\epsilon = inf(\epsilon_i)$ vérifie $\epsilon > 0$. L'inclusion $B(x,\epsilon) \subset V$ montrer que V est voisinage de chacun de ses points.

L'annulation de la dérivée au point réalisant le maximum si l'espace de départ est un ouvert reste vraie dans le cas de plusieurs variables.

Théorème 42. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. et une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ qui admet un maximum au point a. Si U est ouvert et si f est différentiable alors les dérivées partielles de f s'annulent au point a.*

Démonstration Montrons par exemple que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0$. Puisque U est ouvert et contient $a = (a_1, \ldots, a_n)$, il contient une boule $B(a,\epsilon)$ avec $\epsilon > 0$. En particulier l'ensemble $S := \{(x, a_2, \ldots, a_n), x \in]a_1-\epsilon, a_1+\epsilon[\}$ est inclus dans U. (Remarquons que la boule B dépend de la distance $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$ utilisée, mais que la boule boule B contient S indépendamment du choix de d). La restriction de f à S est une fonction d'une variable réelle $x \in]a_1-\epsilon, a_1+\epsilon[$ qui a un maximum en $x = a_1$. Puisque l'intervalle $]a_1-\epsilon, a_1+\epsilon[$ est ouvert, la dérivée de $f_{|S}$ est nulle en $x = a_1$, d'où $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0$.

2.3 Fermés et frontière

Définition 43. *Soit $V \subset E$. Un point $x \in E$ est dans la frontiere partialV de V si $\forall \epsilon > 0, \exists y \in V, \exists z \in E \setminus V$ tels que $d(x,y) < \epsilon, d(x,z) < \epsilon$.*

Exercice 19.
a)Trouver la frontiere des boules $B(0,1)$ pour les distances d_1, d_2, d_∞.

Correction 19.
a)Pour d_∞, la $\partial B(0,1)$ est la réunion des quatre segments $\{-1\} \times [-1,1]$, $\{1\} \times [-1,1]$,$[-1,1] \times \{-1\}$, $[-1,1] \times \{1\}$. Pour d_2, la frontière est le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Pour d_1, la frontière est formé des quatre segments reliant les points $(0,1), (0,-1), (-1,0), (1,0)$ sur le pourtour du carré dont ces coins sont les sommets.

Proposition 44. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *le complémentaire de V est ouvert*
- *V contient sa propre frontière: $x \in \partial V \Rightarrow x \in V$.*

Démonstration Ici encore, la démonstration est analogue à celle du cas réel faite dans la proposition 23. Il suffit de remplacer les intervalles ouverts par les boules ouvertes et la valeur absolue par la distance. Le lecteur pourra se convaincre qu'il sait faire les quelques changements nécessaires.

Définition 45. *On appelle fermé de $\mathbb{R}$ un sous-ensemble qui vérifie les conditions précédentes.*

Proposition 46. *Une intersection de fermés de E est un fermé de E. Une union finie de fermés de E est un fermé de E.*

Démonstration Soit $F_i \subset E$ des fermés paramétrés par $i \in I$. Le complémentaire $(\cup F_i)^c = \cap(F_i^c)$ de l'union est ouvert quand I est fini en tant qu'intersection finie d'ouverts. Le complémentaire $(\cap F_i)^c = \cup(F_i^c)$ de l'intersection est ouvert en tant qu'union finie d'ouverts.

Exercice 20.
a)Vérifier qu'une boule ouverte est un ouvert et qu'une boule fermée est un fermé.
b)Vérifier qu'un point est un fermé dans tout espace métrique.
c)Vérifier qu'une réunion finie de points est un fermé dans tout espace métrique.

Correction 20.
a)Une boule ouverte est évidemment ouverte par définition puisque c'est une réunion de boules ouvertes.

Montrons que le complémentaire C de la boule fermée $\overline{B}(x,r)$ est bien fermé. Soit $y \notin B(x,r)$. Alors $d(y,x) > r$ et posons $s = d(y,x) - r$. Pour vérifier que C est un voisinage de y, vérifions que $B(y,s) \subset C$. D'àpres la deuxième inégalité triangulaire, si $z \in B(y,s)$, $d(z,x) \geq d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - s = r$, donc $z \in C$.
b)Soit p un point de l'espace métrique E et $U = E \setminus \{p\}$. Il faut voir que U est ouvert. Soit $x \in U$ et $d = d(x,p)$ la distance entre x et p. La boule $B = B(x, \frac{d}{2})$ est incluse dans U. En effet, la deuxième inégalité triangulaire montre que si $z \in B$, $d(p,z) \geq d(p,x) - d(x,z) > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0$. Donc $z \neq p$.
c)Soit $p_1, \ldots, p_k$ des points de E, $F = p_1 \cup \cdots \cup p_k$ la réunion et $U = E \setminus F$. Il faut voir que U est ouvert. Soit $x \in U$ et $d_i = d(x, p_i)$ la distance entre x et p_i. Soit $d = min(d_i)$. La boule $B = B(x, \frac{d}{2})$ est incluse dans U car elle ne contient aucun point p_i.

Exercice 21. Soit $V \subset E$. Montrer que V est ouvert si et seulement si $Fr(V) \cap V = \emptyset$.

Correction 21. On sait que W est fermé ssi $W \supset Fr(W)$. En passant au complémentaire $V = W^c$, et en utilisant $Fr(W) = Fr(V)$, on obtient V est ouvert ssi $V \subset Fr(W)^c = Fr(V)^c$.

2.4 Reconnaître les ouverts et les fermés

Considérons l'ellipse E d'equation $x^2 + 2y^2 = 1$. L'interieur I de l'ellipse est défini par l'inégalité $x^2 + 2y^2 < 1$. Intuitivement, le bord de I est E. Donc I devrait être un ouvert, puisque $I \cap E = \emptyset$ et d'après le dernier exercice, une partie qui ne rencontre pas son bord est un ouvert. Si j'ajoute le bord à E, j'obtiens la partie $P = I \cup E$ défini par l'équation $x^2 + y^2 \leq 1$. Ici P contient le bord, donc devrait être fermé. L'ensemble $Q = I \cup (1,0)$ contient seulement une partie du bord et n'est ni ouverte ni fermée.

Comment démontrer proprement les affirmations précédentes ? Les définitions d'ouvert et de fermé sont peu maniables pour vérifier en pratique qu'un ensemble est ouvert, fermé ou ni ouvert ni fermé.

Nous utiliserons le critère suivant pour vérifier qu'un ensemble est ouvert:

Proposition 47. *Soit $f : E \to E'$ une application continue entre 2 espaces métriques et $P' \subset E'$. Si P' est ouvert dans E', alors $P = f^{-1}(P')$ est* *ouvert dans E. Si P' est fermé dans E', alors $P = f^{-1}(P')$ est fermé dans E.*

Démonstration Supposons P' ouvert. Soit $x \in P$. On veut trouver un $\eta > 0$ tel que $B(x, \eta) \subset P$. Puisque P' est ouvert et contient $f(x)$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$B(f(x), \epsilon) \subset P.(*)$$

Par continuité de f au point x, il existe un $\eta > 0$ tel que

$$z \in B(x, \eta) \Rightarrow f(z) \in B(f(x), \epsilon).(**)$$

Les deux inclusions $(*)$ et $(**)$ impliquent l'inclusion voulue.

Si P' est fermé, alors P'^c est ouvert. Par double complémentarité $f^{-1}(P') = ((f^{-1}(P'))^c)^c = (f^{-1}(P'^c))^c$ est fermé comme complémentaire de l'ouvert $f^{-1}(P'^c)$.

Utilisons cette proposition pour montrer que l'interieur I de l'ellipse est ouvert tandis que $P = I \cup E$ est fermé.Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. La fonction f est polynômiale donc continue. L'ensemble I est défini par $f(x, y) < 0$, ou encore $I = f^{-1}(] - \infty, 0[)$. L'ensemble I est donc ouvert en tant qu'image réciproque d'un intervalle ouvert par l'application continue f.

De façon similaire, $P = f^{-1}(]-\infty, 0])$, donc P est fermé en tant qu'image réciproque d'un intervalle fermé par l'application continue f.

Remarque 48. *En toute rigueur, il faudrait dire quelle distance on utilise sur $\mathbb{R}^2$ parmi les trois distances introduites d_1, d_2, d_∞. Mais les fonctions polynômiales sont continues quelle que soit la distance choisie et nous ne sommes donc pas obligés de donner la précision. Nous verrons plus loin un résultat très général impliquant que la continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ ne dépend pas du choix d'une des trois distances.*

Le principe général est que lorsqu'un ensemble est défini par des inégalités strictes, comme c'est le cas pour I, on peut souvent (mais pas toujours) introduire des fonctions continues et montrer que l'ensemble est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. Lorsqu'un ensemble est défini par des inégalités larges, comme c'est le cas pour P, on peut en général introduire des fonctions continues et montrer que l'ensemble est image réciproque d'un fermé, donc est fermé.

Exercice 22.
a)Montrer que P d'equation $y > x^2$ est ouverte tandis que Q d'équation $y \geq x^2$ est fermée.

b)Montrer que le quart de plan $x \leq 1, y \leq 1$ est fermé.
c)Montrer que le quart de plan $x < 1, y < 1$ est ouvert.
d)Montrer que le quart de plan $x < 1, y \leq 1$ n'est ni ouvert ni fermé.
e)Montrer que l'ensemble $R\ x < 1, y < 1, x + y \leq 3$ est ouvert.
f)Montrer que le graphe $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Correction 22.
a)P d'equation $y > x^2$ est ouvert car l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to y - x^2$ est continue et $P = f^{-1}(]0, \infty[)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue. L'ensemble Q d'équation $y \geq x^2$ est fermé car $Q = f^{-1}([0, \infty[)$ est l'image réciproque par f d'un intervalle fermé.
b)Le demi-plan $x \leq 1$ est fermé car c'est l'image reciproque par $f : (x, y) \to x$ continue de l'intervalle fermé $] - \infty, 1]$. De même, le demi-plan $y \leq 1$ est fermé. Le quart de plan $x \leq 1, y \leq 1$ est fermé car c'est l'intersection des 2 demi-plans précédents, donc l'intersection de fermés.
c)Le même raisonnement que dans la question précédente montre que les demi-plans $x < 1$ et $y < 1$ sont ouverts. Le quart de plan est intersection des deux demi-plans, donc est ouvert comme intersection finie d'ouverts.
d)Le quart de plan Q:$x < 1, y \leq 1$ n'est pas ouvert. En effet, $M = (0, 1) \in Q$ mais pour tout $\epsilon > 0$, $B(M, \epsilon)$ n'est pas inclus dans Q car contient le point $(0, 1 + \frac{\epsilon}{2})$. Le complémentaire de Q n'est pas ouvert car $N = (1, 0) \in Q^c$ mais pour tout $\epsilon > 0$, $B(N, \epsilon)$ rencontre Q car contient le point $(1 - \frac{\epsilon}{2}, 0)$.
e)L'ensemble $R\ x < 1, y < 1, x + y \leq 3$ est ouvert car il peut être défini uniquement par les deux premières inégalités: la troisième inégalité large est inutile car elle est conséquence des deux inégalités strictes. Et on a vu dans une question précédente que le quart de plan $x < 1$, $y < 1$ est ouvert.
f)Le graphe $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque par $g : (x, y) \mapsto y - f(x)$ du point $0 \in \mathbb{R}$. Or g est continue et le point est fermé.

Chapitre 3

Espaces métriques, suite

Nous poursuivons dans ce chapitre l'étude des espaces métriques et nous présentons notamment l'importante notion de compacité. Cette notion dont la définition peut paraitre assez technique et artificielle, se révele en fait très fertile. Nous l'utiliserons en particulier pour montrer le thèorème de Stone-Weierstrass et l'équivalence des normes en dimension finie.

3.1 Compacité

Définition 49. *Une sous-ensemble $K \subset E$ d'un espace métrique E est dit compact si pour tout suite u_n dans K, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Exemple 50. *D'après le théoreme 25 de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{R}$, tout sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact.*

Théorème 51. *Si une fonction f est continue sur le compact K, alors f est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe $a, b \in K, f(a) = Sup_{x\in K} f(x), f(b) = Inf_{x\in K} f(x)$.*

Démonstration Ce théorème a déja été démontré dans le cas particulier où K est un fermé borné de $\mathbb{R}$ (théorème 28). Relire la démonstration du théorème 28 et se convaincre que la même démonstration vaut mot pour mot dans le cas gńéral car la seule propriété de l'intervalle fermé borné qu'on utilise est sa compacité.

La proposition suivante dit que les produits d'intervalles fermés bornés sont des exemples de compact dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 52. *Soient $I_1, \dots, I_n$ des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ et $P = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ le pavé correspondant. Alors P est compact dans $\mathbb{R}^n$ muni de l'une quelconque des distances d_1, d_2, d_∞.*

Démonstration Soit $u_k = (u_k^1, \dots, u_k^n)$ une suite de P. La première coordonnée u_k^1 vit dans l'intervalle I_1, dont on sait qu'il est compact d'apres le theorème 25. On peut donc extraire une suite convergente $u^1_{\varphi_1(k)}$ de la suite u_k^1. De même, on peut extraire une suite $u^2_{\varphi_2 \circ \varphi_1(k)}$ de la suite $u^2_{\varphi_1(k)}$. On poursuit les extractions successives jusqu'a extraire la suite $u^n_{\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(k)}$ de la suite $u^n_{\varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(k)}$. La suite à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ $u_{\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1}$ a été construite de sorte que chacune de ses coordonnées soit convergente. Cette suite est donc convergente dans $\mathbb{R}^n$, ce qui montre l'existence de la sous-suite convergente cherchée.

Théorème 53. *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.*

Lemme 54. *Si E est un espace métrique, si $F \subset E$ est fermé, et si u_n est une suite de F qui converge vers un point $e \in E$, alors $e \in F$.*

Démonstration Supposons par l'absurde $e \notin F$. Puisque F^c est ouvert, on peut trouver une boule $B = B(e, \epsilon)$ avec $\epsilon > 0$ qui ne rencontre pas F. La suite de F ne prend donc pas ses valeurs dans B et pour tout n, $d(u_n, e) > \epsilon$. Contradiction avec la convergence de u_n vers e.

Lemme 55. *Soit $F \subset E$ un sous-ensemble d'un espace métrique E. Si $z \in \partial F$, alors il existe une suite de F qui converge vers E.*

Démonstration Puisque $z \in \partial F$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point u_n de F dans $B(z, \frac{1}{n})$. Par construction, la suite u_n tend vers z.

Nous sommes maintenant prêts pour la démonstration du théorème. *Démonstration* Si F est borné, on peut l'inclure dans un produit d'intervalles $P = I_1 \times I_n$ fermés bornés. Le produit P est compact d'après la proposition 52. Soit u_n une suite de F. On veut extraire une suite convergente de u_n vers un point de F. On regarde cette suite comme une suite de P puisque $F \subset P$. Puisque P est compact, on peut extraire une suite convergente dans P vers un point p. Mais F est fermé donc d'après le lemme $p \in F$.

Il nous reste à voir que les ensembles K non fermés ou non bornés ne sont pas compact. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est non borné, alors on peut trouver dans K une suite $u_k = (u_k^1, \dots, u_k^n)$ dont l'une des coordonnées u_k^i tend vers l'infini. Toute suite extraite de u_k aura la i^{eme} coordonnée qui tend vers l'infini et on ne peut donc extraire de u_k une suite convergente.

Si K n'est pas fermé, il existe un point $z \in \partial K$, $z \notin K$. Puisque $z \in \partial K$, on peut d'après le lemme trouver une suite u_k de K qui converge vers z. Toute suite extraite de u_k converge également vers $z \notin K$, donc on ne peut trouver de suite extraite convergente dans K.

Exercice 23. Montrer que la shpère unité $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Correction 23. La sphère unité S est bornée puisque toutes les coordonnées x_i sont dans $[-1, 1]$. Elle est fermée car $f : (x_i) \to \sum x_i^2$ est continue et $S = f^{-1}(1)$ est image réciproque d'un fermé par f.

3.2 Une application de la compacité

Nous allons donner une application de la notion de compacité et montrer que les fonctions continues peuvent être bien approximées par des fonctions polynômiales. C'est le théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 56. *Si $K \subset \mathbb{R}$ est intervalle compact, et si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $g : K \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in K, d(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

La démonstration du théorème repose sur la notion d'uniforme continuité. Rappelons qu'une fonction est continue en x si $f(y)$ est proche de $f(x)$ à ϵ près dès que y est proche de x à $\eta(\epsilon, x)$ près. Le nombre η dépend de ϵ et de x. Quand le nombre η ne dépend que de ϵ et pas de x, on dit que la fonction est uniformément continue. La définition formelle est la suivante:

Définition 57. *Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Une fonction $f : E \to E'$ est uniformément continue si $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \forall y \in E, d(x, y) \leq \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.*

Théorème 58. *Toute fonction continue sur un compact métrique K est uniformément continue.*

Démonstration Par l'absurde. Supposons qu'il existe un ϵ tel que pour tout η, il existe x et y dans le compact K, avec $d(x, y) < \eta$ et $d(f(x), f(y)) > \epsilon$. En choisissant η de la forme $\frac{1}{n}$, on obtient deux points x_n et y_n dans K. Les suites x_n et y_n sont dans K donc on peut extraire une suite $x_{\varphi(n)}$ convergente vers $k \in K$. Comme $d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leq \frac{1}{\varphi(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a $\lim y_{\varphi(n)} = \lim x_{\varphi(n)} = x$.

Puisque f est continue en x et que $x_{\varphi(n)}$ tend vers x, pour n assez grand, c'est a dire pour n plus grand qu'un certain entier N_0, $d(f(x_\varphi(n)), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. De même, pour $n > N_1$, $d(f(y_\varphi(n)), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. En particulier $d(f(x_\varphi(n)), f(y_\varphi(n))) \leq d(f(x_\varphi(n)), f(x)) + d(f(y_\varphi(n)), f(x)) < \epsilon$. Contradiction car par construction $d(f(x_\varphi(n)), f(y_\varphi(n))) \geq \epsilon$.

Commencons maintenant la démonstration du théorème d'approximation de Stone-Weierstrass. Si $K = [a, b]$, par le changement de variable $X = \frac{x-a}{b-a}$, on se ramène aisément au cas où $K = [0, 1]$, ce que nous supposerons dorénavant.

Notons $B_n(f)$ le polynôme $B_n(f) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. C'est un polynôme de degré au plus n dépendant de f. Un calcul direct que nous admettrons pour écourter la preuve montre ce que vaut $B_n(f)$ lorsque $f = 1$, $f = x$ ou $f = x^2$.

Lemme 59. *Les polynômes $B_n(f)$ quand $f = 1, x, x^2$ valent $B_n(1) = 1$, $B_n(x) = x$, $B_n(x^2) = \frac{(n-1)x^2+x}{n}$. En outre, $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x)$*

Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} B_n(x) - f(x) &= B_n(x) - f(x)B_n(1) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(f(k/n) - f(x))\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Fixons un $\epsilon > 0$. Par uniforme continuité, il existe un δ tel que si x est proche de k/n à δ près, $|f(x) - f(k/n)| < \epsilon$. D'où:

$$\begin{aligned}
|B_n(x) - f(x)| &= \sum_{k \leq n, |k/n - x| < \delta} |f(k/n) - f(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k \leq n, |k/n - x| \geq \delta} |f(k/n) - f(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \sum_{k \leq n, |k/n - x| < \delta} \epsilon \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k \leq n, |k/n - x| \geq \delta} 2sup(|f|) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \epsilon B_n(1) + \sum_{k \leq n, |k/n - x| \geq \delta} 2sup(|f|) \binom{n}{k} \frac{(k/n - x)^2}{(k/n - x)^2} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \epsilon + \sum_{k \leq n, |k/n - x| \geq \delta} 2 \frac{sup(|f|)}{\delta^2} \binom{n}{k} (k/n - x)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&\overset{lemma}{\leq} \epsilon + 2 \frac{sup(|f|)}{n\delta^2} x(1-x) \\
&\leq \epsilon + \frac{sup(|f|)}{2n\delta^2} \text{ since } sup_{x \in [0,1]}(x(1-x) = 1/4
\end{aligned}$$

Le terme de droite est inférieur à ϵ pour n grand, donc $B_n(f)(x) - f(x)$ est plus petit que 2ϵ pour n grand, ce qui prouve le théorème de Stone-Weierstrass.

3.3 Normes et distances

Les 3 distances que nous avons rencontrées dans $\mathbb{R}^n$ proviennent en fait de normes.

Définition 60. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une norme sur E est une application $||.|| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tout couple (x, y) de E et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

- $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$
- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(inégalité triangulaire)*

Comme pour la distance, l'inégalité triangulaire ci-dessus implique aisément la deuxième inégalité triangulaire $||x - y|| \geq | \, ||x|| - ||y|| \, |$.

Proposition 61. *Si* $||.||$ *est une normes sur* E*, la fonction* $d(x,y) = ||x-y||$ *est une distance sur* E*.*

Démonstration On a $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow ||x-y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$.
$d(x,y) = ||x-y|| = |-1|\ ||y-x|| = ||y-x|| = d(y,x)$
$d(x,y) + d(y,z) = ||x-y|| + ||y-z|| \leq ||x-y+y-z|| = d(x,z)$

Exemple 62. *Soit* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *Considérons les trois normes sur* $\mathbb{R}^n$ *définies par les formules:*

- $||x||_1 = \sum |x_i|$
- $||x||_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$
- $||x||_\infty = max|x_i|$

Alors les distances associées à ces normes sont les distances d_1, d_2, d_∞*.*

Exercice 24. Vérifier que la fonction $(E, ||.||) \to \mathbb{R}$,$x \mapsto ||x||$ est uniformément continue.

Correction 24. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in E$. Posons $\eta = \epsilon$ qui est indépendant de x. Si $d(x,y) < \eta$, alors par la deuxième inégalité triangulaire $|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x-y|| < \eta = \epsilon$.

Définition 63. *Deux normes* N *et* M *sont équivalentes s'il existe* $a, b > 0$ *tels que* $\forall x \in E$*,* $N(x) \leq aM(x)$ *et* $M(x) \leq bN(x)$*.*

La proposition suivante dit que les notions topologiques que nous avons rencontrées (ouvert, fermé, frontiere, suites convergentes, de Cauchy) ne dépendent pas de la norme utilisée pour définir la notion à équivalence près...

Théorème 64. *Si deux normes* N *et* M *de* E *sont équivalentes, et si* d_N *et* d_M *désignent les distances associées à ces normes, alors:*

- *Une suite* u_n *de* E *est convergente pour la distance* d_N *ssi (si et seulement si) elle est convergente pour* d_M *vers la même limite.*
- *Une suite* u_N *de* E *est de Cauchy pour la distance* d_N *ssi (si et seulement si) elle est de Cauchy pour* d_M
- *Une fonction* $f : (E, d_N) \to (F, d')$ *est continue ssi* $f : (E, d_M) \to (F, d')$ *est continue.*
- $O \subset E$ *est un ouvert pour* d_N *ssi c'est un ouvert pour* d_M
- $O \subset E$ *est un fermé pour* d_N *ssi c'est un fermé pour* d_M
- $x \in Fr(O)$ *pour* d_N *ssi* $x \in Fr(O)$ *pour* d_M*.*

Démonstration La démonstration est une longue suite de vérifications et je ne ferai que les points 1 et 4 pour éviter une longue suite ennuyeuse.

Si u_n converge vers e pour d_N, cela signifie que $N(u_n - u)$ tend vers 0. Mais puisque $M(u_n - u) < bN(u_n - u)$, on a également $M(u_n - u)$ tend vers 0 et u_n tend vers u pour la distance d_M. Si O est un ouvert pour la distance d_N, montrons que O est un ouvert pour d_M. Soit $x \in O$. Puisque O est un voisinage de x, il existe ϵ tel que $\forall y \in E, N(y-x) < \epsilon \Rightarrow y \in O$. Si $M(y-x) < \frac{\epsilon}{b}$, alors $N(y-x) < bM(y-x) < \epsilon$, donc $y \in O$. On a démontré que O contient la boule pour d_M de centre x et de rayon $\frac{\epsilon}{b}$, donc est voisinage du point x.

Théorème 65. *Toutes les normes sont équivalentes sur* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration Soient M et N deux normes. La sphére unité S pour la norme $||.||_2$ étant compacte, et la fonction $x \mapsto M(x)/N(x)$ étant continue et non nulle sur la sphère unité, elle atteint un maximum $a > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. Puisque $\frac{x}{||x||_2} \in S$, on a $\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{M(\frac{x}{||x||_2})}{N(\frac{x}{||x||_2})} \leq a$. On a donc $M(x) \leq aN(x)$, pour tout x non nul. Pour x nul, la même inégalité est évidente. On démontre pareillement $N(x) < bM(x)$ pour un certain b ce qui donne l'équivalence des normes N et M.

En résumé, lorsque l'on travaille sur $\mathbb{R}^n$, on n'a pas besoin de préciser la norme utilisée. Toutes les normes sont équivalentes et deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts, les mêmes fonctions continues, les mêmes suites de Cauchy ... On peut alors mettre en évidence quelques caractéristiques des preuves précédentes. Nous avons travaillé sur $\mathbb{R}^n$ avec les distances d_1, d_2, d_∞ et plusieurs fois nous avons vérifié à la main que le résultat ne dépendait pas de la distance utilisée. Par exemple, quel que soit la distance d_i, les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont toujours les mêmes. C'est maintenant une conséquence du théorème précédent. Et on sait même qu'on aurait pu utiliser encore un autre distance d différentes des d_1, d_2, d_∞ pourvu que la distance d soit associée à une norme sans changer les énoncés.

Exercice 25.
a)Montrer que dans un espace métrique (E, d) la frontiere de $B(x, r)$ est incluse dans $C := \{y \in E, d(x, y) = r\}$.
b)Montrer que dans un evn. $\partial B(x, r) = C$.
c)Donner un exemple d'espace métrique pour lequel l'inclusion $\partial B(x, r) \subset C$ est stricte.

Correction 25.
a)Soit $y \in \partial B(x, r)$. Pour tout $\epsilon > 0$, $I := B(y, \epsilon) \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Donc on

peut trouver $z \in I$. On a $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq r + \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $d(x,y) \leq r$. Montrons que le cas $d(x,y) < r$ est impossible : si $d(x,y) < r$, alors $B(y, r - d(x,y)) \subset B(x,r)$ donc y n'est pas dans la frontière de $B(x,r)$. En résumé, on a montré que si $y \in \partial B(x,r)$, alors $d(x,y) = r$.
b)L'inclusion $\partial B(x,r) \subset C$ venant de la question précédente, il reste à montrer $C \subset \partial B(x,r)$. Soit $y \in C$ et $\epsilon > 0$. Les intersections $B(y,\epsilon) \cap B(x,r)$ et $B(y,\epsilon) \cap B(x,r)^c$ sont non vides car elles contiennent respectivement $M = x + (1 - \frac{\epsilon}{2||y-x||})(y-x)$ et $Nx + (1 + \frac{\epsilon}{2||y-x||})(y-x)$. En effet, $d(x,M) = (1 - \frac{\epsilon}{2||y-x||})||y-x|| < ||y-x|| = r$ et $d(y,M) = \frac{epsilon}{2} < \epsilon$. De même, $d(x,N) = (1 + \frac{\epsilon}{2||y-x||})||y-x|| > ||y-x|| = r$ et $d(y,M) = \frac{epsilon}{2} < \epsilon$. On a donc montré $y \in \partial B(x,r)$.
c)Si on considère l'espace métrique $E \subset \mathbb{R}$ formé des 2 points 0 et 1 et si on prend $r = 1$, alors $\partial B(0,1) = \emptyset$.

3.4 Suites de Cauchy et complétude

Rappelons la définiion suivante:

Définition 66. *Un espace métrique E est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.*

Théorème 67. $\mathbb{R}^n$ *est un espace métrique complet.*

Démonstration On travaille par exemple avec la norme infinie. Soit $u_k = (u_k^1, \ldots, u_k^n)$ une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}^n, \infty)$. Puisque $|u_m^i - u_n^i| \leq ||u_m - u_n||_\infty$, on en déduit que pour chaque i, la i^{eme} coordonnée de u_k est une suite de Cauchy réelle. Donc elle converge puisque $\mathbb{R}$ est complet. Si chaque coordonnée est convergente, la suite elle-même est convergente.

3.5 Critères séquentiels

Il existe des critères séquentiels, c'est à dire à l'aide de suites, permettant de caractériser les ouverts, fermés... d'un espace métrique. L'objet de cette section est de présenter ces critères

Proposition 68. *$O \subset E$ est ouvert ssi pour tout $x \in O$, pour toute suite x_n de E convergente vers x, x_n est dans O pour n assez grand.*

Démonstration Supposons O ouvert, alors il contient une boule $B(x, \epsilon)$ pour un $\epsilon > 0$. Si x_n converge vers x, alors pour n grand, $d(x_n, x) < \epsilon$ donc $x_n \in O$.

Réciproquement, supposons que O n'est pas ouvert et travaillons par contraposée. Alors il existe un $x \in O$ tel que pour tout n, la boule $B(x, \frac{1}{n})$ n'est pas incluse dans O. On choisit un élément x_n dans $B(x, \frac{1}{n})$. La suite x_n tend vers x car $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ mais x_n n'est pas dans O pour n grand.

Proposition 69. *$F \subset E$ est fermé ssi pour toute suite x_n de F convergente vers $x \in E$, on a $x \in F$.*

Démonstration Supposons F fermé et soit x_n convergente vers x. Si $x \notin F$, alors x est dans l'ouvert F^c, donc d'après la proposition précédente sur la caractérisation séquentielle des ouverts, $x_n \in F^c$ pour n grand, ce qui n'est pas le cas. Donc $x \in F$.

Réciproquement, supposons F non fermé et travaillons par contraposée. Alors F^c n'est pas ouvert et contient un point x tel que toute boule $B(x, \frac{1}{n})$ rencontre F. En choisissant $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, on a construit une suite de points de F qui converge vers un point $x \in E \setminus F$.

Proposition 70. *Soit $P \subset E$. Un point $x \in E$ est dans la frontière ∂P ssi il existe deux suites u_n et v_n dans P et $E \setminus P$ respectivement telles que u_n et v_n convergent vers x.*

Démonstration Si $x \in \partial P$, alors pour tout n, il existe $u_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap P$ et il existe $v_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap P^c$. Les suites u_n et v_n convergent vers x par construction.

Réciproquement, si $x \notin \partial P$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E$ ou $B(x, r) \subset E^c$. Supposons le premier cas par symétrie. Alors une suite v_n qui converge vers x est dans E pour n assez grand. Il n'y a donc pas de suite v_n dans $E \setminus P$ qui converge vers x.

Proposition 71. *Soit $P \subset E$. Un point $x \in E$ est dans $\overline{P} := P \cup \partial P$ ssi il existe une suite x_n dans P convergente vers x.*

Démonstration Soit $x \in P \cup \partial P$. Si $x \in P$, alors x est limite de la suite constante $x_n = x$. Si $x \in \partial P$, il est limite d'une suite x_n de P d'après la caractérisation séquentielle de la frontière.

Réciproquement, soit une suite x_n de P convergente vers x. On veut $x \in P \cup \partial P$. Si $x \in P$, on n'a rien à faire. Sinon, $x \in P^c$ donc x est limite de la suite constante y_n valant x qui est à valeurs dans P^c. Les suites x_n et y_n montrent par la caractérisation séquentielle de ∂P que $x \in \partial P$.

Exercice 26. Développement décimal d'un nombre réel. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $x_0 = x$, $a_0 = E(x_0)$ puis par récurrence $x_i = 10(x_{i-1} - a_{i-1})$, $a_i = E(x_i)$.

a)Vérifier pour $x = \pi$ que les a_i pour $i \geq 1$ correspondent aux décimales de x.

b)Montrer que pour tout $i > 0$, $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$.

c)Pour $k \geq 0$, on pose $y_k = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i 10^{-i}$. Calculer les premiers termes de la suite y_k quand $x = \pi$.

d)Montrer que la suite y_k converge vers x.

e)En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

En résumé, on a montré que tout réel x admet un développement décimal $x = a_0, a_1 a_2 \ldots.$ On veut maintenant faire l'inverse, à savoir partir d'une suite de nombres a_i et définir un nombre x.

f)Montrer que pour toute suite a_i d'entiers avec $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$ si $i > 0$, la suite y_k associée est de Cauchy.

g)On considère la suite $a_0 = 0$ et pour $i \geq 1$, $a_i = 9$. Montrer que la suite y_k correspondante converge vers 1. En d'autres termes le nombre 1 a deux developpements decimaux, à savoir $1 = 1,0000 \cdots = 0,9999 \ldots.$

h)Montrer que si un nombre x admet deux développements décimaux, l'un de ces développements décimaux admet une infinité de 9 comme dans le cas ci-dessus.

Correction 26. Développement décimal d'un nombre réel positif. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On pose $x_0 = x$, $a_0 = E(x_0)$ puis par récurrence $x_i = 10(x_{i-1} - a_{i-1})$, $a_i = E(x_i)$.

a)Pour $x = \pi$, on obtient $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4...$, $x_0 = 3.141592...$, $x_1 = 1.41592..$, $x_2 = 4.1592....$

b)Montrons que pour tout $i > 0$, $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$. On a $0 \leq x_{i-1} - E(x_{i-1}) < 1$ donc $0 \leq x_i < 10$ et $a_i = E(x_i) \in \{0, \ldots, 9\}$.

c)Pour $k \geq 0$, on pose $y_k = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i 10^{-i}$. Pour $x = \pi$, on obtient $y_0 = 3$, $y_1 = 3.1$, $y_2 = 3.14....$

d)Montrons par récurrence que $0 \leq x - y_k < \frac{1}{10^k}$, ce qui montrera que y_k converge vers x. Le résultat est clair pour $k = 0$. On a $y_{k+1} - x = y_k + a_k 10^{-k} - x$. Comme $a_k = E(10^k(x - y_k))$, on en déduit $0 \leq 10^k(x - y_k) - a_k < 1$, donc que $0 \leq x - y_k < \frac{1}{10^k}$.

e)Tout réel x est limite de la suite de rationels y_k, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

f)Pour toute suite a_i d'entiers avec $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$ si $i > 0$, la suite y_k associée est de Cauchy. En effet, si $l > k > 0$, $|y_l - y_k| = \sum_{i=k+1}^{l} a_i 10^{-i} \leq \sum_{i=k+1}^{l} 9.10^{-i} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} 9.10^{-i} = 10^{-k}$.

g)On considère la suite $a_0 = 0$ et pour $i \geq 1$, $a_i = 9$. Le terme y_k correspondant est la somme d'une serie géométrique qu'on calcule par la formule usuelle. On trouve $y_k = 1 - \frac{1}{10^k}$. En particulier y_k converge vers 1.
h)Il nous faut montrer que deux développements distincts qui ne finissent pas par une infinité de 9 représentent des nombres différents. Soit $x = a_0, a_1a_2\dots$ et $y = b_0, b_1b_2\dots$. Soit k le plus petit indice tel que $a_k \neq b_k$. Supposons par symétrie $a_k > b_k$. Soit $l > k$ tel que $b_l \neq 9$. Posons $c_l = b_l + 1$ et le développement $z = b_0, b_1b_2\dots b_{l-1}c_l000\dots$, $t = a_0, a_1a_2\dots a_k00\dots$.... L'inegalité voulue $x > y$ vient de la suite d'inégalités $x \geq t > z \geq y$.

Chapitre 4

Espaces topologiques généraux

Dans ce chapitre, nous introduisons une notion plus générale que celle des espaces métriques. Nous verrons que cette notion est utile notamment pour décrire les espaces quotients.

4.1 Definition d'un espace topologique

Définition 72. *Soit E un ensemble et $T \subset \mathcal{P}(E)$ un ensemble non vide de sous-ensembles de E. On dit que T est une topologie de E si:*

- *une union d'élements de T est dans T*
- *une intersection finie d'éléments de T est dans T.*

Un ensemble E muni d'une topologie est un espace topologique.

Exemple 73. *Les ouverts d'un espace métrique (E, d) forment une topologie de cet espace métrique d'après la proposition 41.*

Vous vous convaincrez que les deux exemples suivants sont des exemples évidents d'espace topologique.

Exemple 74. *L'ensemble à deux élements $T = \{\emptyset, E\}$ est une topologie sur E appelée topologie grossière.*

Exemple 75. *$T = \mathcal{P}(E)$ est une topologie sur E appelée topologie discrète.*

Exercice 27. Soit E un espace et $T \subset \mathcal{P}E$ défini par $O \subset E$ verifie $O \in T$ ssi $E \setminus O$ est un ensemble fini. Montrer que T est une topologie sur E.

Correction 27. Une intersection de sous-ensembles finis F_i est finie. Une réunion finie d'ensembles finis F_i est finie. En passant ces propriétés au complementaire, on obtient le résultat voulu: Si O_i sont des ouverts de O et $F_i = O_i^c$, $(\cup O_i)^c = \cap F_i$ et $(\cap_{i \in I, I\ fini} O_i) = \cup F_i$ donc T est stable par union et intersection finie.

On peut maintenant donner un sens précis au titre de ce cours : la topologie est l'étude des espaces topologiques. D'après l'exemple 73, cela inclut l'étude des espaces métriques du chapitre précédent. Néanmoins, la notion est plus générale. Certains espaces topologiques ne sont pas des espaces métriques car leur topologie n'est pas métrisable.

Définition 76. *Une topologie sur E est dite métrisable s'il existe une distance d sur E telle que la topologie est formée des ouverts de l'espace métrique (E, d).*

Nous allons montrer que la topologie grossière n'est pas métrisable sauf que E est réduit à un point. Pour cela, nous allons dégager une propriété vraie pour les topologies métrisables et qui n'est pas vraie ici.

Définition 77. *Une topologie T sur E est dite séparée si $\forall x, y \in E$, $\exists U, V \in T$, $x \in U, y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.*

Proposition 78. *Une topologie métrisable est séparée.*

Démonstration Si x, y sont deux points d'un espace métrique (E, d), et si $d = d(x, y)$, alors les ouverts $U = B(x, d/2)$ et $V = B(y, d/2)$ ne s'intersectent pas.

Proposition 79. *Si E contient au moins deux points, la topologie grossière n'est pas métrisable.*

Démonstration Soit $x \neq y$ deux éléments de E. Il n'y a qu'un ouvert U contenant x et qu'un ouvert V contenant y, c'est l'ensemble E tout entier. Donc $U \cap V = E \neq \emptyset$. La topologie grossière n'est donc pas séparée et par conséquent pas métrisable.

Exercice 28.
a)Montrer que la fonction $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ est une distance sur E.
b)Montrer que la topologie discrète est métrisable et définie par la distance de la question précédente.

Correction 28.
a)La séparation et la symétrie sont évidentes. Pour l'inégalité triangulaire, si x, y, z sont trois points deux à deux distincts, $d(x, z) = 1 < 2 = d(x, y) + d(y, z)$.
Si $(x = z) \neq y$, $d(x, z) = 0 < 2 = d(x, y) + d(y, z)$.
Si $(x = y) \neq z$, $d(x, z) = 1 \leq 1 = d(x, y) + d(y, z)$
Si $(y = z) \neq x$, $d(x, z) = 1 \leq 1 = d(x, y) + d(y, z)$
Enfin, si $x = y = z$, $d(x, z) = 0 \leq 0 = d(x, y) + d(y, z)$
b)Soit $\mathcal{P}(E)$ la topologie discrete sur E et T la topologie définie par la distance de la question précédente. On veut montrer $\mathcal{P}(E) = T$. L'inclusion $\mathcal{P}(E) \supset T$ est évidente. Réciproquement, soit $O \in \mathcal{P}(E)$. Puisque $O = \cup_{x \in O}\{x\}$, si on montre que $\{x\} \in T$, alors $O \in T$ car une union d'éléments de T est dans T. Or $\{x\} = B(x, \frac{1}{2})$ est une boule ouverte pour la distance d donc est dans T.

Exercice 29.
a)Montrer que la topologie T sur E dont les ouverts sont les complémentaires des ensembles finis est séparée si et seulement si E est fini.
b)En déduire que cette topologie est métrisable si et seulement si E est fini.

Correction 29.
a)Si E est un ensemble fini, la topologie T est la topologie discrète car dans ce cas, tout sous-ensemble de E est le complémentaire d'un ensemble fini. Or la topologie discrète est métrisable, donc T est séparée si E est fini.

Si E est infini, deux éléments U et V de T se rencontrent toujours. En effet si $U^c = \{p_1, \dots, p_k\}$ et $V = \{q_1, \dots, q_l\}$, n'importe quel point de E différent des p_i et des q_i est dans $U \cap V$. la topologie T n'est donc pas séparée.
b)Si E est fini, on a vu que T est la topologie discrète, donc métrisable. Si E est infini, on a vu que T n'est pas séparée donc pas métrisable.

Exercice 30. Montrer que la topologie grossière sur un ensemble non vide E est métrisable ssi l'ensemble sous jacent E est un singleton.

Correction 30. Si E a au moins deux points, la topologie grossière n'est pas séparée donc pas métrisable. Si $E = \{x\}$ est un singleton, la topologie grossière est métrisable et correspond à la distance définie par $d(x, x) = 0$.

4.2 Ouverts,fermés, frontière

Si l'on dispose d'une topologie, on peut redéfinir toutes les notions d'ouvert, fermé, voisinage... vues précédemment dans le cadre métrique.

Définition 80. *Les éléments d'une topologie T sont appelés les ouverts de la topologie T. Les complémentaires des ouverts sont appelés les fermés. Un voisinage de $x \in E$ est une partie $P \subset E$ contenant un ouvert O avec $x \in O$. La frontière ∂P d'une partie $P \subset E$ est formée par les points $x \in E$ pour lesquels : $\forall O \in T, x \in O \Rightarrow O \cap P \neq \emptyset, O \cap (E \setminus P) \neq \emptyset$.*

Nous voulons maintenant nous convaincre que nous pouvons redéfinir les notions dont nous avons besoin pour travailler, à savoir suites convergentes et continuité principalement, dans le cadre des espaces topologiques. Nous devons redémontrer des propriétés sans utiliser la notion de distance comme nous l'avions fait dans les espaces métriques, mais seulement en utilisant la notion d'ouverts et de fermés et ce qui en découle, sans utiliser de distance.

Par exemple, nous avions montré qu'une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ continue sur un compact K d'un espace métrique est bornée est atteint ses bornes. Peut-on produire un énoncé analogue en utilisant uniquement les notions d'ouverts et de fermés sans jamais utiliser de distance ? Qui sont les compacts ?

Les énoncés qui suivent sont souvent identiques à ceux vus dans les espaces métriques, avec des preuves plus générales. On se dit alors qu'on aurait pu directement étudier les espaces topologiques plutôt que commencer par les espaces métriques. C'est vrai d'un point de vue formel. Mais l'intuition topologique vient des espaces métriques. L'étude des espaces métriques est donc nécessaire pour que la topologie soit une matière concrète.

Puisque la notion de frontière est symétrique entre un ensemble et son complémentaire, on a :

Proposition 81. $\forall P \in E, \partial P = \partial(P^c)$

On peut également définir les notions d'adhérence et d'intérieur comme suit:

Définition 82. *L'adhérence d'une partie P est la partie $\overline{P} = P \cup \partial P$. L'intérieur $\mathring{P}$ d'une partie P est la partie $P \setminus \partial P$.*

On peut donner une caractérisation plus géométrique de l'adhérence et de l'intérieur:

Proposition 83. *L'adhérence de P dans E est le plus petit fermé de E contenant P. L'intérieur de P est le plus grand ouvert inclus dans P.*

Démonstration Montrons que l'interieur $\mathring{P}$ est ouvert. Soit $x \in \mathring{P} = P \setminus \partial P$. Alors il existe un ouvert U contenant x et ne rencontrant pas P^c. Vérifions que $U \subset \mathring{P}$: c'est clair car pour tout élément y de U, l'existence de l'ouvert U montre que $y \notin \partial P$.

Montrons maintent que $\mathring{P}$ est le plus grand ouvert inclus dans P. Soit Q un ouvert contenant P et $x \in \partial P$. Alors $x \notin Q$ sinon $Q \cap P^c \neq \emptyset$. Donc $Q \subset P$ et $Q \cap \partial P = \emptyset$, ce qui montre $Q \subset \mathring{P}$.

L'intérieur de P^c est $P^c \backslash \partial P$ est ouvert. Donc son complémentaire $P \cup \partial P$ est fermé. Si Q est un fermé contenant P, son complémentaire Q^c est un ouvert inclus dans P^c, donc $Q^c \subset (\mathring{P^c}) = P^c \setminus \partial P$. Par complémentarité, on en déduit que $Q \supset P \cup \partial P$, et donc que $\overline{P}$ est le plus petit fermé contenant P.

Définition 84. *Soit $P \subset E$. On appelle trace sur P d'un sous-ensemble $F \subset E$ le sous-ensemble $F \cap P$.*

Dans un espace métrique E, si on veut étudier un sous-ensemble $F \subset E$, on peut restreindre la distance de E aux points de F. Dans un espace topologique général, il faut définir des ouverts de F par restriction pour obtenir une topologie sur F.

Proposition 85. *Si T est une topologie de E, et $P \subset E$, la trace sur P des ouverts de T est une topologie T' sur P appelée topologie induite. En d'autres termes, $T' := \{O \cap P, O \in T\}$.*

Démonstration T' contient l'ensemble vide puisque $\emptyset \in T$. Soit $O_i' = O_i \cap P$ des ouverts de T'. L'union $\cup O_i' = \cup(O_i \cap P) = (\cup O_i) \cap P$ est dans T'. L'intersection $\cap O_i' = \cap(O_i \cap P) = (\cup O_i) \cap P$ est dans T' si c'est une intersection finie.

Exercice 31. Soit $P \subset E$.
a)Montrer que les fermés de la topologie induite T' sur P sont les traces des fermés de la topologie T de E.
b)Montrer que si E est séparé, P est séparé.

Correction 31.
a)Caractérisons les fermés F de P:

$$\begin{aligned} P \setminus F \in T' &\Rightarrow \exists O \in T, P \setminus F = O \cap P \\ &\Rightarrow F = P \setminus (O \cap P) = P \setminus O = P \cap (E \setminus O) \end{aligned}$$

Les fermés de P sont donc bien les traces des fermés de E.
b)Soit $x \neq y$ deux points de P. Il existe deux ouverts U, V de E contenant x et y et d'intersection vide. Les ouverts $U \cap P$ et $V \cap P$ sont des ouverts de V d'intersection vide qui montrent que la topologie de P est séparée.

4.3 Continuité et suites convergentes

Les notions de continuité et de suite convergente se prolongent aux espaces topologiques.

Définition 86. *Une fonction $f : (E, T) \to (E', T')$ est dite continue si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert de T' est un ouvert de T.*

La proposition suivante dit qu'il n'y a pas de contradiction entre la notion de continuité ci-dessus et celle que nous avions introduite pour les applications entre espaces métriques.

Proposition 87. *Soit E, d et E', d' des espaces métriques. Alors $f : E \to E'$ est continue au sens des espaces métriques si et seulement si elle est continue au sens des espaces topologiques.*

Démonstration Nous avons déja vu dans la proposition 47 que si $f : (E, d) \to (E', d')$ est continue entre espaces métriques, alors l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert. Réciproquement, supposons que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert et montrons f continue en tout point $x \in E$. Soit $\epsilon > 0$. L'image réciproque de la boule ouverte $B(f(x), \epsilon)$ est un ouvert contenant x, donc contient une boule $B(x, \eta)$. En particulier $d(y, x) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$, ce qui montre la continuité en x.

Proposition 88. *Une fonction $f : (E, T) \to (E', T')$ est continue si et seulement si l'image réciproque d'un fermé de T' est un fermé de T.*

Démonstration f est continue $\Leftrightarrow \forall O' \in T', f^{-1}(O') \in T \Leftrightarrow \forall F' = (O')^c$ fermé, $(f^{-1}(F'))^c = f^{-1}(O') \in T \Leftrightarrow \forall F'$ fermé, $(f^{-1}(F'))$ est fermé.

Définition 89. *Un homéomorphisme (ou isomorphisme d'espaces topologiques) est une application $f : E \to F$ entre espaces topologiques telle que:*

- *f bijective*
- *f continue*
- *f^{-1} continue.*

Exercice 32. Donner un exemple d'application f continue pour lequel f^{-1} n'est pas continue.

Correction 32. L'application $f : [0, 1[\to C := \{x^2 + y^2 = 1\}$, $t \to e^{2i\pi t} = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$ est une paramétrisation du cercle qui est bijective. Cette application est clairement continue. Son inverse $f^{-1} : C \to [0, 1[$ n'est pas continue en le point $M = (0,1)$. En effet, pour tout η, la boule $B(M,\eta)$ contient un point $N = (x, -\sqrt{1-x^2})$ avec x arbitrairement petit. Pour un tel N, $f^{-1}(N)$ est dans l'intervalle $[1/2, 1[$ car la coordonnée en y de N est négative. On a donc montré que f^{-1} n'est pas continue en M puisque $|f^{-1}(M) - f^{-1}(N)| > \epsilon = \frac{1}{4}$.

Définition 90. *Une suite u_n de l'espace topologique (E,T) converge vers u si $\forall O$ ouvert contenant u, $\exists N > 0$, $\forall n > N$, $u_n \in O$.*

Proposition 91. *Si la topologie est séparée, la limite d'une suite est unique.*

Démonstration Supposons que u_n tende vers u. Soit $v \neq u$. Il existe deux voisinages U et V de u et v avec $U \cap V = \emptyset$. Pour n grand, $u_n \in U$ donc $u_n \notin V$, ce qui montre que u_n ne tend pas vers v.

En particulier, les espaces métriques étant séparés, nous retrouvons la propriété que la limite d'une suite est unique dans les espaces métriques.

En revanche, la notion de limite n'est pas toujours utile dans les espaces non séparés car elle peut être très peu intuitive comme le montre l'exemple suivant.

Exercice 33. Soit E un ensemble muni de la topologie grossière et u_n une suite de E. Montrer que tout point de E est limite de u_n.

Correction 33. Si $x \in E$, il n'y a qu'un seul ouvert U contenant x pour la topologie grossière, à savoir $U = E$. Pour tout n, $u_n \in U$, donc u_n converge vers x.

4.4 Compacts

Définition 92. *Un espace topologique K est compact si pour tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, $K = \cup_{i\in I} U_i$, U_i ouvert $\Rightarrow \exists J \subset I, J$ fini, $K = \cup_{i\in J} U_i$.*

Remarque 93. *Certains auteurs choisissent de demander qu'un compact soit séparé. Notre définition de compact n'inclut pas la séparation.*

Proposition 94. *K est compact si et seulement si pour toute famille F_i de fermés de K tels que $\cap F_i = \emptyset$, $\exists J \subset I$, J fini tel que $\cap_{j\in J} F_j = \emptyset$.*

Démonstration Notons O_i l'ouvert complémentaire d'un fermé F_i. On a l'équivalence $\cap F_i = \emptyset \Leftrightarrow \cup O_i = K$. Donc l'enoncé sur les fermés est équivalent à la propriété sur les recouvrements ouverts de la définition par passage au complémentaire.

Définition 95. *Un espace topologique K est séquentiellement compact si pour toute suite u_n de K, on peut extraire une suite $u_{\varphi(n)}$ convergente.*

Théorème 96. *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si il est séquentiellement compact.*

En résumé, il y a deux façons "naturelles" de définir la compacité dans les espaces topologiques généraux : avec les suites ou avec les recouvrements. Pour les espaces métriques, ces deux notions coïncident et on peut donc utiliser l'une ou l'autre de ces notions indifféremment. Pour les espaces généraux, il faut distinguer les notions et on appelle "séquentiellement compact" la notion qui se définit par les suites.

Démonstration Supposons K séquentiellement compact et montrons que K est compact. Soit $K = \cup_{i\in I} U_i$ un recouvrement de K par des ouverts.

Nous commençons par raffiner le recouvrement. Il existe un r tel que toute boule $B(x, r)$ soit incluse dans l'un des U_i. En effet, si ce n'etait pas le cas, alors pour tout n, il existerait un x_n tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ ne soit incluse dans aucun U_i. On extrait de x_n une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ convergente vers x. Soit U_i un ouvert contenant x. Alors, il existe s tel que $B(x, s) \subset U_i$. Soit n assez grand pour que $d(x_{\varphi(n)}, x) < s/2$ et $\frac{1}{\varphi(n)} < \frac{s}{2}$. Alors $B(x_{\varphi(n)}, 1/\varphi(n)) \subset B(x, s) \subset U_i$. Contradiction.

On peut trouver un nombre fini de x_i tel que les boules $B(x_i, r)$ recouvrent K. En effet, si tel n'est pas le cas, la suite x_0 quelconque $x_1 \notin B(x_0, r), x_2 \notin B(x_0, r) \cup B(x_1, r)$... est une suite pour laquelle deux points quelconques x_i, x_j vérifient $d(x_i, x_j) \geq r$. En particulier, aucune suite extraite de x_i n'est de Cauchy et on ne peut pas extraire de suite convergente, contrairement à l'hypothèse de compacité séquentielle.

Notons r_i l'indice tel que $B(x_i, r) \subset U_{r_i}$. Puisque les $B(x_i, r)$ recouvrent K, les U_{r_i} recouvrent K a fortiori. Nous avons donc extrait le recouvrement fini cherché.

Réciproquement, supposons K compact et montrons K séquentiellement compact. Soit x_n une suite de K. Définissons la suite de fermés $F_i = \overline{\{x_k, k \geq i\}}$. Puisque la famille F_i est décroissante, si $n_1 < n_2 \cdots < n_k$, $\cap F_{n_i} = F_{n_k} \neq \emptyset$. Puisque toute famille finie de F_i est d'intersection non vide, on en déduit par compacité que l'intersection infinie des F_i est non vide et contient un point x.

Il nous reste à montrer qu'on peut extraire de x_n une suite $x_{\varphi(n)}$ tendant vers x. On pose $\varphi(1) = 1$. On va construire $\varphi(n)$ par récurrence de sorte que $d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$.

Supposons $\varphi(k)$ bien défini. Notons $G := \{x_i, i \geq \varphi(k) + 1\}$ de sorte que $F_{\varphi(k)+1}$ soit l'adhérence de G. Puisque $x \in F_{\varphi(k)+1} = G \cup \partial G$, on a $x \in G$

ou $x \in \partial G$. Dans le premier cas, il existe $j \geq \varphi(k)+1$ tel que $x_j = x$ et on pose $\varphi(k+1) = j$. Dans le second cas, il existe $j \geq \varphi(k)+1$ tel que $d(x_j, x) < \frac{1}{n}$ et on pose $\varphi(k+1) = j$, ce qui achève la construction de la suite extraite.

Proposition 97. *Soit $f : K \to L$ une application continue avec K compact. Alors $f(K)$ est un compact pour la topologie induite de L.*

Démonstration Soit $f(K) = \cup_{i\in I} U_i$ un recouvrement ouvert de $f(K)$. Chaque ouvert U_i de $f(K)$ pour la topologie induite est de la forme $O_i \cap f(K)$ avec O_i ouvert de L. Alors $K = f^{-1}(\cup U_i) = \cup f^{-1}(O_i \cap f(K)) = \cup f^{-1}(O_i)$. De ce recouvrement du compact K, on extrait un recouvrement fini $K = \cup_{i\in J} f^{-1}(O_i)$ avec $J \subset I, J$ fini. On en déduit $f(K) = \cup_{i\in J} O_i \cap f(K) = \cup_{i\in J} U_i$, qui est le recouvrement fini de $f(K)$ que l'on recherchait.

La définition de compacité a été choisie de sorte à retrouver le théorème dorénavant bien connu dans les espaces métriques:

Théorème 98. *Une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ continue sur K compact est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration On sait par la proposition précédente que $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Les compacts de $\mathbb{R}$ sont fermés bornés donc $sup(f(K)) < +\infty$, $inf(f(K)) > -\infty$ c'est à dire f bornée. De plus et $sup(f(K)) \in f(K)$ et $inf(f(K)) \in f(K)$, c'est à dire que les bornes de f sont atteintes.

On a admis implicitement la propriété suivante dans la démonstration :

Exercice 34. Montrer que si $E \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble fermé borné, $sup(E) \in E$.

Correction 34. Si $sup(E) \in E$, alors $sup(E) \in E^c$. Or E^c est ouvert dans $\mathbb{R}$, et contient alors une boule $B(sup(E), \epsilon)$ pour un $\epsilon > 0$. Tout $x \in E$ est alors inférieur à $sup(E) - \epsilon$ et $sup(E)$ n'est pas le plus petit majorant (par exemple $sup(E) - \epsilon/2$) est un majorant plus petit de E). Contradiction.

Proposition 99. *Soit $F \subset K$, K compact. Si F est fermé dans K, alors F est compact pour la topologie induite.*

Démonstration Supposons F fermé dans K compact. Soit $F = \cup F_i$ un recouvrement ouvert de F. Soit O_i ouvert de K tel que $F_i = F \cap O_i$. Alors $F = \cup(O_i \cap F) = F \cap (\cup O_i)$. On a alors le recouvrement ouvert $K = \cup O_i \cup F^c$. On en extrait le recouvrement fini $K = \cup_{i\in J, fini} O_i \cup F^c$. En intersectant avec F, on obtient $F = \cup i \in J, fini F_i$, qui est le recouvrement fini montrant la compacité de F.

Proposition 100. *Soit E un espace topologique séparé. Si $F \subset E$ est compact pour la topologie induite, alors F est fermé dans E.*

Réciproquement, supposons F compact dans E séparé. Soit $x \in F^c$. Par hypothèse de séparation, pour tout point $f \in F$, il existe des ouverts U_f, V_f de E contenant respectivement x et f qui ne s'intersectent pas. Les ouverts de F $V_f \cap F$ recouvrent F. Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini $F = \cup_{f \in I, fini} V_f \cap F$, c'est à dire $\cup_{f \in I, fini} V_f \supset F$. L'ouvert $U_x := \cap_{f \in I} U_f$ ne rencontre pas $\cup_{f \in V_f}$, donc ne rencontre pas F. Ceci montre que F^c est ouvert.

Les deux dernières propositions impliquent immediatement le résultat suivant:

Proposition 101. *Soit K un compact séparé et $F \subset K$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- *F est compact pour la topologie induite*
- *F est fermé dans K.*

Exercice 35. Donner un exemple d'inclusion $F \subset E$ avec F compact mais non fermé dans E.

Correction 35. On prend par exemple E avec au moins deux points et $F = \{x\}$ un singleton. F est clairement compact comme tous les ensembles finis. Mais l'adhérence de F est E tout entier, ce qui montre que F n'est pas fermé.

Nous avons vu que les images réciproques de fermés par les applications continues sont des fermés. Ce n'est pas vrai pour l'image directe.

Exercice 36.
a)Donner un exemple d'application $f : D \to E$ continue et d'un fermé $F \subset D$ tel que $f(F)$ n'est pas fermé dans E.

Correction 36. On peut prendre $f : D =]0, 1[\to E = \mathbb{R}$ l'injection usuelle. Le sous-ensemble $F = D$ est fermé dans D mais son image $f(D) =]0, 1[$ n'est pas fermée dans $\mathbb{R}$.

Néanmoins, Dans le cas particulier où l'ensemble de départ est compact et celui d'arrivée séparé, l'image continue d'un fermé est fermé.

Proposition 102. *Si $f : K \to E$ est continue, et si E est séparé, l'image $f(F)$ d'un fermé $F \subset K$ est un fermé de E.*

Démonstration Puisque F est fermé dans le compact K, F est compact. L'image continue d'un compact étant compact, $f(F)$ est compact dans E séparé. On en déduit que $f(F)$ est fermé dans E.

On en déduit le critère suivant bien utile pour démontrer qu'un bijection continue est un homéomorphismes (rappelons l'exercice 32 qui dit qu'une bijection continue n'est pas un homéomorphisme en général).

Proposition 103. *Soit $f : K \to E$ une application continue bijective d'un espace compact K dans un espace séparé E. Alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration Il suffit de démontrer que $g = f^{-1}$ est continue, ou encore que si F est fermé dans K, $g^{-1}(F) = f(F)$ est fermé dans E, ce qui est une conséquence de la proposition précédente.

4.5 Topologie quotient

Considérons le carré $C = [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$, le cercle D d'équation $x^2 + y^2$, et le cylindre $E := \{(x,y,z), (x,y) \in D, z \in [0,1]\}$. Si l'on recolle les 2 bords droits du carré ensemble, on devrait obtenir le cyclindre E.

Lorsqu'on fait une opération de recollement, il n'y a pas de distance naturelle sur l'objet que l'on construit : penser à une feuille de papier que l'on plie, la feuille se chiffonne et les distances entre les points de la feuille pliée ne peuvent pas être décrites par des formules. Cela depend de la façon dont on a chiffonné la feuille pour faire le pliage. Il n'y a donc pas de distance, mais néanmoins, il y a une topologie naturelle qui s'appelle la topologie quotient et qui fait de la feuille pliée un objet géométrique naturel.

Le but de ce paragraphe est de définir la notion de topologie quotient, et de montrer que le recollement des 2 bords du carré donne bien un cylindre, conformément à notre intuition.

Cette construction justifie l'intérêt des définitions topologiques générales de ce chapitre, qui ont pu sembler abstraites et moins faciles à manipuler que les définitions correspondantes dans les espaces métriques. Au dela de l'exemple du cylindre obtenu par recollement du carré, de nombreux autres objets géométriques simples sont obtenus par recollement. Ils sont des espaces topologiques, mais ne sont pas naturellement des espaces métriques. Nous avons donc besoin des espaces topologiques généraux pour étudier ces objets.

Définition 104. *Soit $R \subset E \times E$ une relation d'equivalence sur un ensemble E et E/R l'ensemble quotient obtenu par l'identification $x = y$ si $(x,y) \in$*

R. Soit $f : E \to E/R$ la projection naturelle. Si (E,T) est un espace topologique, la topologie quotient T' de E/R est définie par $O' \in T'$ ssi $f^{-1}(O') \in T$.

Remarque 105. *La projection $f : E \to E/R$ est continue puisque l'image d'un ouvert de E/R est un ouvert de E par définition de la topologie quotient.*

Définition 106. *Un sous-ensemble F de E est saturé pour la relation R si $\forall x \in F,\ (x,y) \in R \Rightarrow y \in F$.*

Exercice 37. Montrer que les ouverts de la topologie quotient T' de E/R sont les images des ouverts saturés de E par l'application quotient $f : E \to E/R$.

Correction 37. Remarquons que si $P \subset E$ est un ensemble quelconque, $f^{-1}(f(P))$ est l'ensemble $\{e \in E, \exists p \in P, (e,p) \in R\}$. Soit O un ouvert saturé de E. Alors $f^{-1}(f(O)) = O$ d'après la remarque et par définition d'un ouvert saturé. Cette égalité montre que $f(O)$ est ouvert.

Remarquons que si $Q \subset E/R$ est un ensemble quelconque, $f^{-1}(Q)$ est un ensemble saturé. Si O' est un ouvert de T', l'égalité $O' = f(f^{-1}(O'))$ est vraie car f surjective et cette égalité montre que O est bien l'image d'un ouvert saturé.

Pour recoller les bords du carré, on décrète que les points $(0,x)$ et $(1,x)$ sont égaux pour tout x. En termes rigoureux, on travaille modulo une relation d'equivalence.

On note donc R la relation d'équivalence définie par $((0,x),(1,x)) \in R$ et C/R le quotient de C par la relation d'équivalence. On munit C/R de la topologie quotient. Nous sommes maintenant en mesure de montrer que le recollement des 2 côtés du carré donne bien le cylindre. C'est ce qu'affirme le résultat suivant:

Proposition 107. *Le quotient C/R du carré C par la relation d'équivalence R est homéomorphe au cylindre E.*

Démonstration Considérons l'application $f : C \to E$, $(x,y) \mapsto (cos(2\pi x), sin(2\pi x), y)$. C'est une application continue. En raison de la périodicité des fonctions cosinus et sinus, deux points $M_1 = (x_1,y_1)$ et $M_2 = (x_2,y_2)$ vérifient $f(M_1) = f(M_2)$ si et seulement si $y_1 = y_2$ et $x_1 - x_2 \in \{-1,0,1\}$. En d'autres termes, $f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow (M_1,M_2) \in R$.

On sait alors par le cours d'algèbre que la fonction f passe au quotient et se factorise par une application $\overline{f} : C/R \to E$ qui est injective. Puisque f est surjective, $\overline{f}$ est surjective également.

Notons p la projection $p : C \to C/R$. Si O est un ouvert de E, $\overline{f}^{-1}(O)$ est un ouvert de C/R car $p^{-1}(\overline{f}^{-1}(O)) = f^{-1}(O)$ et f est continue.

Le quotient C/R est compact, car il est l'image du compact C par l'application continue $p : C \to C/R$.

En résumé, $\overline{f}$ est une application continue, bijective et l'espace de départ C/R est compact, donc $\overline{f}$ est un homéomorphisme.

Chapitre 5

Connexité

5.1 Espaces topologiques connexes

Définition 108. *Un espace topologique E non vide est connexe si pour tout recouvrement $E = U \cup V$ de E par deux ouverts disjoints, on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.*

Intuitivement, un ensemble est connexe s'il est fait d'un seul morceau. Par exemple, nous vérifierons qu'un intervalle est connexe, tandis que la reunion de deux intervalles $[a, b] \cup [c, d]$ avec $a < b < c < d$ ne l'est pas, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 38.
a)L'ensemble réduit à un point p est connexe.
b)La reunion de deux intervalles $[a, b] \cup [c, d]$ avec $a < b < c < d$ n'est pas connexe.

Correction 38.
a)Le seul recouvrement possible de $\{p\}$ est donné par $U = \{p\}$ et $V = \emptyset$ à echange de U et V près, donc le singleton $\{p\}$ est connexe.
b)L'intervalle $[a, b]$ est ouvert dans la réunion $R = [a, b] \cup [c, d]$ car dans R, la réunion des boules $B(x, \frac{c-b}{2})$ avec $x \in [a, b]$ est le segment $[a, b]$. De même $[c, d]$ est ouvert dans R. Donc $R = [a, b] \cup [c, d]$ est un recouvrement de R par deux ouverts disjoints.

Proposition 109. *E est connexe si et seulement si les seuls ensembles à la fois ouvert et fermé sont $\emptyset$ et E.*

Démonstration Soit E connexe et $P \subset E$ un ensemble à la fois ouvert et fermé. Alors $P^c = E \setminus P$ est également ouvert et fermé. Et $E = P \cup P^c$. Par connexité, on en déduit que $P = \emptyset$ ou que $P = E$.

Réciproquement, supposons E non connexe et soit $E = U \cup V$ un recouvrement de E par deux ouverts disjoints. Alors $V = U^c$ et $U = V^c$ sont fermés. Les ensembles U et V sont différents de $\emptyset$ et E et sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 110. *Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est connexe.*

Démonstration Soit $I = U \cup V$ une écriture de I comme réunion disjointe de deux ouverts non vides. Soit $u \in U$ et $v \in V$. On a $u < v$ ou $v < u$. Par symétrie, supposons $u < v$. Posons alors $u_0 = u$ et $v_0 = v$, $w_0 = \frac{u_0+v_0}{2}$. On définit ensuite les suites u_i, v_i, w_i par récurrence et par les formules $u_i = w_{i-1}$ si $w_{i-1} \in U$ et $u_i = u_{i-1}$ sinon, $v_i = v_{i-1}$ si $w_{i-1} \in U$ et $v_i = w_{i-1}$ sinon, $w_i = \frac{u_i+v_i}{2}$. Les suites u_i et v_i sont adjacentes donc convergent vers la même limite x. Puisque $x = \lim u_n$ est une limite de suite à valeurs dans le fermé $U = V^c$, on a $x \in U$ d'après la caractérisation séquentielle des fermés. Par symétrie, on a de même $x \in V$. Contradiction puisque U et V sont disjoints par hypothèse.

Proposition 111. *Un ensemble non vide E est connexe si toute fonction continue $f : E \to \{0,1\}$ est constante (où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète).*

Démonstration Supposons E non connexe et soit $E = U \cup V$ une écriture de E comme réunion de deux ouverts disjoints. Définissons f comme étant la fonction valant 0 sur U et 1 sur V. Les ouverts de $\{0,1\}$ sont $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ dont les images réciproques par f sont respectivement $\emptyset, U, V, E$. L'image réciproque de tout ouvert étant un ouvert, f est continue.

Réciproquement, supposons E connexe et $f : E \to \{0,1\}$ continue. Alors $E = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ est une réunion de deux ouverts disjoints recouvrant E. L'un de ces ouverts est donc E et l'autre vide. Par symétrie, on peut supposer que $f^{-1}(\{0\}) = E$, ce qui veut dire que f est constante égale à zéro.

Proposition 112. *Soit $f : E \to F$ continue avec E connexe. Alors $f(E)$ est connexe.*

Démonstration Soit $f(E) = U \cup V$ une écriture de $f(E)$ comme réunion de deux ouverts disjoints. Alors $E = f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ est également une réunion de deux ouverts disjoints. Donc, l'un de ces ouverts, par exemple $f^{-1}(U)$, est vide. Donc $U = f(f^{-1}(U)) = \emptyset$, ce qui montre la connexité de $f(E)$.

Corollaire 113. *Les cercles et les droites sont des ensembles connexes du plan.*

Démonstration Le cercle de centre M et de rayon r est l'image du segment $[0, 2\pi]$, qui est connexe, par l'application continue $\theta \mapsto M + re^{i\theta}$. Une droite passant par les points M et N est l'image de $\mathbb{R}$, connexe, par l'application $x \mapsto M + x\,\overrightarrow{MN}$.

Exercice 39. Montrer qu'un produit d'intervalles $P = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ est connexe.

Correction 39. Soit U un ensemble non vide ouvert et fermé dans P. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. L'intersection $U \cap (I_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'identifie à un sous-ensemble de I_1 qui est ouvert et fermé, et non vide car x_1 est dans cette intersection. Par connexité, cette intersection est donc égale à I. En d'autres termes pour tout $y_1 \in I_1$, $(y_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$.

On suppose par récurrence que pour $y_1 \in I_1, \ldots, y_{k-1} \in I_{k-1}$, $(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, \ldots, x_n) \in U$. Alors, l'intersection $U \cap (y_1, \ldots, y_{k-1}, I_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ s'identifie à un sous-ensemble de I_k qui est à la fois ouvert et fermé et qui contient x_k. On en déduit comme précédemment que $y_1 \in I_1, \ldots, y_k \in I_k$, $(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in U$.

Pour $k = n$, la récurrence montre que $U = P$, ce qui prouve la connexité de P.

Exercice 40.
a)Montrer que l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est connexe.
b)Montrer que l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ est connexe. Même question pour l'extérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ est connexe.
c)Montrer que le complémentaire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \neq 1$ n'est pas connexe.

Correction 40.
a)L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est connexe car c'est l'image du segment $[0, 2\pi]$ qui est connexe par l'application continue $\theta \mapsto (a\cos(\theta), b\sin(\theta))$.
b)L'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ est connexe c'est l'image du produit de segments $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ qui est connexe par l'application continue $(\theta, r) \mapsto (ar\cos(\theta), br\sin(\theta))$. L'extérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ est connexe car c'est l'image de $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ par l'application définie par les mêmes formules.
c)Le complémentaire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \neq 1$ n'est pas connexe.

En effet si l'on définit f par $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+,\ (r, \theta) \mapsto (ar\cos(\theta), br\sin(\theta))$, alors $U = f^{-1}([0, 2\pi] \times]1, \infty[)$ et $V == f^{-1}([0, 2\pi] \times]1, \infty[)$ sont ouverts, non vides et disjoints dans ce complémentaire, ce qui montre la non connexité du complémentaire de l'ellipse.

Proposition 114. *Si $E \subset X$ est connexe, son adhérence $\overline{E}$ est également connexe.*

Démonstration Soit $f : \overline{E} \to \{0, 1\}$ une application continue. On veut montrer que f est constante. La restriction $f_{|E}$ de f à E est continue et E est connexe, donc cette restriction est constante. On peut supposer qu'elle vaut $\{0\}$. Alors $f^{-1}(0)$ est un fermé de $\overline{E}$ qui contient E. Mais comme $\overline{E}$ est le plus petit fermé (de E mais aussi de $\overline{E}$) contenant E, on en déduit que $f^{-1}(0) = \overline{E}$, c'est à dire que f est constante égale à zéro.

Proposition 115. *Si $P \subset E$ et $Q \subset E$ sont deux sous-ensembles connexes avec $P \cap Q \neq \emptyset$, alors $P \cup Q$ est connexe.*

Démonstration Soit $x \in P \cap Q$ et $f : P \cup Q \to \{0, 1\}$ une application continue. La restriction de f à P est constante égale à $c \in \{0, 1\}$ car P est connexe et la restriction d'une fonction continue est continue. De même la restriction de f à Q est une constante d. Puisque $x \in P \cap Q$, on a $c = f(x) = d$. Donc f est constante.

Exercice 41.
a)La réunion des droites de pente rationnelle $y = ax$, avec $a \in \mathbb{Q}$ est connexe.

Correction 41.
a)Chaque droite est connexe et les droites se coupent en le point $(0, 0)$. Par une généralisation directe de la proposition 115, on en déduit que la réunion est connexe.

5.2 Composantes connexes

Lorsque l'espace E n'est pas connexe, on peut être plus précis et dénombrer le nombre de morceaux qui le composent. Par exemple, intuitivement, l'ensemble $[0, 1] \cup [2, 3]$ est composé de deux morceaux distincts. Dans la terminologie que nous emploierons, les morceaux s'appeleront les composantes connexes.

Définition 116. *On dit que $P \subset E$ est une composante connexe de E si P est connexe et si P est maximal pour cette propriété: $\forall Q \subset E$, Q connexe et $Q \supset P \Rightarrow P = Q$.*

Exercice 42.
a)Montrer que $[0,1]$ et $[2,3]$ sont des composantes connexes de $E = [0,1] \cup [2,3]$

Correction 42.
a)Notons que $I = [0,1]$ est ouvert et fermé dans E, et connexe car c'est un segment. C'est un connexe maximal de E car si $F \subset [0,1]$ est un ensemble plus grand que E et connexe, $F \cap [0,1] = [0,1]$ est ouvert et fermé de F. Donc par connexité $F = [0,1]$.

De même, $[2,3]$ est un connexe maximal. Les composantes connexes sont bien $[0,1]$ et $[2,3]$.

Proposition 117. *Deux composantes connexes de E distinctes ne s'intersectent pas.*

Démonstration Si deux composantes distinctes P et Q s'intersectaient, leur réunion serait un connexe plus gros d'aprés la proposition 115, contredisant la maximalité des composantes connexes.

Proposition 118. *Si $P \subset E$ est connexe, alors il est inclus dans une unique composante connexe de E.*

Démonstration La réunion R des connexes contenant P est un ensemble non vide (car contient P), connexe. Pour vérifier que R est une composante connexe, il suffit de voir que R est maximal. Si S est une composante connexe contenant R, alors S contient P. Donc par définition de R, on a $R = S \cup AutresEnsemblesConnexes$. Donc $R \supset S$.

On a donc vérifié que P est inclus dans une composante connexe R. Si S est une autre composante connexe avec $P \subset S$, alors R et S sont deux connexes qui se rencontrent (en P), donc $R = S$ et R est bien l'unique composante connexe contenant P.

Corollaire 119. *Tout espace topologique E est l'union disjointe de ses différentes composantes connexes.*

Démonstration Puisque les composantes C_i ne s'intersectent pas, on a bien une union disjointe $\coprod C_i \subset E$. Vérifions l'inclusion inverse. Soit $x \in E$. Puisque $\{x\}$ est un ensemble connexe, il est inclus dans une composante connexe C_i et l'union des C_i contient bien chaque point x.

Exercice 43. Trouver les composantes connexes de $\mathbb{Q}$.

Correction 43. Montrons que les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons $\{x\}$. Un singleton est évidemment connexe. Montrons qu'il est maximal. Si $F \supset \mathbb{Q}$ n'est pas un singleton, alors il contient deux points x, y avec $x < y$. Soit z un réel non rationel verifiant $x < z < y$. Alors $U = F \cap]-\infty, z[$ est un ouvert de F contenant x. De même, $V = F \cap]z, \infty[$ est un ouvert de F contenant y et $F = U \cup V$ est non connexe car réunion de deux ouverts disjoints non vides.

5.3 Connexité par arcs

Une autre façon de dire qu'un ensemble est fait "d'un seul morceau" est de dire que les points de cet ensemble peuvent être reliés entre eux par des morceaux de courbe. C'est la notion de connexit'e par arcs.

Définition 120. *Un espace topologique E est connexe par arcs s'il est non vide et si pour toute paire de points $(p, q) \in E$, il existe une fonction $f : [0, 1] \to E$, f continue, $f(0) = p$, $f(1) = q$.*

Proposition 121. *Si E est connexe par arcs, alors il est connexe.*

Démonstration Soit $g : E \to \{0, 1\}$ une application continue. Montrons que g est constante. Soit $p, q \in E$. Il existe une fonction $f : [0, 1] \to E$, f continue, $f(0) = p$, $f(1) = q$. La fonction $h = g \circ f$ est continue sur le segment $[0, 1]$ connexe, donc constante. Donc $g(p) = h(0) = h(1) = g(q)$, ce qui montre que g est constante.

Définition 122. *Un sous-ensemble $P \subset E$ est une composante connexe par arcs, si P est connexe par arcs et maximal pour cette propriété.*

La même démonstration que pour les composantes connexes montre que E est union disjointes de ses composantes connexes par arcs.

La notion de connexité par arcs est parfois plus facile à vérifier sur des exemples et plus intuitive que la notion de connexité. Néanmoins, elle est moins souple car l'adhérence d'un ensemble connexe par arcs n'est pas connexe par arcs en général, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 44.
a)Soit $E \subset \mathbb{R}^2$, $E := (x, sin(1/x))$, $x > 0$. Montrer que E est connexe et connexe par arcs.
b)Montrer que l'adhérence de E est $E \cup S$, avec $S := \{(0, y), y \in [0, 1]\}$.
c)Montrer que $\overline{E}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Correction 44.
a)E est connexe car $E = f(\mathbb{R}^{+*}$ avec $f(x) = (x, sin(1/x))$ qui est continue et $\mathbb{R}^{+*}$ est connexe. En outre, E est connexe par arcs car si deux points $(x, sin(1/x))$ et $(y, sin(1/y))$ sont dans E, il sont reliés par la courbe paramétrée $f : [0,1] \to E$, $t \mapsto (z = x + t(y-x), sin(1/z))$.
b)Puisque E est inclus dans le fermé $F = (\mathbb{R} \times [0,1]) \cap (\mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que $\overline{E} \subset F$.

L'application $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (x, sin(1/x)$ est continue, donc son graphe E est fermé dans $P = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. En particulier, $\overline{E} \cap P = E$. On en déduit $\overline{E} \subset (P \cap \overline{E}) \cup (F \setminus P) = E \cup S$.

Il reste à montrer que $S \subset \overline{E}$ pour obtenir l'égalité $\overline{E} = \cup E \cup S$. Soit $(0, y) \in S$. Soit θ tel que $sin(\theta) = y$. La suite $M_n = \frac{1}{x_n := \theta + 2n\pi}, sin(1/x_n))$ converge vers $(0, y)$. Puisque c'est une suite de E, sa limite $(0, y)$ est bien dans $\overline{E}$.

Il y a néanmoins un cas où les deux notions de connexité et de connexité par arcs co ıncident, c'est lorsque l'ensemble E est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 45.
a)Montrer que les composantes connexes de E sont fermées dans E.
b)Montrer que si E est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, les composantes connexes et connexes par arc de E sont des ouverts.
c)Montrer que toute composante connexe de E est union disjointe de composantes connexes par arcs.
d)Conclure que si E est ouvert de $\mathbb{R}^n$, les composantes connexes et connexes par arcs coïncident.

Correction 45.
a)Les composantes connexes de E sont fermées dans E car si une composante C n'était pas fermée, son adhérence $\overline{C}$ serait un connexe plus grand que C.
b)Montrer que si E est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, les composantes connexes et connexes par arc de E sont des ouverts. En effet, soit C une composante connexe (resp. connexe par arcs) et $x \in C$. Soit r tel que $B(x, r) \subset E$. Puisque $B(x, r)$ est connexe (resp. connexe par arcs) et rencontre le connexe (resp. par arcs) C, $C \cup B(x, r)$ est encore connexe (resp. par arcs). Par maximalité de la composante C, on en déduit $B(x, r) \subset C$ et C est ouvert.
c)Soit C une composante connexe de E et D une composante connexe par arcs qui rencontre C. Alors $C \cup D$ est connexe, donc par maximalité de C, on en déduit $C \supset D$. Notons D_x la composante connexe par arcs contenant x. Alors $C = \cup_{x \in C} D_x$ d'après ce qui précède. Deux plus, deux composantes

D_x sont égales ou disjointes. Donc C est union disjointe de composantes connexes par arcs.

d)Conclure que si E est ouvert de $\mathbb{R}^n$, les composantes connexes et connexes par arcs coïncident. En effet, d'après les questions précédentes une composante connexe C est réunion de composantes connexes D_x et C comme les D_x sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si il y a deux composantes distinctes D_x et D_y dans l'ecriture $C = \cup_{x \in C} D_x$ alors C ne serait pas connexe car $C = D_x \cup (\cup_{D_y \neq D_x} D_y$ serait une écriture de C comme réunion d'ouverts disjoints. On en déduit que $C = D_x$ est une composante connexe par arcs.