Licence à distance.

Laurent Evain (laurent.evain@univ-angers.fr)

Cours d'équations différentielles

Chapitre 1

Premiers exemples d' équations différentielles

Nous commencerons ce cours d'équations différentielles par quelques exemples pour fixer les idées. Une équation différentielle est une équation liant une fonction d'une variable réelle et ses dérivées. Les exemples viennent en général de la physique. Voici pour commencer l'équation gérant la transmission de chaleur entre un corps froid homogène et une source chaude constante.

1.1 Un exemple simple en thermique

Exemple 1. *Un corps froid est initialement à une température $T(0)$ de 20 degrés. On le place dans un four à 100 degrés. Sa température en fonction du temps t vérifie une équation différentielle de la forme $T'(t) = c(100-T(t))$ où c est une constante qui dépend des conditions physiques (forme et matériau constituant l'objet).*

L'exercice suivant montre que l'équation admet une infinité de solutions, qui dépendent d'un paramètre K. À chaque fois que l'on fixe un K, on a une solution différente.

Exercice 1. Vérifier que $T(t) = 100 - Ke^{-ct}$ est bien solution de l'équation différentielle $T'(t) = c(100 - T(t))$.

Correction 1. On a $T' = Kce^{-ct}$ qui est bien $c(100 - T)$.

En d'autres termes, on ne peut pas prévoir l'évolution de la température uniquement à partir de l'équation. L'explication est simple: l'équation

$T'(t) = c(100 - T(t))$ ne dépend pas de la température initiale du corps froid; elle ne dépend que de l'environnement dans lequel se situe l'expérience, via les constantes c et 100. Or physiquement, on sait que la température d'une casserolle mise sur le feu monte d'abord très vite, puis plus lentement. De même, on devine que l'évolution de la température du corps mis dans le four dépend de sa température initiale. Si l'on veut prédire l'évolution de la température, il faut intégrer la température initiale dans notre raisonnement. Parmi toutes les solutions, une seule est compatible avec la température initiale du corps froid. À $t = 0$, T vaut $100 - K$. Pour que la solution $T(t) = 100 - Ke^{-ct}$ corresponde à notre problème physique, il faut donc $K = 80$. La température du corps est $T = 80e^{-ct}$ dans les conditions de notre expérience.

Cet exemple est assez typique de l'étude des équations différentielles. Les équations viennent en majorité de la physique. Dans ce contexte, il y a des paramètres fixes qui restent constants et qui sont les paramètres de notre expérience. Dans notre cas, les paramètres constants étaient les matériaux mis en jeu et la température du four, supposée fixe. Ces paramètres constants apparaissent souvent indirectement, comme ici où de nombreux paramètres (forme du corps, capacité thermique...) sont agrégés dans la constante c. Et il y a des paramètres qui varient et dont on a besoin de connaître les conditions initiales. Les conditions initiales n'apparaissent pas dans l'équation mais permettent de choisir parmi toutes les solutions celles qui correspond à notre expérience.

En résumé, pour décrire l'évolution du système physique, il faut savoir à la fois d'où l'on part (les conditions initiales) et quelle est la règle d'évolution (l'équation différentielle).

1.2 Un exemple en mécanique d'équation d'ordre deux

Une équation différentielle relie par définition une fonction et ses dérivées. Mais on s'autorise dans ce cadre à considérer des équations que ne contiennent que les dérivées, sans que la fonction n'apparaisse. Par exemple une particule qui se déplace sur une droite est repéré par sa position $x(t)$. Si la particule n'est soumise à aucune force, les lois de Newton nous disent que l'accélération, c'est à dire la dérivée seconde, est nulle:

$$x'' = 0$$

On a affaire ici à une équation du second ordre, c'est à dire à une équation qui inclut des dérivées secondes. La premier exemple avec la température était une équation du premier ordre, qui incluait seulement des dérivées du premier ordre. Si l'on mélange des dérivées de différents ordres, l'ordre de l'équation différentielle est donné par définition par la plus grande dérivée. Par exemple l'équation

$$x'' ln((x')^2) + 3x = 5$$

inclut des dérivées première et seconde, c'est donc une équation différentielle du second ordre.

1.3 Un exemple en dimension supérieure

Les exemples précédents concernent des fonctions $x(t)$ et $T(t)$ qui sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'espace d'arrivée peut être de dimension supérieure. Voici un exemple avec une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Un point matériel dans l'espace est repéré par ses 3 coordonnées x, y, z qui dépendent du temps t. Il est donc représenté mathématiquement par une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto P(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Une particule dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ vérifie l'équation

$$(\vec{P})'' = \vec{g}.$$

En France, dans un repère orthonormal avec l'axe des z orienté verticalement vers le haut, et les unités du système international, on a $\vec{g} = (0, 0, -9.81)$. L'équation précédente peut alors se réecrire sous forme de système

$$\begin{aligned} x'' &= 0 \\ y'' &= 0 \\ z'' &= -9.81 \end{aligned}$$

Pour les conditions initiales, on sait par experience physique qu'il ne suffit pas de savoir depuis quel endroit on lance le caillou pour déterminer la trajectoire d'un caillou. La trajectoire est différente si l'on lance le caillou verticalement ou horizontalement, et suivant la vitesse du lancer. Il y a un analogue mathématique à cette connaissance expérimentale, qui dit que pour choisir parmi toutes les solutions de l'équation celle qui correspond à notre expérience, il faut et il suffit de connaître les données $P(0)$ et $P'(0)$.

La question qui se pose est évidemment de savoir si on peut identifier des classes d'équations pour lesquelles on peut énumérer les conditions initiales requises.

Dans l'exemple du lancer de caillou, l'espace d'arrivée de la fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ qu'on cherche à déterminer est de dimension trois. Ce n'est plus $\mathbb{R}$. On est toujours dans le cadre des équations différentielles.

Si en revanche, c'est l'espace de départ qui n'est pas $\mathbb{R}$ et qui est de dimension supérieure, on sort du cadre des équations différentielles pour rentrer dans le cadre des équations aux dérivées partielles.

Voici un exemple d'une équation aux dérivées partielles (edp) qui porte sur une fonction $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de deux variables.

Une barre métallique a une température $T(x,t)$ qui dépend du temps t et de la position x sur la barre. Si la barre n'est pas soumise à des échanges de chaleur avec l'extérieur, l'équation de propagation de la chaleur est

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + c\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

où c est une constante positive. On voit ici qu'il faut remplacer les dérivées usuelles par des dérivées partielles. On dit qu'on a une équation au dérivées partielles.

Les edp sont légion dans le monde physique. Elles sont toutes aussi nombreuses et importantes que les équations différentielles. Néanmoins, les edp sont bien plus difficiles à étudier que les équations différentielles et elles nécessitent des méthodes spécifiques. Même des équations standard comme les équations de Navier-Stokes qui gèrent les écoulements de fluide sont encore incomprises dans leur généralité. Elles font partie de la liste des problèmes à un million de dollars publié l'institut Clay en l'an 2000.

Pour cette raison, les edp constituent un champ disciplinaire spécifique et ne sont pas étudiées dans les cours d'équations différentielles. En résumé, dans le cadre de ce cours, l'espace de départ sera toujours $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.4 But du cours

Partant des exemples précédents, nous voyons se dessiner les résultats que nous chercherons à obtenir pour les équations différentielles :

- Des formules explicites pour les solutions quand c'est possible
- Des méthodes pour trouver ces formules

Quand il n'existera pas de formule simple pour les solutions (ce qui sera le cas la plupart du temps en dehors des exemples simples), nous chercherons :

- Des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions (en précisant les conditions initiales dont on a besoin)
- Des éléments d'étude qualitative pour décrire physiquement le système (équilibres stables ou instables par exemple).
- Des algorithmes pour calculer les solutions numériquement avec l'aide d'un ordinateur.

Si l'on préfère une présentation plus formelle du cours d'équation différentielles, la voici.

Définition 2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x une fonction de I dans $\mathbb{R}^p$. Soit F une fonction $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. On dit que x satisfait l'équation différentielle d'ordre n associée à F si l'équation fonctionnelle $F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$ est satisfaite. Un système différentiel est un ensemble d'équations différentielles $F_1(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, F_2(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \dots, F_k(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$. On dit que x satisfait le système différentiel s'il satisfait chacune des équations. Le but de ce cours est l'étude des systèmes différentiels.*

Exercice 2. Trouver les fonctions F correspondant à la definition 2 pour les exemples introduits dans ce premier chapitre.

Correction 2. L'équation $T' = c(100-T)$ peut se réecrire $F(T, T') = 0$ avec $F(x, y) = y - c(100 - x)$. L'équation $x'' = 0$ peut se réecrire $F(x, x', x'') = 0$ avec $F(x, y, z) = z$.

ExoTD 1. *Un hiver à Nice, un habitant décide de baisser la température de son chauffage de 19 à 18 degrés. La température exterieure est de 10 degrés. Il note Na, Np les dépenses journalières avant et après le changement, et $N = Na - Np$ les économies réalisées. Un Lillois baisse sa température de 20 à 19 alors qu'il fait 5 degrés dehors. Les données analogues à Lille sont notées La, Lp et $L = La - Lp$. On admettra que les maisons sont identiques (forme, volume, materiaux...).*
a)*Proposer une équation pour l'évolution de la température des maisons si on ne chauffe pas.*
b)*Quelle est la baisse de température dT de la maison sur un court instant dt pour le Lillois quand il chauffe à une temperature T ? Trouver une quantité Lq tel que le le cout du chauffage est proportionnel à Lq.*
c)*Qui a fait le plus déconomies en euros ?*
d)*Qui a fait le plus d'économies en pourcentage de sa consommation initiale ?*

correcTD 1.
e)*La maison dans le froid devrait se comporter avec les mêmes règles de*

transfert de chaleur que le corps qu'on avait mis dans le four. Des équations assez naturelles sont donc $T' = c(T - 10)$ *à Nice et* $T' = c(T - 5)$ *à Lille, avec la même constante c puisque les maisons sont identiques.*
f)*Si l'intervalle de temps est court, on a à peu près* $T' = dT/dt$ *(argument de physicien). Donc* $dT = c(T - 5)dt$*. Le cout de chauffage est proportionnel à la perte de température* dT *car l'énergie contenue dans un solide est proportionnelle à sa température via la capacité thermique. Donc on peut prendre* $Lq = (T - 5)$*.*
g)*Quand le Lillois passe de 20 à 19 degrés, son coût de chauffage passe (à un facteur multiple près ou choix d'unité monétaire) de* $(20 - 5)$ *à* $(19 - 5)$*, donc l'économie est 15-14=1. C'est la même économie en euros que pour la personne de Nice.*
h)*En pourcentage, la personne de Lille à économisé* $1/15$ *soit environ* 7% *tandis que la personne de Nice a économisé* $1/10 = 10\%$*. L'économie en euros est la même, mais plus importante pour le Niçois en pourcentage car sa consommation totale est moindre.*

Signalons pour finir que nous n'aborderons que très peu la question belle mais difficile du choix des modélisations. Si l'étude d'une équation différentielle fixée est un problème mathématique bien posé, la représentation d'une situation réelle par une équation différentielle est un problème difficile qui n'est pas purement mathématique. Nous en verrons des exemples simples en exercice.

Le choix du modèle est un problème qui n'a pas de réponse unique. Si le modèle est trop simple, il ne représente pas le réel. S'il est trop complexe, il est souvent inapplicable et grossièrement faux. En effet, les données réelles sont connues avec des marges d'erreur et multiplier des entrées et des variables sur lesquelles il y a des erreurs donne un résultat mauvais. Entre ces deux extrêmes, il faut souvent choisir à tatons, entre des contraintes mathématiques et des contraintes liées à la situation réelle.

ExoTD 2.
i)*On lance une bille métallique depuis le sol avec une vitesse de* $2\ ms^{-1}$ *avec un angle de* 30 *degré par rappot à l'horizontale. On suppose* $g = 10$ *pour simplifier les calculs. Trouver quand la bille touche le sol et la distance parcourue.*
j)*On fait varier l'angle du lancer sans changer la vitesse. Trouver l'angle de lancer permettant le lancer le plus long.*
k)*La conclusion précédente s'applique-t-elle avec des vitesses différentes ? au lancer du poids ? du javelot ?*

correcTD 2.
l)*On choisit comme origine des temps le moment du lancer et comme origine de l'axe vertical z le niveau du sol. On oriente z vers le haut. Puisque l'angle est de 30 degrés, la vitesse initiale sur l'axe vertical z est $z'(0) = 2.sin(\pi/6) = 1$. L'équation le long de l'axe des z est $z'' = -10$, ce qui donne $z' = -10t + K$. A $t = 0$, on obtient la vitesse initiale, donc $K = 1$. Donc en intégrant de nouveau $z = -5t^2 + Kt + L = -5t^2 + t + L$. A $t = 0$, on trouve $L = 0$ et l'équation du mouvement est $z = -5t^2 + t = t(-5t + 1)$. On obtient $z = 0$ au moment du lancer ($t = 0$), puis lorsque $t = \frac{1}{5}$.*

Dans le plan horizontal, la vitesse est constante car on a les équations $x'' = y'' = 0$. A $t = 0$, la vitesse vaut $2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. La distance parcourue en un cinquième de seconde est donc $\frac{\sqrt{3}}{5}$, soit un peu plus de 34.6 centimètres.
m)*En reprenant la méthode précédente, si l'angle est α avec la verticale, on obtient une vitesse initiale verticale de $2.sin(\alpha)$ donc $z' = -10t + 2\sin(\alpha)$, puis $z = -5t^2 + 2\sin(\alpha)t$. Le temps de parcours est $t = 2\sin(\alpha)/5$ et la longueur du parcours est $2\sin(\alpha)\cos(\alpha)/5 = \sin(2\alpha)$. Le terme en $\sin(2\alpha)$ est maximal lorsque 2α vaut $\pi/2$ c'est à dire lorsque α vaut $\pi/4$. Pour lancer, le plus loin possible, il faut donc lancer avec un angle de 45 degrés.*
n)*Même si on change la vitesse initiale, ou même la valeur de g la conclusion reste la même, puisqu'on tombera sur un calcul identique avec un multiple de $\sin(2\alpha)$ à maximiser. La conclusion ne s'applique pas exactement au lancer du poids, car le point de départ et d'arrivée ne sont pas à la même hauteur. Il faut faire des calculs plus précise qui dépendent de la taille du lanceur. Néanmoins, on peut constater sur les retransmissions télés que c'est une bonne approximation: l'angle d'envol optimal est entre 41 et 42 degrés. Au javelot, en revanche, il n'y a pas de raison d'utiliser les calculs précédents, car il y des phénomènes de portance très important et les équations sont de nature différente.*

ExoTD 3. *On considère un ressort qui se deplace le long de l'axe des x, sa position au repos étant $x = 0$. On donne en général l'équation différentielle $x' = -kx$, où k dépend de la raideur du ressort. Quelles expériences peut on faire pour justifier cette équation.*

correcTD 3. *Si on accroche des poids le long d'un ressort vertical, mettre deux fois plus de poids devrait provoquer un allongement deux fois plus grand d'après la formule. Il faut aussi vérifier que le ressort est symétrique en compression et en extension, c'est à dire que l'allongement quand on tire un ressort avec une masse m située en bas du ressort est la même que la compression obtenue si on comprime un ressort avec une masse m posée au dessus du ressort.*

ExoTD 4.
o)*Soit une population dont le nombre $x(t)$ évolue en fonction du temps t. L'équation $x' = kx$ vous semble-t-elle reproduire raisonnablement la dynamique de reproduction de la population.*
p)*Discuter la signification du signe de k.*

correcTD 4.
q)*Si l'environnement est inchangé, cette dynamique peut être raisonnable. Par exemple, si des bactéries ont suffisamment de nourritures, elle peuvent se reproduire de 5% par unité de temps, ce qui donne $x(t+u) = 1.05x(t)$. On peut encore réecrire cette équation sous la forme $\frac{x(t+u)-x(t)}{u} = \frac{0.05}{u}x$. Si l'unité de temps est suffisamment petite par rapport à l'intervalle considéré, le terme de gauche est environ la dérivée $x'(t)$, d'où l'équation différentielle de la forme $x' = kx$ avec $k = \frac{0.05}{u}$.*

En revanche, sur de grands intervalles de temps, l'environnement est changeant : les bactéries en se reproduisant épuisent leurs ressources et/ou deviennent des ressources alimentaires pour d'autres animaux : l'équation n'est alors plus valable.
r)*Si k est positif, cela signifie qu'on est dans une période favorable où la population s'accroit. Si k est négatif, cela signifie que les contraintes environnementales amènent à une décroissance de la population.*

Chapitre 2

Primitives usuelles

L'équation différentielle la plus simple est

$$y' = f$$

où $f(x)$ est une fonction de la variable réelle x. En d'autres termes, on cherche les primitives de f. Ses solutions sont de la forme $y = F + \textit{constante}$ où F est une primitive particulière de f. Trouver toutes les solutions de $y' = f$ revient donc à en trouver une seule F.

Outre cette équation particulière, de nombreux calculs de la théorie des équations différentielles reposent sur la détermination de primitives, notamment pour la méthode dite de la variation de la constante que nous introduirons plus tard.

Le but de ce chapitre est de se remettre en mémoire les primitives les plus courantes, sans chercher l'exhaustivité.

Voici une liste de primitives usuelles inspirée de Wikipédia. Dans les formules suivantes, C est une constante réelle. Parmi les formules que j'ai retenues, j'ai marqué du symbôle $(*)$ les formules qui n'ont pas besoin d'être retenues, soit parce qu'on les retrouve très vite, soit parce qu'on ne les utilise que rarement.

Primitives de fonctions rationnelles

- $\int \mathrm{d}x = x + C \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad$ si $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \qquad$ si $x \neq 0$
- $\int \frac{1}{x-a} \,\mathrm{d}x = \ln|x-a| + C \qquad$ si $x \neq a$
- $\int \frac{1}{(x-a)^n} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \qquad$ si $n \neq 1$ et $x \neq a$

- $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Arctan}(x) + C \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{si } a \neq 0$
- (*) $\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C = \begin{cases} \mathrm{Argth}(x) + C & \text{sur }]-1,1[\\ \mathrm{Argcoth}(x) + C & \text{sur }]-\infty,-1[\text{ et sur }]1,+\infty[. \end{cases}$

Primitives de fonctions logarithmes

- $\forall x > 0, \int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$
- (*) $\int \log_b(x)\,\mathrm{d}x = x\log_b(x) - x\log_b(e) + C$
- (*) Plus généralement, une primitive n-ième de $\ln(x)$ est donnée par : $\frac{x^n}{n!}\left(\ln(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + P_{n-1}(x)$ avec $P_{n-1}(x)$ un polynôme de degré $n-1$

Primitives de fonctions exponentielles

- $\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a} + C$
- (*) $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \qquad \text{si } a > 0 \text{ et } a \neq 1 \text{ car } ln(1) = 0$

Primitives de fonctions irrationnelles

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, i.e. $x \neq -1$ et $x \neq 1$,
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Arcsin}(x) + C$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Arccos}(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$
- (*) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-1} + C$

Fonctions trigonométriques

- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
- (*) $\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|\sec(x)| + C$
- (*) $\int \mathrm{cotan}(x)\,dx = \ln|\sin(x)| + C = -\ln|\mathrm{cosec}(x)| + C$

(*) Primitives de Fonctions hyperboliques

- $\int \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}(x) + C$
- $\int \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}(x) + C$

- $\int \mathrm{th}(x)\ \mathrm{d}x = \ln(\mathrm{ch}(x)) + C$
- $\int \mathrm{coth}(x)\ \mathrm{d}x = \ln|\mathrm{sh}(x)| + C$
- $\int \mathrm{Arcsin}(x)\ \mathrm{d}x = x\ \ \mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
- $\int \mathrm{Arccos}(x)\ \mathrm{d}x = x\ \ \mathrm{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
- $\int \mathrm{Arctan}(x)\ \mathrm{d}x = x\ \ \mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
- $\int \mathrm{Arccotan}(x)\ \mathrm{d}x = x\ \ \mathrm{Arccotan}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Cette liste d'exemples classiques nous suffira pour la suite, mais signalons qu'elle n'est pas exhaustive. Les fractions rationnelles et les exponentielles polynômes peuvent être intégrés par des méthodes explicites traditionnellement enseignées dans les cours d'intégration. Les formules finales ne sont néanmoins pas aussi simples que celles du formulaire ci-dessus.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de retrouver la primitive de $\frac{1}{1-x^2}$ donnée dans le formulaire. La stratégie est d'écrire $\frac{1}{1-x^2}$ sous la forme $\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \frac{p_3(x)}{q_3(x)} + \ldots.$, où les p_i et q_i sont des polynômes en x. En d'autres termes on cherche des fractions dont la somme est $\frac{1}{1-x^2}$. Au lieu d'intégrer la fraction $\frac{1}{1-x^2}$ en bloc, on intègrera chacune des sous-fractions qui la constitue.
a)Ecrire le dénominateur $1-x^2$ comme produit de 2 polynômes de degré 1.
b)Proposer une liste de dénominateurs raisonnables pour les fractions dont la somme est $\frac{1}{1-x^2}$
c)Trouver des polynômes $a(x)$, $b(x)$ tels que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a(x)}{1+x} + \frac{b(x)}{1-x}$.
d)Trouver une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$.

Correction 3.
a)$1-x^2 = (1-x)(1+x)$.
b)Quand on met des fractions au même dénominateur, en général on obtient un dénominateur qui est multiple des dénominateurs des fractions. Exemple: $\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{13}{14}$. Ici il est donc raisonnable de chercher pour les fractions dont la somme est $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$ des dénominateurs en $(1-x)$ ou $(1+x)$.
c)On peut prendre $a(x) = 1$, $b(x) = 1$ de sorte que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}$.
d)La primitive de $\frac{1}{1-x^2}$ s'obtient en ajoutant les primitives de chacune des fractions: on obtient $\frac{1}{2ln|1+x|} - \frac{1}{2ln|1-x|} = \frac{1}{2}ln(\frac{|1+x|}{|1-x|}$.

ExoTD 5.
e)*Résoudre* $y' = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ *en utilisant le changement de variable* $x = \frac{1}{t}$.
f)*Résoudre* $y' = \sin^2 t \cos t dt$ *en utilisant le changement de variable* $u =$

$\sin t$.
g) $y' = \frac{t}{\sqrt{t^2+a}}$

correcTD 5.
h) *La fonction n'étant pas définie en* 0, *on a sur chacun des intervalles* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathbb{R}_+^*$ *l'égalité* $\int^x \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx = \int^{1/x} \frac{\frac{-1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}dt = \int^{1/x} \frac{-1}{\sqrt{1+t^2}}dt = -ln(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) + \text{constante}$
i) $\int^t \sin^2 t \cos t dt = \int^{sin(t)} u^2 du = \frac{1}{3}sin(t)^3 + \text{constante}.$
j) *Avec* $x = t^2 + a$, *on obtient* $\int^t \frac{t}{\sqrt{t^2+a}}dt = \int^{t^2+a} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{t^2+a}} +$ constante

ExoTD 6. *Par intégration par parties, résoudre les équations suivantes:*
k) $y' = t \sin t$.
l) $y' = ln(t)$

correcTD 6.
m) $\int^t t\sin(t)dt = -t\cos(t) - \int^t -\cos(t)dt = -t\cos(t) + \sin(t)$
n) $\int^t \ln(t)dt = t\ln(t) - \int^t dt = t(\ln(t) - 1) + \text{constante}$

ExoTD 7. *Résoudre* $y' = (t^2 - t + 1)cos(2t)$. *On pourra associer l'équation différentielle complexe* $y' = (t^2 - t + 1)e^{2it}$, *résoudre cette équation complexe sous la forme* $y = P(t)e^{2it}$ *où* P *est un polynôme de degré* 2, *puis en déduire la solution de l'équation initiale.*

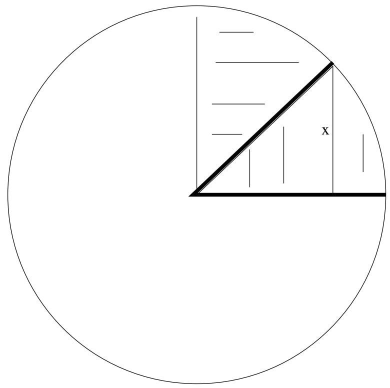
correcTD 7. *On cherche* P *sous la forme d'un polynôme du second degré* $P(t) = at^2 + bt + c$. *On obtient pour la solution complexe* $a = \frac{-i}{2}$, $b = \frac{1+i}{2}$, $c = \frac{-1-i}{4}$. *La partie réelle de* $P(t)e^{2it} + constante$ *est* $y = (\frac{t}{2} - \frac{1}{4})cos(2t) + (\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4})sin(2t) + constante$. *C'est la solution de l'équation différentielle réelle.*

ExoTD 8. *Le but de cet exercice est de retrouver l'équation différentielle satisfaite par la fonction exponentielle. L'exponentielle étant définie comme la réciproque de la fonction ln, il s'agit essentiellement de savoir dériver une fonction réciproque. Nous pourrons utiliser la même technique pour les fonctions Arcsin et Arcos.*
o) *Soit une droite d'équation* $ax + by + c = 0$ *dans le plan ni horizontale ni verticale. On peut la voir comme une fonction* y *de* x *et l'écrire sous la forme* $y(x) = \lambda_1 x + \mu$. *Ou on peut voir la droite comme le graphe d'une fonction* x *de* y *et écrire* $x(y) = \lambda_2 y + \mu_2$. *Trouver une relation entre les coefficients* λ_1 *et* λ_2.

p)*Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction bijective. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$ deux points tels que $f(x_0) = y_0$. On suppose que le graphe de f admet une droite tangente d'équation $ax+by+c = 0$ au point (x_0, y_0). Rappeler sans démonstration le lien entre la droite tangente et la dérivée $f'(x_0)$.*
q)*En déduire le lien entre $f'(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0)$.*
r)*Soit ln la fonction logarithme définie par $ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $ln(1) = 0$. Appliquer la question précédente pour calculer la dérivée de e^x et retrouver l'équation différentielle usuelle de la fonction exponentielle, à savoir $(e^x)' = e^x$.*
s)*Faire de même pour calculer la dérivée de Arcsin et Arcos, les fonctions réciproques de sin et cos.*

correcTD 8.

t)*La droite d'équation $ax+by+c = 0$ dans le plan ni horizontale ni verticale admet des coefficients a, b non nuls. On peut la voir comme une fonction y de x et alors l'écrire sous la forme $y(x) = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$. Ou on peut voir la droite comme le graphe d'une fonction x de y et écrire $x(y) = \frac{-b}{a}y + \frac{-c}{a}$. On voit donc que le produit $\lambda_1\lambda_2 = \frac{-a}{b}\frac{-b}{a} = 1$.*
u)*Si le graphe de f admet une droite tangente d'équation $ax+by+c = 0$ au point (x_0, y_0), le nombre dérivée $f'(x_0)$ est la pente de la tangente ou l'on voit y comme fonction de x, c'est à dire $f'(x_0) = \lambda_1 = \frac{-a}{b}$.*
v)*Si l'on voit x fonction de y au lieu de y fonction de x, il faut remplacer λ_1 par λ_2. En vertu de la première question, on en déduit que $f'(x_0)(f^{-1})'(y_0) = 1$.*
w)*Appliquons la question précédente en un point x_0, y_0 du plan tel que $ln(x_0) = y_0$. On a $e'(y_0) = \frac{1}{ln'(x_0)} = \frac{1}{1/x_0} = x_0$. On a obtenu la dérivée cherchée, mais en fonction de x_0. Il faut revenir à la variable de départ y_0 en écrivant $x_0 = e^{y_0}$. Et finalement $e'(y_0) = e^{y_0}$, ce qui est l'équation différentielle cherchée.*
x)*De même, $Arcsin'(y_0) = \frac{1}{sin'(x_0)} = \frac{1}{cos(x_0)}$. On a obtenu la dérivée cherchée en fonction de x_0. Il faut revenir à la variable de départ y_0 en écrivant $cos^2(x_0) + sin^2(x_0) = 1$. On a donc $|cos(x_0)| = \sqrt{1 - sin^2(x_0)} = \sqrt{1 - y_0^2}$. Pour la fonction arcsinus, on prend y_0 dans $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc le cosinus est positif et on peut enlever la valeur absolue. D'ou $Arcsin'(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$, comme annoncé dans le formulaire. Le cas de la fonction Arcos est similaire.*



ExoTD 9. *Le but de cet exercice est de retrouver la formule célèbre $Arcsin(x) + Arcos(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Nous proposons deux méthodes. La première par le calcul est celle présentée habituellement. Elle s'appuie sur le calcul de dérivée de l'exercice précédent. La deuxième méthode est plus géométrique qu'analytique. Elle a l'avantage de rendre le résultat visuel et facile à retenir.*

y)*(Méthode analytique). Trouver a et b tels que la fonction $g = a\ Arcsin(x) + b\ Arcos(x)$ ait une dérivée constante.*

z)*En déduire la valeur de g à une constante additive près.*

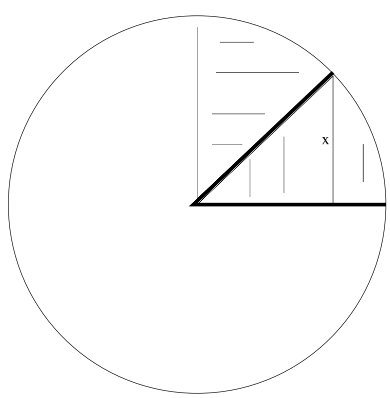
)*Trouver la constante manquante en évaluant g en un point quelconque.*

)*(Méthode géométrique). Montrer que la surface hachurée verticalement dans le disque unité est d'aire $Arcsin(x)$.*

)*Montrer que la surface hachurée horizontalement est d'aire $Arcos(x)$.*

)*Conclure.*

)*Proposer sans donner les détails une méthode géométrique 'à la physicienne' pour retrouver le fait qu'une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $Arcsin(x)$.*



correcTD 9.

)*(Méthode analytique). En prenant $a = 1$ et $b = 1$, la fonction $g = a\ Arcsin(x) + b\ Arcos(x)$ vérifie $g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.*

)On en déduit que g est constante, $g = c$.
)En évaluant g en un point quelconque, par exemple en $x = 0$, on trouve $c = g(0) = Arcsin(0) + Arcos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
)La surface hachurée verticalement est d'aire $A = l.Rayon$, ou l est la longueur de l'arc de cercle de la partie hachurée verticalement. Ici le rayon vaut 1. On voit sur le dessin que $sin(l) = x$, donc $l = Arcin(x)$ puisque l est compris dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Donc $A = Arcsin(x)$.
)Si on note m la longueur de l'arc de cercle de la surface hachurée horizontalement, on voit sur le dessin que $cos(m) = x$, donc $m = Arcos(x)$ puisque m est compris dans l'intervalle $[0, \pi]$.
)Puisque le quart de disque est recouvert par ces deux surfaces hachurées disjointes, son aire est égale à la somme des deux aires, c'est à dire $\frac{\pi}{2} = Arcsin(x) + Arcos(x)$.
)On découpe la partie hachurée d'aire $Arcsin(x)$ en une multitude de petits secteurs angulaires collés les uns aux autres. En raisonnant 'a la physicienne', chaque petit secteur angulaire est assimilable à un petit triangle dont l'aire est calculable par les formules élémentaires de la géométrie du triangle. Cette somme d'une multitude de petits triangles correspond en passant à la limite à une intégrale. Quand on écrit les calculs, on retrouve le fait que l'aire totale, à savoir $Arcsin(x)$, est une intégrale de petits morceaux d'aire $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, c'est a dire $Arcsin(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Chapitre 3

Équations différentielles linéaires

3.1 Équations résolubles et équations linéaires

Vous savez d'après le cours d'algèbre linéaire que les systèmes d'équations linéaires sont facilement résolubles (par exemple par la méthode du pivot de Gauss). C'est un cas rare car un système d'équations pris au hasard n'est pas résoluble en géneral avec les outils de l'école primaire et les quatre opérations.

Il faut bien s'entendre sur le mot résoluble. Est ce que par exemple l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est résoluble ? Si on veut trouver une formule génerale uniquement avec les quatre opérations de l'école primaire, ce n'est pas possible. Si on s'autorise une formule avec des racines carrées, l'équation est résoluble car les solutions sont de la forme $x = \frac{-b+/-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

La résolubilité d'une équation dépend donc des formules qu'on s'autorise à écrire ou pas. Il faut être clair sur les règles du jeu.

La même problématique se pose dans le cadre des équations différentielles. Si on veut résoudre une équation différentielle, quels types de formules s'autorise-t-on ? Il est un peu tôt pour répondre à cette question. Mais, en un certain sens que nous préciserons à la fin de ce chapitre, les équations différentielles linéaires sont celles qu'on sait résoudre simplement. Ce sont donc les analogues des systèmes linéaires en algèbre linéaire et il est logique de commencer le cours par ces équations simples. En voici la définition.

Définition 3. *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ *une fonction de J dans $\mathbb{R}^n$. On appelle équation différentielle linéaire (ou système différentiel linéaire) une équation de la forme $y' = l(t)y + g(t)$, où $l(t)$ est une matrice $n \times n$ dépendant continument de t et $g(t)$ une fonction continue de J dans $\mathbb{R}^n$. L'équation sans second membre associée ou équation homogène est $y' = l(t)y$. Si les coefficients de la matrice l ne dépendent pas de t, on dit qu'on a une équation à coefficients constants.*

Dans le cas où $n = 1$, $l(t)$ est une matrice $1 * 1$ et on peut l'identifier à la fonction contenue dans cette matrice. De même $g(t)$ est une fonction scalaire (c'est à dire à valeur dans $\mathbb{R}$). Si $n = 1$, l'équation $y' = l(t)y + g(t)$ est donc une simple équation entre fonctions. On dit alors qu'on a une équation différentielle scalaire.

Si $n > 1$, on obtient un système différentiel. L'exemple suivant illustre la forme du système dans le cas $n = 2$.

Exemple 4. *Le système d'équations*

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + e^t y_2 + 3t \\ y_2' &= ty_1 + t^2 y_2 \end{aligned}$$

est un système différentiel linéaire. En effet, notons $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ *le vecteur colonne formé de y_1 et y_2,* $l(t) = \begin{pmatrix} 2 & e^t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$, *et* $g(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \end{pmatrix}$. *Alors le système précédent peut se réecrire sous la forme $y'(t) = l(t)y(t) + g(t)$. Le système sans second membre est*

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + e^t y_2 \\ y_2' &= ty_1 + t^2 y_2 \end{aligned}$$

Exercice 4.
a)Montrer que les systèmes d'équations

$$\begin{aligned} y_1' &= 2 + y_2 + 3t \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + e^t y_2 + 3t \\ y_2' &= ty_1 + t^2 y_2 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned}$$

sont des systèmes différentiels linéaires en donnant les matrices correspondantes. Quels sont les systèmes à coefficients constants ?
b)Soit $l(t)$ la matrice $3*3$ défini par $l(t)_{ij} = t^{i+j}$ si $i \geq j$ et $l(t)_{ij} = 0$ sinon. Écrire la matrice $l(t)$ et le système différentiel homogène correspondant.

Correction 4.
a)Les matrices des systèmes d'équations sont $l(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pour le premier système et $l(t) = \begin{pmatrix} 2 & e^t & 0 \\ t & t^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ pour le deuxième système. En particulier le premier système est à coefficients constants. Les second membres sont $g(t) = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour le premier système et $g(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour le deuxième système.
b)On a $l(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$. Le système différentiel homogène correspondant est

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= ty_1 + y_2 \\ y_3' &= t^2 y_1 + ty_2 + y_3 \end{aligned}$$

Nous démontrerons plus tard un théorème de Cauchy qui montrera que les équations différentielles linéaires ont toujours une équation unique quand on fixe les conditions initiales adéquates.

Théorème 5. *Pour tout $t_0 \in J$, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution y définie sur J telle que $y(t_0) = y_0$.*

Dans les cas pratiques rencontrés pour les équations différentielles linéaires, ce théorème n'est pas indispensable car l'existence et l'unicité découlent assez directement des calculs. On pourrait donc se passer du théorème général de Cauchy pour les calculs pratiques. Néanmoins, ne pas utiliser ce théorème rend les rédactions moins limpides, car on est obligé à priori de supposer qu'il pourrait y avoir une infinité de solutions ou aucune solution, même si en définitive, il n'y a qu'une solution à la fin. Par souci de clarté, nous utiliserons donc ce théorème dès à présent.

L'exercice suivant considère le cas où il y a un coefficient $a(t) \in \mathbb{R}$ devant le terme y'.

Exercice 5.
a)On considère un système différentiel portant sur $y : J \to \mathbb{R}^n$ de la forme $a(t)y' = l(t)y + g(t)$ où $a : J \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire. Montrer que ce système a une solution unique telle que $y(t_0) = y_0$ si $a(t)$ ne s'annule pas sur l'intervalle J où l'on cherche la solution.
b)Montrer que le résultat n'est plus vrai si $a(t)$ s'annule en un point de J. On pourra par exemple considérer le cas scalaire et $ty' = 2y$.
c)Peut on remplacer le scalaire $a(t)$ par une matrice $A(t)$ qui ne s'annule pas dans la première question. Sinon, donner une condition suffisante sur $A(t)$ pour avoir l'unicité.

Correction 5.
a)Une équation $a(t)y' = l(t)y + g(t)$ a également une solution unique si $a(t)$ ne s'annule pas sur l'intervalle J où l'on cherche la solution puisque l'équation est équivalente à $y' = \frac{1}{a(t)}l(t)y + \frac{1}{a(t)}g(t)$. On se ramène donc directement à la forme sans coefficient devant le y' auquel cas Cauchy nous dit que la solution est unique.
b)Quelles que soient les constantes c_1 et c_2, la fonction valant c_1t^2 quand $t \leq 0$ et c_2t^2 quand $t \geq 0$ est solution de $ty' = 2y$. Supposons $t_0 > 0$. On n'a pas une solution unique telle que $y(t_0) = y_0$ puisque seul c_2 est fixé par cette condition et qu'on peut choisir c_1 comme on veut.
c)Si on remplace le scalaire $a(t)$ par une matrice $A(t)$ qui ne s'annule pas dans la question précédente, on ne peut pas garantir l'unicité. En effet, si on prend $A(t) = diag(t, 1)$, $l(t) = diag(2, 1)$ et $g(t) = 0$, le système est équivalent à $ty_1' = 2y_1$ et $y_2' = y_2$. Il y a donc une infinité de solutions pour y_1 d'après la question précédente. Pour avoir l'unicité, il suffit que $A(t)$ soit inversible. On raisonne alors comme pour la premiere question en multipliant à gauche par l'inverse de $A(t)$ pour se ramener à une forme sans coefficient devant le y' de façon à pouvoir utiliser Cauchy.

Les équations scalaires sont plus simples que les systèmes différentiels, et les équations à coefficients constants sont plus simples que les équations générales. Toutes les équations linéaires ne sont donc pas d'égale difficulté lorsqu'on cherche à les résoudre. Nous commencerons par les cas les plus simples.

3.2 y scalaire ($n = 1$), coefficients constants, sans second membre

Soit $a \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre

$$y' = ay$$

où $y : J \to \mathbb{R}$ est définie sur un intervalle J.

Proposition 6. *Les solutions de l'équation précédente sont $y = Ce^{at}$ où C est une constante réelle.*

Proof. Un calcul direct de dérivation montre que la solution y telle que $y(t_0) = y_0$ est $y = (y_0 e^{-at_0})e^{at}$. Les solutions sont donc bien de la forme voulue. □

On peut retenir le dernier résultat de façon mnémotechnique de la façon suivante. On remarque que si y ne s'annule pas, donc de signe constant par continuité, on a $\frac{y'}{y} = a$, ce qui s'intègre en $ln|y| = at + cte$. En prenant l'exponentiel de la dernière égalité, on retrouve la forme générale de y. Ce raisonnement est moins général que la preuve (puisqu'on suppose que y ne s'annule pas), mais il est plus facile à retenir.

Exercice 6. Soit y une fonction scalaire solution d'une équation différentielle sur un intervalle J. Montrer que si y ne s'annule pas, elle est de signe constant.

Correction 6. La fonction y est dérivable, donc continue. S'il existait deux points t_0 et t_1 tels que $y(t_0)$ et $y(t_1)$ soient de signe opposés, il existerait d'après le théorème des valeurs intermédiaires un $t \in [t_0, t_1]$ tel que $y(t) = 0$. Contradiction.

Exercice 7.
a)Montrer que toute fonction $y : J \to \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $y = g(t)e^{at}$.
b)Montrer que les solutions de l'équation $y' = ay$ sont $y = Ce^{at}$ où C est une constante réelle sans utiliser le théoreme de Cauchy. On cherchera y sous la forme $y(t) = g(t)e^{at}$ où g est une fonction.

Correction 7.
a)Posons $g = ye^{-at}$. Alors on a bien $y = ge^{at}$.
b)Soit Posons $g = ye^{-at}$. Alors $y = ge^{at}$. En dérivant, on obtient $y' = ay = g'e^{at} + age^{at} = g'e^{at} + ay$. On en déduit que y une solution de $y' = ay$ ssi $g'e^{at} = 0$, c'est à dire ssi $g = cte$.

Exercice 8. Discuter et décrire les solutions bornées sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + ay = 0$?

Correction 8. La solution générale est de la forme $y = ce^{-at}$. La fonction $y = 0$ est toujours solution et bornée. Si $a = 0$, les solutions sont toutes constantes, donc bornées. Si a est non nul, toutes les solutions non nulles sont non bornées. En effet, si c, a sont non nulles de même signe (resp. de signe opposé), la limite en $-\infty$ (resp. la limite en $+\infty$) est $+\infty$.

3.3 y scalaire ($n = 1$), coefficients constants, avec second membre

Soit a un réel et y une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation $y' = ay + b(t)$, on emploie la méthode de variation de la constante. On sait d'après le paragraphe précédent que les solutions de $y' = ay$ sont de la forme $y = Ce^{at}$, où C est une constante. L'idée quand on ajoute le terme $b(t)$ est de chercher les solutions sous la forme $y = C(t)e^{at}$, où $C(t)$ est une fonction. En d'autres termes, on remplace la constante C du cas précédent par une fonction.

L'exercice suivant montre que par la variation de la constante, on trouve les solutions de l'équation différentielle à partir du moment où l'on sait calculer des primitives.

Exercice 9. Montrer que $y = C(t)e^{at}$ est solution de $y' = ay + b(t)$ ssi C vérifie $C' = b(t)e^{-at}$

Correction 9. On a $y' = ay + C'e^{at}$. Donc $y' = ay + b(t)$ ssi $C'(t) = b(t)e^{-at}$.

Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = 2y + e^{3t}$.

Correction 10. La solution de l'équation homogène est $y' = Ce^{2t}$. Cherchons la solution sous la forme $y = C(t)e^{2t}$. On obtient $y' = 2y + C'(t)e^{2t}$. Il faut donc $C'(t)e^{2t} = e^{3t}$, soit $C(t) = e^t + cte$. La solution générale est $y = e^{3t} + cte\ e^{2t}$.

3.4 y scalaire ($n = 1$), coefficients généraux

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Proposition 7. *Les solutions de $y' = a(t)y$ sont de la forme $y = e^{A(t)}$ où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$.*

Démonstration Soit $g(t) = ye^{-A(t)}$. Par dérivation, il s'ensuit $g' = (-ay + y')e^{-A(t)} = 0$. Donc g est constante.

Les solutions de l'équation non homogène $y' = a(t)y + b$ s'obtiennent à partir des équations homogènes par variation de la constante. Comme dans le paragraphe précédent, le calcul se ramène finalement à un calcul de primitive.

Exercice 11. Résoudre sur $J =]0, \pi/2[$ l'équation différentielle $(sinx)y' - (cosx)y = x$.

Correction 11. Remarquons que $x \to sin(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle considéré. On commence par l'équation homogène. On a $y'/y = cos(x)/sin(x)$. Le terme de droite étant de la forme u'/u, on en déduit $ln|y| = ln|sin(x)| + cte$, soit $y = C\ \sin(x)$.

Cherchons maintenant la solution générale sous la forme $y = C(x)sin(x)$. On a $\sin(x)y' - cos(x)y = C'(x)\sin^2(x) = x$. Il nous faut donc résoudre $C' = \frac{x}{sin^2(x)}$. On procède par intégration par parties, en remarquant que la primitive de $1/sin^2(x)$ est $\frac{-1}{tan(x)}$. On obtient alors $C = -\frac{x}{tan(x)} + \int \frac{1}{tan(x)} = -\frac{x}{tan(x)} + ln(sin(x)) + cte$. La solution générale est donc $y = -\frac{x}{tan(x)} + ln(sin(x)) + cte\,\sin(x)$.

Il doit être maintenant relativement clair qu'un certain nombre d'exercices d'équations différentielles sont en fait de simples exercices d'intégration lorsqu'on connait la méthode. Si vous regardez l'exercice d'application de la méthode de variation de la constante, vous remarquez que la difficulté était le calcul de deux primitives, à savoir le calcul de la primitive de y'/y et le calcul de la primitive de C'.

En pratique, on utilise parfois des méthodes légèrement différentes de la méthode de la variation de la constante, soit parce qu'il y a une solution particulière évidente, soit par application du principe de superposition, expliqué dans l'exercice suivant. Dans tous les cas, il n'y a pas de difficulté autre que le calcul de primitives.

Exercice 12.
a)(Principe de superposition) Soit E une équation différentielle scalaire $y' = a(t)y + b(t)$. Soit $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$. Montrer que si y_1 est solution de $y_1' = a(t)y_1 + b_1(t)$ et si y_2 est solution de $y_2' = a(t)y_2 + b_2(t)$, alors $y = y_1 + y_2$ est solution de $y' = a(t)y + b(t)$.
b)(Avec solution particulière). Montrer que si s est une solution particulière de E et si y est la solution générale de l'équation homogène associée, alors $y + s$ est la solution générale de E.

Correction 12.
a)$y' = y_1' + y_2' = a(t)y_1 + b_1(t) + a(t)y_2 + b_2(t) = a(t)(y_1 + y_2) + (b_1(t) + b_2(t))$.
b)Soit u une solution de E et $g = u - s$. On a $g' = u' - s' = a(t)u + b(t) - a(t)s - b(t) = a(t)(u - b) = a(t)g$. La fonction g est donc une solution de l'équation $y' = a(t)y$ et $u = g + s$ est bien somme d'une solution g de l'équation homogène et d'une solution particulière s.

Chapitre 4

Équations différentielles linéaires, suite

4.1 Exponentielle de matrice

L'outil principal pour la résolution des systèmes différentiels est la notion d'exponentielles de matrices, que nous abordons maintenant. Dans ce qui suit le symbole k désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

L'exponentielle est définie par une série. Nous allons introduire une norme qui nous permettra de nous assurer que la série est bien convergente quand on l'applique à une matrice.

Proposition 8. *Soit $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $A \in M_{n,n}(k)$ et si $||A|| = sup_{||x||=1}||A(x)||$ alors $||AB|| \leq ||A||.||B||$.*

Démonstration Soit x de norme 1. On a par linéarité $||AB(x)|| = ||B(x)||.||A(\frac{B(x)}{||B(x)||})|| \leq ||B||.||A||$. Donc $sup_{||x||=1}||AB(x)|| \leq ||B||.||A||$.

Proposition 9. *Soit $A \in M_{n,n}(k)$. La serie de matrices de terme général $\frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.*

Démonstration D'après l'exercice précédent, on déduit immédiatement par récurrence que $||A^n|| \leq ||A||^n$. Donc le terme général est de norme plus petite que $\frac{||A||^n}{n!}$ qui est le terme géneral de la série convergente $exp(||A||)$.

Définition 10. *On note e^A la limite de la série de terme général $\frac{A^n}{n!}$. En d'autres termes $e^A = Id + A + \frac{A^2}{2} + ...$*

Commencons par des calculs sur des exemples simples.

Exercice 13. Calculer la somme des $n+1$ premiers termes de la série exponentielle qui définit e^{2Id}. En déduire la valeur de e^{2Id}.

Correction 13. La somme des $n+1$ premiers termes de la sèrie est $Id + 2Id + \cdots + \frac{2^n Id^n}{n!} = (1+2+\cdots+\frac{2^n}{n!})Id$. On voit donc que la série converge vers $e^2 Id$.

Exercice 14.
a)Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3.
b)Calculer e^A.

Correction 14.
a)$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.
b)La somme des $n+1$ premiers termes de la série est $\begin{pmatrix} 1+2+\frac{4}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & 1+3+\frac{9}{2}+\cdots+\frac{3^n}{n!} \end{pmatrix}$. On voit donc que la série converge vers $e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$.

Le cas le plus simple pour calculer une exponentielle de matrice est le cas des matrices diagonales, qui se traite exactement comme l'exercice précédent. On note $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice

$$diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Proposition 11. *$e^{diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} = diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.*

Démonstration La somme partielle de la série vaut $\sum_{i=0}^{i=N} \frac{diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^i}{i!} = diag(\sum_{i=0}^{i=N} \frac{\lambda_1^i}{i!}, \dots, \sum_{i=0}^{i=N} \frac{\lambda_n^i}{i!})$, qui converge bien vers $diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Les matrices diagonales sont rares et la proposition précédente ne permet donc pas de calculer de nombreuses exponentielles. En revanche, les matrices diagonalisables sont plus nombreuses. On va pouvoir calculer leur exponentielle en se ramenant au cas diagonal. La démarche repose sur une formule de changement de base, présentée dans l'exercice suivant.

Exercice 15.
a)Montrer que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$.

b)Montrer que l'application exponentielle commute au changement de base, c'est à dire que si P est une matrice de changement de base, $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.

Correction 15.
a)$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}APP^{-1}AP$. On peut simplifier en supprimant les termes $PP^{-1} = Id$ qui apparaissent dans l'écriture précédente. D'où $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}AAA. \dots AAP = P^{-1}A^n P$.
b)$e^{P^{-1}AP} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(P^{-1}AP)^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{i=n} P^{-1}\frac{(A)^n}{n!}P = \lim_{n\to\infty} P^{-1}(\sum_{i=0}^{i=n} \frac{A^n}{n!})P =_* P^{-1}\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^{i=n} \frac{(A)^n}{n!})P = P^{-1}e^A P$. Pour justifier le signe $=$ muni d'une $*$, il suffit de dire que le produit de matrices est une application continue et que si f est continue et x_n une suite convergente, $f(\lim(x_n)) = \lim f(x_n)$.

La formule de changement de base pour les exponentielles et la formule pour l'exponentielle des matrices diagonales nous permettent d'obtenir la formule pour l'exponentielle des matrices diagonalisables, donnée dans la proposition suivante.

Proposition 12. *Soit A une matrice diagonalisable. Soit P la matrice de passage tel que $P^{-1}AP = diag(a_1, \dots, a_n)$. Alors $e^A = P.diag(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})P^{-1}$.*

Démonstration D'après l'exercice, on a $e^A = e^{P.diag(a_1,\dots,a_n)P^{-1}} = Pe^{diag(a_1,\dots,a_n)}P^{-1} = P.diag(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})P^{-1}$.

On peut appliquer la proposition précédente pour calculer e^A dans le cas diagonalisable : on calcule P, puis P^{-1}, puis on calcule $e^A = P.diag(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})P^{-1}$. L'expérience montre qu'on peut facilement se tromper entre P et P^{-1}.

On se propose de faire le même calcul, de façon plus terre à terre, afin d'éviter la manipulation formelle des matrices P et P^{-1}. On commence par remarquer que si v est un vecteur propre de A de valeur propre λ, alors $e^A(v) = e^\lambda v$. La méthode proposée est alors la suivante:

- Calculer les vecteurs propres v_i de A et les valeurs propres λ_i associées.
- Décomposer le vecteur e_1 de la base canonique en fonction des v_i sous la forme $e_1 = \sum a_i v_i$. Par linearité, on a donc $e^A(e_1) = e^A(\sum a_i v_i) = \sum a_i e^A(v_i) = \sum a_i e^{\lambda_i} v_i$. Ce vecteur $w_1 := \sum a_i e^{\lambda_i} v_i$ est donc la première colonne de la matrice e^A.
- On calcule de manière similaire les autres colonnes de e^A.

L'exercice suivant met la méthode en pratique.

Exercice 16.
a)Montrer que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie dans la base canonique par $f(e_1) = 2e_1 + 2e_2$, $f(e_2) = 0$ est diagonalisable.
b)Décomposer la base canonique sur la base de vecteurs propres.
c)Écrire l'exponentielle de la matrice.

Correction 16.
a)On remarque que e_2 est dans le noyau, donc 0 est valeur propre. La trace de f vaut 2 et est égale à la somme des valeur propres. Donc la deuxième valeur propre est 2. Il y a deux valeurs propres distinctes, donc f est diagonalisable.
b)Un calcul montre que $e_1 + e_2$ est vecteur propre pour la valeur propre 2. La base de vecteurs propres est donc $v_1 = (e_1 + e_2)$ et $v_2 = e_2$. On donc la decomposition de la base canonique $e_1 = v_1 - v_2$ et $e_2 = v_2$.
c)On a donc $e^f(e_1 + e_2) = e^2(e_1 + e_2)$ et $e^f(e_2) = e_2$. On en déduit $e^f(e_1) = e^f((e_1 + e_2) - e_2) = e^2(e_1 + e_2) - e_2$. Soit A la matrice de f dans la base canonique e_1, e_2. Les calculs précédents montrent que $e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ e^2 - 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nous savons maintenant calculer les exponentielles de matrices diagonalisables. Toutes les matrices n'étant pas diagonalisables, on cherche à trouver de nouveaux types de matrice sur lesquels on peut calculer l'exponentielle. Un autre cas où le calcul est facile est le cas des matrices nilpotentes. On rappelle qu'une matrice nilpotente A est une matrice carrée pour laquelle $A^p = 0$ si p est assez grand.

L'exercice suivant donne des exemples de matrices nilpotentes et montre comment on peut mener quelques calculs d'exponentielle sur ces matrices ou sur des matrices de la forme $Id + matriceNilpotente$.

Exercice 17.
a)Soit $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ définie par $A_{i,i+1} = 1$ et $A_{ij} = 0$ sinon. Calculer A^2, A^3, A^4, A^5.
b)Calculer l'exponentielle de A.
c)Calculer $(Id + A^2)^2$, $(Id + A^2)^3$, $(Id + A^2)^n$.
d)Calculer l'exponentielle de B avec $B = (Id + A^2)$. On pourra écrire la somme partielle de la série et regrouper séparément les termes en Id et les termes en A.

Correction 17.
a)$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

puis $A^4 = 0$, $A^5 = 0$,....

b)$e^A = Id + A + A^2/2 + A^3/6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Comme Id et A commutent, on peut appliquer la formule du binome :$(Id + A^2)^2 = Id + 2A^2 + A^4 = Id + 2A^2$, $(Id + A^2)^3 = Id + 3A^2 + 0$, $(Id + A^2)^n = Id + nA^2$.

d)La somme partielle S_n vaut $S_n = Id + (Id + A^2) + \frac{Id+2A^2}{2} + \cdots + \cdots + \frac{Id+nA^2}{n!} = (Id + Id + \frac{Id}{2} + \cdots + \frac{Id}{n!}) + A^2(1 + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n}{n!}) = (1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!})Id + A^2(1 + 1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!})$. Cette somme partielle converge vers $e^B = e\,Id + eA^2 = \begin{pmatrix} e & 0 & e & 0 \\ 0 & e & 0 & e \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

Dans l'exercice précédent, le fait que A soit triangulaire a joué un rôle important. L'exercice suivant montre que les matrices triangulaires sont nilpotentes. Mais on n'a pas ainsi toutes les matrices nilpotentes. Il existe des matrices nilpotentes non triangulaires.

Exercice 18.

a)Soit T_j l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de niveau $n \in \mathbb{Z}$, ie. l'ensemble des matrices A telles que $A_{i,j} = 0$ sauf si i, j est sur la diagonale de niveau n ie. $j - i = n$. Montrer que les niveaux s'ajoutent par multiplication des matrices, ie. si $A \in T_n$ et $B \in T_p$, alors $AB \in T_{n+p}$.

b)On appelle matrice triangulaire supérieure de niveau au moins n l'ensemble $T_{\geq n}$ des matrices A telles que $A_{ij} = 0$ sauf si $j - i \geq n$. Montrer que $A \in T_{\geq n}$ et $B \in T_{\geq p}$, alors $AB \in T_{\geq n+p}$.

c)Soit $A \in M_{28,28}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure de niveau au moins 4. Montrer que $A^7 = 0$.

d)Montrer que les matrices triangulaires supérieures strictes (c'est à dire dont la diagonale est nulle) sont nilpotentes

e)Meme question pour les matrices triangulaires inferieures strictes.

f)Donner une matrice nilpotente non triangulaire. (On pourra considérer $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_2$).

Correction 18.

a)Si $A \in T_n$ et $B \in T_p$, alors pour tout vecteur e_i de la base canonique $A(e_i) = \lambda_i e_{i-n}$ et $B(e_i) = \mu_i e_{i-p}$ avec la convention $e_k = 0$ si $k \leq 0$. Donc $AB(e_i) = \mu_i \lambda_{i-p} e_{i-p-n}$, ce qui montre que AB est de niveau $p + n$.

b)Si A matrice triangulaire supérieure de niveau au moins n, A sécrit $\sum_{i\geq n} A_i$ où A_i est la matrice de niveau i obtenue en extrayant de A la diagonale de niveau i. En d'autres termes $(A_i)_{jk} = A_{jk}$ si $k-j=i$ et 0 sinon. De même, $B = \sum_{i\geq p} B_i$, où B_i est de niveau i. En développant le produit AB, on obtient une combinaison linéaire de termes A_iB_j de niveau $i+j$ avec $i+j \geq n+p$. Donc AB est de niveau au moins $n+p$.
c)Soit $A \in M_{28,28}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure de niveau au moins 4. Alors A^7 est de niveau au moins 28. Mais la diagonale contenant l'élément $a_{1,28}$ en haut à droite est de niveau 27. Donc les matrices de niveau au moins 28 sont nulles, et $A^7 = 0$.
d)Les matrices A triangulaires supérieures strictes sont de niveau au moins 1. Donc A^k est de niveau au moins k, et $A^k = 0$ dès que k est supérieure à la taille de la matrice.
e)Les matrices A triangulaires inferieures strictes sont de niveau au plus -1. Donc A^k est de niveau au plus $-k$ et $A^k = 0$ dès que k est supérieure à la taille de la matrice.
f)Prenons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_2$. Alors $f^2(e_1) = f(e_2) = 0$, $f^2(e_2) = f(0) = 0$, $f^2(e_3) = f(e_2) = 0$. Donc $f^2 = 0$ est nilpotente. La matrice M de f dans la base canonique est nilpotente car elle vérifie egalement $M^2 = 0$. Cette matrice M n'est pas triangulaire puisque $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour une matrice nilpotente A avec $A^p = 0$, la formule $e^A = \sum_{i\geq 0} \frac{A^i}{i!}$ se simplifie car tous les termes avec un exposant plus grand que p sont nuls. On n'a plus un série infinie mais une somme usuelle d'un nombre fini de termes. En fait, on peut déterminer un endroit ou l'on peut s'arrêter dans la série, sans connaitre entièrement A mais en connaissant seulement sa taille. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 13. *Soit $A \in M_{n\times n}(k)$. Alors A est nilpotente ssi $A^n = 0$.*

Démonstration Si $A^n = 0$, A est nilpotente par définition. Réciproquement, supposons A nilpotente donc il existe p tel que $A^p = 0$. Alors une valeur propre λ est forcément nulle. En effet, si x est un vecteur propre correspondant, $A^p(x) = \lambda^p x = 0$, donc $\lambda = 0$. Supposons que le corps k est $\mathbb{C}$. Le polynôme caractéristique n'ayant que 0 comme racine, il vaut X^n. Par Cayley-Hamilton, on en déduit que $A^n = 0$. Si maintenant la matrice est réelle, on peut la regarder comme une matrice complexe, et elle est toujours nilpotente. On peut donc appliquer le résultat du cas complexe et conclure que $A^n = 0$.

On déduit immédiatement de l'exercice précédent la proposition suivante.

Proposition 14. *Si $A \in M_n(k)$ est une matrice nilpotente, $e^A = 1 + A + \cdots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}$.*

Démonstration Les termes suivants de la série sont nuls.

Exercice 19.
a)Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.
b)Calculer e^A.

Correction 19.
a)On voit sur la matrice que pour tout v, Av est colinéaire à $(1,-1,0)$. Puisque $A(1,-1,0) = 0$, il s'ensuit $A^2(v) = 0$ pour tout v, donc $A^2 = 0$.
b)Puisque $A^2 = 0$, $e^A = 1 + A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On connait pour les réels a, b la formule exponentielle $e^{a+b} = e^a e^b$. Pour les matrices, la formule est vraie si les matrices commutent.

Proposition 15. *Si A et B sont deux matrices de taille $n \times n$ qui commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Démonstration Si A et B, t sont des indéterminées, alors les expressions $e^{t(A+B)}$ et $e^{tA}e^{tB}$ sont des series formelles en t dont les coefficients devant le terme t^i sont des polynômes en A et B. Notons $P_i(A,B)$ et $Q_i(A,B)$ les polynômes respectifs devant le coefficient t^i.

Si on substitue à A et B des réels a et b, et si t est un réel, on a l'égalité $e^{t(a+b)} = e^{ta}e^{tb}$. Par unicité du développement en série entière, on en déduit que pour tout i, $P_i(a,b) = Q_i(a,b)$. Mais alors les polynômes $P_i(A,B) = Q_i(A,B)$ coïncident, puisqu'ils sont egaux quels que soit la valeur des indéterminées. Cette égalité polynômiale $P_i(A,B) = Q_i(A,B)$ donne une nouvelle égalité quand on évalue les polynômes en affectant aux indéterminées A, B des matrices commutantes. On en déduit $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ pour tout t et toute paire de matrices commutantes A, B. L'égalité cherchée s'en déduit en faisant $t = 1$.

Exercice 20. Donner deux matrices A et B telles que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Correction 20. Il faut évidemment prendre deux matrices qui ne commutent pas. Prenons $A = diag(0,1)$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB = 0$ et $BA = B$. On a $e^A = diag(1,e)$, $e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. Or $e^{A+B} = \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

Nous avons appris à calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, d'une matrice nilpotente, et nous savons calculer l'exponentielle d'une somme $A+B$ si les matrices A et B commutent. Ces trois ingrédients vont nous permettre de calculer l'exponentielle d'une matrice en général, à l'aide de la décomposition de Dunford, que nous rappelons ici et qui est issue du cours d'algèbre linéaire.

Théorème 16. *Une matrice carrée complexe M peut s'écrire sous la forme $M = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotent, et $DN = ND$.*

Corollaire 17. $e^M = e^D e^N$.

Démonstration Comme D et N commutent, $e^{D+N} = e^D e^N$.

La décomposition de Dunford est souvent pénible à calculer, mais il existe des algorithmes très efficaces qui ne nécéssitent pas le calcul des valeurs propres de M. Nous n'en explorerons pas les détails qui nous emmeneraient trop loin dans le cours d'algèbre linéaire. Néanmoins, voici un cas simple et utile souvent rencontré, celui d'une matrice à valeur propre unique.

Proposition 18. *Soit A une matrice ayant une unique valeur propre complexe a. Alors $e^A = e^a(Id + B + \cdots + \frac{B^{n-1})}{(n-1)!})$ avec $B = A - aId$.*

La démonstration est détaillée dans l'exercice suivant.

Exercice 21. Soit $A \in M_{n,n}(k)$ une matrice ayant une unique valeur propre complexe a.

a)Montrer que 0 est l'unique valeur propre complexe de $B := A - aId$.

b)En déduire que B est nilpotente

c)Montrer que $e^A = e^a(I + B + \cdots + \frac{B^{n-1})}{(n-1)!})$

Correction 21.

a)Si λ est valeur propre de B, alors $B(x) = \lambda x$, et $A(x) = B(x) + aId(x) = (\lambda + a)x$. Puisque a est la seule valeur propre de A, on en déduit $\lambda = 0$.

b)Le polynôme caractéristique de B n'a pas d'autres racines que 0, donc il vaut X^n. Par Cayley-Hamilton, on en déduit que $B^n = 0$. La matrice B est donc nilpotente.
c)La decomposition $A = (aId) + B$ est une somme de deux matrices commutantes. Donc $e^A = e^{aId}e^B = e^{aId}(Id + B + \cdots + \frac{B^{n-1})}{(n-1)!})$

Chapitre 5

Équations différentielles linéaires, fin

5.1 y vectorielle, coefficients constants, cas homogène

Dans ce paragraphe, $y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ est une fonction définie sur un intervalle J à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse à l'équation différentielle $y' = Ay$ où A est un matrice constante.

Exercice 22. Résoudre $y' = Ay$ quand $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Correction 22. Le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1(t) \\ 3y_2(t) \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à $y_1'(t) = 2y_1(t)$, $y_2'(t) = 3y_2(t)$. D'ou $y_1 = C_1 e^{2t}$, $y_2 = C_2 e^{3t}$.

Dans l'exercice précédent, en ajustant les constantes on a en particulier les solutions $y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons que 2 et 3 sont les valeurs propres de A et $(1, 0)$, $(0, 1)$ les vecteurs propres. On peut trouver en général des similaires construites à partir des vecteurs propres de A.

Proposition 19. *Soit* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ *un vecteur propre de* A *de valeur propre* λ. *Alors la fonction* $y = t \mapsto e^{\lambda t} v$ *est solution de l'équation différentielle.*

Démonstration En dérivant $y = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} v_1 \\ e^{\lambda t} v_2 \\ \dots \\ e^{\lambda t} v_n \end{pmatrix}$, on trouve $y' = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} v_1 \\ e^{\lambda t} v_2 \\ \dots \\ e^{\lambda t} v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} v_1 \\ \lambda e^{\lambda t} v_2 \\ \dots \\ \lambda e^{\lambda t} v_n \end{pmatrix} = \lambda y$. Et $Ay = A(e^{\lambda t} v) = e^{\lambda t} A v = e^{\lambda t} \lambda v$. On a donc bien $y' = Ay$.

Le cas diagonal général est similaire à l'exemple traité en exercice. Il y a des solutions particulières associées aux vecteurs de la base canonique (qui sont les vecteurs propres). La solution générale est une combinaison linéaire de ces solutions particulières.

Proposition 20. *Soit* $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. *Considérons le sysème différentiel* $y' = Ay$. *Les solutions générales sont* $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} e_n$, *où* $e_1, \dots, e_n$ *est la base canonique.*

Démonstration La i^{eme} composante de $C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} e_n$ est $C_i e^{\lambda_i t}$. Notons $y_i(t)$ la i^{eme} composante de $y(t)$. Le système s'écrit sur chaque composante $y_i'(t) = \lambda_i t y_i(t)$. On a donc bien $y_i = C_i e^{\lambda_i t}$.

Pour traiter le cas général, nous allons dériver des matrices construites avec des exponentielles. On sait que la fonction réelle $t \mapsto e^{at}$ se dérive en $t \mapsto a e^{at}$. On a un résultat similaire pour les exponentielles de matrice.

Proposition 21. *Soit* $A \in M_{n \times n}(k)$ *une matrice carrée. L'application* $t \mapsto e^{tA}$ *se dérive en* $t \mapsto A e^{tA}$.

Démonstration On sait d'après le cours d'analyse que pour pouvoir dériver terme à terme, il suffit de démontrer que la série et la serie dérivée terme à terme convergent absolument uniformément sur tout domaine borné. Or si $|t| < T$, la série des dérivées vaut $\sum_{k=0}^{k=\infty} (\frac{t^k A^k}{k!})' = \sum_{k=1}^{k=\infty} (\frac{k t^{k-1} A^k}{k!}) = A \sum_{k=0}^{k=\infty} (\frac{t^k A^k}{k!})$. La norme du terme général est au plus $(T||A||)^k / k!$ qui est le terme général de la série convergente $e^{T||A||}$. La série des dérivées est donc absolument uniformément convergente. Le même type de démonstration montre que la série est absolument uniformémement convergente. Donc on peut dériver la série terme à terme, ce qui donne le résultat voulu.

Voilà enfin le lien attendu entre exponentielles de matrices et équations différentielles.

Théorème 22. *Soit A une matrice carrée $n \times n$ à coefficients réels. Les vecteurs colonnes $y = y(t)$ solutions de $y' = Ay$ sont de la forme $y = e^{At}C$, où C est une matrice colonne de constantes.*

Démonstration Soit $C = e^{-At}y$. La formule de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$ est encore vraie lorsque u et v sont des matrices. On obtient donc pour la dérivation de C l'égalité $C' = (-Ae^{-At})y + e^{-At}y' = -Ae^{-At}y + e^{-At}Ay$. Puisque e^{-At} et A commutent, on a $C' = 0$, donc C est une colonne de constantes.

Voici le même exercice que celui abbordé en introduction, que nous pouvons maintenant résoudre par la théorie générale pour vérifier que nous trouvons bien le même résultat.

Exercice 23. Résoudre à l'aide d'une exponentielle de matrice $y' = Ay$ quand $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Correction 23. Puisque $At = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 3t \end{pmatrix}$ est diagonale, on obtient $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$ et $y = e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}C_1 \\ e^{3t}C_2 \end{pmatrix}$.

L'exercice suivant justifie l'égalité $e^{-At}A = Ae^{-At}$ utilisée dans la preuve.

Exercice 24. Soient A et $B \in M_{n,n}(k)$ telles que $AB = BA$.
a)Écrire la somme partielle de e^AB et de Be^A.
b)Conclure que $e^AB = Be^A$.
c)Montrer par un argument du même type que $e^Ae^B = e^Be^A$ si A et B commutent.
d)Donner un enoncé général de commutation sur les séries de matrices qui englobe les cas précédents.

Correction 24.
a)$e^AB = \lim S_n$ avec $S_n = (\sum_0^n \frac{A^i}{i!})B = \sum_0^n(\frac{A^iV}{i!})$. De même, $Be^A = \lim T_n$ avec $T_n = B(\sum_0^n \frac{A^i}{i!}) = \sum_0^n(\frac{BA^i}{i!})$.
b)Comme A et B commutent, on a $S_n = T_n$ et donc en passant à la limite,

$e^A B = Be^A$.

c)On a $e^A e^B = \lim U_n$ avec $U_n = (\sum_0^n \frac{A^i}{i!})(\sum_0^n \frac{B^i}{i!}) = \sum\sum_{i,j=0}^n \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!} = \sum\sum_{i,j=0}^n \frac{A^i B^j}{i!j!}$. De même, $e^B e^A = \lim V_n$ avec $V_n = sum \sum_{i,j=0}^n \frac{B^i A^j}{i!j!}$. Puisque A et B commutent, on a $U_n = V_n$ et donc en passant à la limite, $e^A e^B = e^B e^A$.

d)Si A et B sont deux matrices commutantes, si $S(A)$ et $T(B)$ sont deux séries convergentes en A et B, alors $S(A)T(B) = S(B)T(A)$. Il suffit comme précedemment d'ecrire les sommes partielles, de faire les commutations au niveau des sommes partielles, puis de passer à la limite.

Il faut deux paramètres (x, y) pour décrire un point de l'espace $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 et trois paramètres (x, y, z) pour décrire un point de l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Le théorème précédent nous dit que la solution générale est définie par n paramètres $C_1, \dots, C_n$ qui sont les coefficients de la colonne de constantes. Nous pouvons ici aussi interpréter le nombre de paramètres comme la dimension de l'espace ambiant.

Proposition 23. *Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ et S l'ensemble des vecteurs colonnes $y(t)$ solutions de $y' = Ay$. Alors S est un espace vectoriel de dimension n.*

Démonstration L'application $y(t) \mapsto y'(t) - Ay(t)$ est linéaire. Le noyau est donc un espace vectoriel. Or ce noyau est exactement l'ensemble S des solutions. L'ensemble S est donc bien un espace vectoriel.

L'application $f : \mathbb{R}^n \to S$, $C \mapsto e^{At}C$ est une application surjective d'àprès le théorème. Elle est injective puisque $f(C)(0) = C$. Donc $\dim S = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Si on applique le cas général, il nous faut calculer une exponentielle de matrices pour décrire les solutions. Le résultat suivant explique comment faire plus simple quand la matrice est diagonalisable.

Proposition 24. *Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, la solution générale de $y' = Ay$ est de la forme $y = c_1 e^{a_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{a_n t} v_n$, où les c_i sont des constantes et où les v_i forment une base de vecteur propres dont les valeurs propres associées sont les a_i.*

Démonstration Montrons tout d'abord que les fonctions $f_i : t \mapsto e^{a_i t} v_i$ sont linéairement indépendantes. Si $\sum \mu_i f_i = 0$, alors pour tout t, $\sum \mu_i e^{a_i t} v_i = 0$. Comme les v_i sont libres, on a $\mu_i e^{a_i t} = 0$ pour tout i, et donc $\mu_i = 0$ puisque l'exponentielle ne s'annule pas.

La proposition précédente montre que les solutions forment un espace vectoriel de dimension n. Les fonctions $f = e^{a_i t} v_i$ sont n solutions indépendantes donc elles forment une base de l'espace des solutions. Le y de la proposition représente l'écriture d'une solution sur cette base.

Commençons par une application directe avec des valeurs propres réelles distinctes.

Exercice 25.
a)Soit $X = (x, y, z)$. Trouver la solution générale de $X' = AX$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
b)Trouver la solution valant $(2, -2, 0)$ quand $t = 0$.

Correction 25.
a)Les valeurs propres de A sont $2, 3$ et 6 avec vecteurs propres $(1, 0, -1)$,$(1, 1, 1)$ et $(1, -2, 1)$. La solution générale est donc $C_1e^{2t}(1, 0, -1)+ C_2e^{3t}(1, 1, 1) + C_3e^{6t}(1, -2, 1)$.
b)Il faut $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 1$ pour que la solution vale $(2, -2, 0)$ quand $t = 0$.

Lorsque les valeurs propres sont complexes, on a un énoncé similaire.

Proposition 25. *Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, la solution générale $y : J \mapsto \mathbb{C}^n$ de $y' = Ay$ est de la forme $y = c_1e^{a_1t}v_1 + \cdots + c_ne^{a_nt}v_n$, où les c_i sont des constantes et où les v_i forment une base de vecteur propres dont les valeurs propres associées sont les a_i.*

Démonstration La démonstration est identique à celle de 24 en remplaąnt partout les fonctions à valeurs réelles par des fonctions à valeurs complexes, en considérant les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}$, et en comptant les dimensions sur $\mathbb{C}$.

La proposition 24 décrit les solutions réelles dans le cas où la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La proposition 25 décrit les solutions complexes dans le cas où la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En pratique, on rencontre souvent un cas intermédiaire : on cherche des solutions réelles (pour des raisons physiques), mais la matrice est diagonalisable seulement sur $\mathbb{C}$ car elle a des valeurs propres complexes. La méthode est alors la suivante. On cherche les solutions complexes. Puis on utilise la méthode classique de somme et de différence de solutions pour recombiner les solutions complexes et en extraire des solutions réelles à partir des solutions complexes conjuguées.

Voici dans l'exercice suivant une mise en pratique.

Exercice 26.
a)Soit $X = (x, y)$. Trouver la solution générale de $X' = AX$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Correction 26. Les valeurs propres de la matrice sont $3i$ et $-3i$. Les vecteurs propres correspondant sont $v_1 = (5, 1 - 3i)$ et son conjugué $v_2 = (5, 1 + 3i)$. Les solutions complexes sont donc de la forme $s = c_1 e^{3it} v_1 + c_2 e^{-3it} v_2$. En faisant $c_1 = c_2$, on trouve une solution $s_1 = c_1(5cos(3t), cos(3t) + 3sin(3t))$. En faisant $c_1 = -c_2$, on trouve une solution $s_2 = c_2(-5\sin(3t), -\sin(3t) + 3\cos(3t))$. Les solutions réelles générales sont de la forme $s_1 + s_2$.

Remarquons pour finir que nous n'avons traité que le cas des systèmes sans second membre dans ce paragraphe. Le cas avec second membre se résout ici aussi avec des techniques de variation de la constante : en remplaçant la matrice de constantes C par une matrice de fonctions, le problème se ramène à un calcul d'intégration.

5.2 y scalaire, coefficients constants, cas homogène

Remarquons que l'équation d'ordre n à coefficients constants $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ est équivalente au système

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \dots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

On peut donc résoudre les équations différentielles scalaires d'ordre n à coefficient constants avec les méthodes précédentes.

Comme souvent en mathématiques, la méthode générale nous fournit un cadre de pensée utile, mais il est plus rapide de résoudre les cas particuliers en développant une solution ad-hoc. Ici la théorie générale nous dit que les solutions forment un espace vectoriel de dimension n et nous savons par ailleurs que les solutions sont construites à base d'exponentielles. Il nous suffit pour trouver la solution générale de trouver n solutions indépendantes à tatons, à l'aide de la fonction exponentielle.

Proposition 26. *Considérons l'équation d'ordre n à coefficients constants $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$. Soit P le polynôme $P = x^n +$*

$a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Supposons que P admette n racines distinctes réelles $r_1, \ldots, r_n$. Alors la solution générale de l'équation différentielle est $y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + \cdots + c_ne^{r_nt}$.

Démonstration Chaque fonction $y_i = e^{r_it}$ est solution. En effet, si $y = e^{r_it}$, $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r_i^ny + \cdots + a_1r_iy + a_0y = P(r_i)y = 0$. Nous avons donc trouvé n solutions $y_i = e^{r_it}$ et la fonction y combinaison linéaire de ces solutions est encore solution. Il nous reste à montrer que les fonctions $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont linéairement indépendantes. Si $n = 1$, la fonction y_1 n'est pas nulle, donc l'indépendance linéaire est satisfaite. Soit $n > 1$. Supposons $\sum \mu_ie^{r_it} = 0$. Quitte à réordonner les r_i, on peut supposer que r_1 est le maximum de l'ensemble $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ des racines de P. En multipliant la dernière égalité par e^{-r_1t}, on obtient $\mu_1 + \sum_{i\geq 2} e^{(r_i-r_1)t} = 0$. Puis en prenant la limite en $+\infty$, on obtient $\mu_1 = 0$. D'où $\sum_{i\geq 2} \mu_ie^{r_it} = 0$. On conclut par récurrence que $\mu_2 = \mu_3 \cdots = \mu_n = 0$ et que les fonctions y_i sont bien linéairement indépendantes.

Définition 27. *Le polynôme P s'appelle le polynôme caractéristique de l'équation.*

Que se passe-t-il quand le polynôme caractéristique P de la proposition n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$? Il peut avoir des racines complexes conjuguées. La méthode est alors classique : on cherche des solutions complexes, puis on fait des combinaisons linéaires de ces solutions complexes pour trouver les solutions réelles.

Pour trouver les solutions complexes, on utilise l'analogue complexe du résultat précédent.

Proposition 28. *Considérons l'équation d'ordre n à coefficients constants $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y = 0$ où l'on cherche les solutions complexes. Soit P le polynôme $P = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Supposons que P admette n racines distinctes complexes $r_1, \ldots, r_n$. Alors la solution générale de l'équation différentielle est $y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + \cdots + c_ne^{r_nt}$.*

Démonstration La démonstration est analogue au cas réel car nous savons que les solutions réelles forment un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et que les solutions complexes forment un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.

Voici l'exemple archi-classique en physique de l'equation $y'' + y = 0$ pour trouver les solutions réelles à partir des solutions complexes.

Exercice 27.
a)Trouver les solutions complexes de $y'' + y = 0$.
b)En déduire les solutions réelles.

Correction 27.
a)Puisque $r^2+1=0$ admet deux racines i et $-i$, une base de solutions complexes de $y''+y=0$ est $y_1=e^{ix}=cos(x)+isin(x)$ et $y_2=e^{-ix}=cos(x)-isin(x)$.
b)On en déduit que $\frac{1}{2}(y_1+y_2)=cos(x)$ est solution, de même que $\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=\sin(x)$. Les solutions réelles sont donc de la forme $c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

La méthode précédente ne s'applique pas quand il y a des racines multiples. Que se passe-t-il par exemple quand P a une racine double, par exemple si $P=(x-r)^2=x^2-2rx+x^2$. Nous avons une solution $y=e^{rt}$ alors qu'il nous faudrait un espace de solutions de dimension 2. L'idée est de considérer le cas ou $P=(x-r)(x-s)$, puis de faire tendre s vers r. Si $P=(x-r)(x-s)$, on a deux solutions $y_r=e^{rx}$ et $y_s=e^{sx}$. Par linéarité, on a également la solution $\frac{y_r-y_s}{r-s}=\frac{e^{rx}-e^{sx}}{r-s}$. Quand s tend vers r, la fonction $\frac{e^{rx}-e^{sx}}{r-s}$ tend par définition de la dérivée vers xe^{rx}. Voilà donc un candidat pour être une nouvelle solution de l'équation différentielle. La proposition suivante donne un énoncé précis qui résume cette discussion.

Proposition 29. *Considérons l'équation différentielle $y''-2ry'+r^2y$. Le polynôme $P(x)=x^2-2rx+r^2$ admet r pour racine double. Les solutions de l'équation sont de la forme $y=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.*

Démonstration On sait que $y=e^{rx}$ est solution. Vérifions que $y=xe^{rx}$ est aussi solution. On a $y'=e^{rx}(rx+1)$ et $y''=e^{rx}[r+r(rx+1)]=e^{rx}(r^2x+2r)$. Donc $y''-2ry'+r^2y=e^{rx}[(r^2x+2r)-2r(rx+1)+r^2x]=0$. Puisque $y=xe^{rx}$ et $y=e^{rx}$ sont solutions et que l'équation est linéaire, les combinaisons linéaires $y=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$ sont également solutions. Il reste à vérifier que les fonctions e^{rx} et xe^{rx} sont indépendantes et nous aurons trouvé l'espace de dimension 2 de solutions. Si μ_1 et $\mu_2\in\mathbb{R}$ vérifient, $\mu_1e^{rx}+\mu_2xe^{rx}=0$, alors $\mu_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu_1e^{rx}+\mu_2xe^{rx}}{xe^{rx}}=0$. Par suite, $\mu_1=0$ également et les fonctions e^{rx} et xe^{rx} sont bien linéairement indépendantes.

La solution générale suit les lignes esquissées dans les cas précédents. On cherche les racines du polynôme caractéristique ce qui donne certaines solutions. Puis, si certaines racines sont multiples, on utilise des dérivations/multiplication par x pour avoir un nombre de solutions de l'équation différentielle égal au degré du polynôme. Enfin, on fait des combinaisons linéaires pour se ramener au cas réel si les racines sont complexes conjuguées.

5.3 Équations différentielles résolubles

Quelles sont les équations différentielles que l'on sait résoudre, pour lesquelles on peut écrire des formules explicites ? Comme nous l'avons expliqué dans la première section, cela dépend des formules qu'on s'autorise à écrire pour représenter la solution.

La première tentative consiste à dire que nous voulons décrire les solutions avec des fonctions polynomiales, leurs compositions, leurs inverses et leurs réciproques. On dispose alors des fonctions $\sqrt[n]{\ }$ qui sont les réciproques des fonctions $x \to x^n$ et d'une multitude d'autres fonctions par composition. À ce petit jeu, l'équation $y' = 2x$ admet une solution qui est la fonction polynômiale $y = x^2$. Mais une équation aussi simple que $y' = \frac{1}{x}$ n'admet pas de solution car la fonction logarithme ln ne peut pas s'exprimer avec des polynômes, des compositions ou des fonctions inverses.

Il nous faut donc assouplir les règles du jeu, sinon nous serons démunis et nous ne saurons presque jamais donner une formule. Nous allons autoriser pour exprimer nos solutions toutes les formules précédentes, mais aussi les logarithmes, les exponentielles, et plus généralement toutes les primitives, les réciproques et les compositions.

Définition 30. *On dit qu'une fonction est définissable par quadrature si elle peut être décrite avec les 4 opérations de l'école primaire, des compositions de fonctions, des fonctions réciproques et des primitives. On dit qu'une équation différentielle est résoluble par quadratures si on peut trouver une solution qui est définissable par quadratures.*

Exemple 31. *Si une équation différentielle admet une solution $s = 2F+\sqrt{F}$ où F est une primitive de $x\ sin^2(x)e^x$, alors s est résoluble par quadratures. En effet, on a utilisé seulement des symboles élementaires, et des primitives pour exprimer la solution.*

On peut maintenant poser la question suivante. Peut-on résoudre les équations différentielles par quadratures ? Peut on toujours trouver des formules pour les solutions avec les symboles précédents ?

La réponse est non en général, mais la réponse est oui dans le cadre des équations différentielles linéaires, qui sont l'objet de ce chapitre.Ce sont les équations "simples" de la théorie en quelque sorte. Les théorèmes que nous avons décrit dans ce chapitre permettent en effet d'affirmer que le résultat suivant est vrai.

Théorème 32. *Les équations différentielles linéaires sont résolubles par quadratures.*

Chapitre 6

Le théorème de Cauchy

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les solutions des équations différentielles lineaires formaient des espaces vectoriels de dimensions connue. Cela résultait essentiellement de nos techniques de calcul. Que se passe-il maintenant si l'on ne sait pas calculer explicitement des solutions ? Peut on encore décrire la dimension de l'espace des solutions ? Y a-t-il encore une unique solution lorsque les conditions initiales sont prescrites ? L'objet de ce chapitre est de répondre à ces questions pour une équation linéaire vectorielle (à coefficients non nécessairement constants).

Plus précisément, on considère un intervalle I et une fonction continue $A : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $t \mapsto A(t)$ à valeurs matricielle. On considère l'équation différentielle linéaire $Y'(t) = A(t)Y(t)$, qu'on note parfois $Y' = AY$ par abus de langage. Notre but est de démontrer le théorème suivant, dit théorème de Cauchy linéaire.

Théorème 33. *Les solutions de $Y' = AY$ forment un espace vectoriel de dimension n. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout vecteur de condition initiale Y_0, il existe une unique solution $Y(t)$ verifiant $Y(t_0) = Y_0$.*

6.1 L'equation résolvante

Dans l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$, l'inconnue $Y(t)$ est à t fixé un vecteur colonne. On peut également considérer l'équation $M'(t) = A(t)M(t)$ ou l'inconnue est une fonction $M : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Autrement dit, on remplace le vecteur colonne $Y(t)$ par une matrice carrée $M(t)$.

Définition 34. *L'équation $M' = AM$ est appelée équation résolvante associée à l'équation différentielle $Y' = AY$.*

Quel est le lien entre les solutions de ces deux équations ? Quelques élements sont donnés dans les exercices suivants.

Exercice 28. Montrer que M est solution de $M' = AM$ si et seulement si les colonnes C_i de M sont solution de $Y' = AY$.

Correction 28. La colonne i de M' est C_i'. La colonne i de AM est AC_i. Les matrices M' et AM sont égales ssi leurs colonnes sont égales, c'est à dire ssi pour tout i, $C_i' = AC_i$.

Exercice 29. Montrer que M est solution de $M' = AM$ si et seulement si toute combinaison linéaire C des colonnes C_i de M est solution de $Y' = AY$.

Correction 29. Si toute combinaison linéaire C des C_i est solution de $Y' = AY$, c'est vrai en particulier pour $C = C_i$. Donc les colonnes étant solution de $Y' = AY$, il s'ensuit $M' = AM$ par l'exercice précédent. Réciproquement, si $M' = AM$, soit $C = \sum a_i C_i$ une combinaison linéaire. On a par l'exercice précédent $C_i' = AC_i$ pour tout i. Donc $a_i C_i' = a_i AC_i$ et par addition $(\sum a_i C_i)' = \sum a_i AC_i = A(\sum a_i C_i)$.

6.2 Résolution de l'équation résolvante

On veut dans cette section montrer le théorème suivant.

Théorème 35. *Il existe une unique solution $M(t)$ de l'équation résolvante dont la valeur $M(t_0)$ en $t = t_0$ soit l'identité.*

Définition 36. *On dit qu'une solution $M(t)$ de l'équation résolvante dont la valeur $M(t_0)$ en $t = t_0$ est l'identité est une résolvante de l'équation. Le théorème précédent se reformule donc en disant qu'il existe une résolvante unique.*

Notre premier but est de reformuler l'équation résolvante avec un opérateur Φ et une intégrale plutôt qu'avec une dérivation. Si $M' = AM$ et $M(t_0) = Id$, alors en intégrant cette égalité entre t_0 et t, on obtient $\int_{t_0}^t M'(t)\ dt = \int_{t_0}^t A(t)M(t)\ dt$, c'est à dire $M(t) - M(t_0) = \int_{t_0}^t A(t)M(t)\ dt$. Si on note Φ l'opérateur qui associe à $M(t)$ l'application $N(t) = \int_{t_0}^t A(t)M(t)\ dt$, l'égalité précédente se réécrit

$$M(t) = Id + \Phi(M(t)).$$

C'est la reformulation que nous cherchions.

Dans ce qui précède, on a dit que l'intégrale de la dérivée de la résolvante est égale à la résolvante. L'exercice suivant justifie ce point.

Exercice 30.
a)Donner une condition suffisante sur une fonction f qui permette d'écrire $\int_x^y f'(t)\ dt = f(y) - f(x)$.
b)Cette condition s'applique-t-elle si f est une résolvante ?

Correction 30.
a)Il suffit que f soit de classe C^1.
b)Une résolvante $M(t)$ est dérivable par définition. Puisque $M'(t) = A(t)M(t)$ avec A continue, la dérivée est donc continue et M est de classe C^1.

Partant de la reformulation avec l'opérateur Φ, on peut remplacer le terme M à droite du signe égal par la valeur de M. On obtient alors

$$M = Id + \Phi(Id) + \Phi^2(M).$$

En recommençant le processus de remplacement, on obtient finalement

$$M = Id + \Phi(Id) + \Phi^2(Id) + \cdots + \Phi^{k-1}(Id) + \Phi^k(M).$$

Pour montrer que la série qui est en train d'apparaitre est convergente, on a besoin d'estimer les normes des termes qui apparaissent dans la série. C'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 31. Soit $t \to P(t)$ une application continue définie sur un segment $[a, b]$ inclus dans I à valeurs dans $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Soit $||P||$ la norme sup de P sur $[a, b]$, ie $||P|| = sup_{t\in[a,b]}||P(t)||$. Montrer par récurrence que $||\Phi^k(P)(t)|| \leq ||P||.||A||^k|t - t_0|^k/k!$.

Correction 31. On procède par récurrence pour $k \geq 0$. Pour $k = 0$, $\Phi^0(P) = Id(P) = P$, donc le résultat est évident. Si $t \geq t_0$, $||\Phi^{k+1}(P)(t)|| = ||\int_{t_0}^t A(t)\Phi^k(P)(t)\ dt|| \leq \int_{t_0}^t ||P||.||A||^{k+1}.(t-t_0)^k/k!\ dt = ||P||.||A||^{k+1}.(t-t_0)^{k+1}/(k+1)!$. Le cas $t < t_0$ se traite d'une manière identique.

Proposition 37. *La série de fonctions de terme général $\Phi^k(I)$ est normalement convergente sur tout compact vers une limite $M(t)$. L'application $t \to M(t)$ est une résolvante.*

Démonstration D'après l'exercice précédent, sur le compact $[a, b]$, la fonction $\Phi^k(I)$ est majorée par $t_k = e^k/k!$ avec $e = ||A||(b-a)$. Puisque t_k est le terme d'une série exponentielle convergente, la série de fonctions est normalement convergente.

Pour vérifier que la limite est bien une résolvante, on doit vérifier par la reformulation que $M = I + \Phi(M)$. Or $M = \sum_{k\geq 0}\Phi(I)$. Donc $\Phi(M) = \sum_{k\geq 1}\Phi(Id)$. Et $Id + \Phi(M) = \sum_{k\geq 0}\Phi(Id) = M$.

6.3 De la résolvante aux solutions

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que l'équation résolvante avait une solution $M(t)$ et que les combinaisons linéaires des colonnes de M sont des solutions de $Y' = AY$. On voudrait maintenant montrer qu'on a ainsi décrit toutes les solutions et qu'il n'y en a pas d'autres.

Lemme 38. *Le determinant $D(t) = \det(M(t))$ satisfait l'équation $D'(t) = Tr(A(t))D(t)$.*

Démonstration On rappelle qu'une application multilinéaire se dérive comme un produit. En particulier, puisque le determinant est multilinéaire comme fonction des colonnes M_i de M, on a: $D'(t) = det(M_1', M_2, \dots, M_n) + \cdots + \det(M_1, \dots, M_{n-1}, M_n') = \det(AM_1, M_2, \dots, M_n) + \cdots + \det(M_1, \dots, M_{n-1}, AM_n) = Tr(A(t))M$. Pour justifier cette dernière égalité, voici un argument possible. L'égalité est vraie par un calcul direct si M est diagonale. Si M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, on se ramène au cas diagonal par changement de base. Enfin, les matrice diagonalisables sont denses. Les fonctions $M \mapsto \det(AM_1, M_2, \dots, M_n) + \cdots + \det(M_1, \dots, M_{n-1}, AM_n)$ et $M \mapsto Tr(A(t))M$ coincident sur un ensemble dense et sont continues, donc elles sont égales.

Lorsqu'on intègre l'équation différentielle du lemme, on obtient $D(t) = e^{\int_{t_0}^t Tr(A(t))dt} D(t_0)$ avec $D(t_0) = \det M(t_0) = 1$. Il s'ensuit que le déterminant $D(t) = \det M(t)$ ne s'annule pas. On a montré:

Proposition 39. *Pour tout t, la résolvante $M(t)$ est inversible.*

Corollaire 40. *Les solutions de $Y' = AY$ sont les combinaisons linéaires des colonnes de la résolvante.*

Démonstration Si Y est une solution, considerons $C(t) = M^{-1}(t)Y(t)$. Donc $Y(t) = M(t)C(t)$. Par dérivation, on obtient $Y' = M'C + MC' = AMC + MC' = AMM^{-1}Y + MC'$. Donc $MC' = 0$ et $C' = 0$. Il s'ensuit que C est une matrice de constantes et que $Y(t) = M(t)C$ est une combinaison linéaire des colonnes de $M(t)$.

Exercice 32. Montrer que les fonctions $t \mapsto C_i(t)$ associées aux colonnes $C_i(t)$ de la résolvante $M(t)$ sont linéairement indédendantes.

Correction 32. Considérons une relation $\sum a_i C_i(t) = 0$. En $t = t_0$, on a la relation $\sum a_i C_i(t_0) = 0$. Or les colonnes $C_i(t_0)$ sont les colonnes de la matrice identité qui sont linéairement independantes. Il s'ensuit que les a_i sont nuls.

Le théorème de Cauchy linéaire se démontre maintenant facilement. Les solutions sont les combinaisons linéaires des n colonnes $C_i(t)$ linéairement indépendantes de la résolvante, donc elles forment un espace vectoriel de dimension n. Puisque la résolvante vaut l'identité en t_0, pour que la solution $Y(t) = \sum a_i C_i(t)$ vale $(y_1, \ldots, y_n)$ en t_0, il faut et il suffit que $a_i = y_i$ pour tout i. La solution est donc unique.