La fonction de Hilbert de la réunion de 4^h gros points génériques de $I\!P^2$ de même multiplicité

Résumé

Une conjecture de Harbourne et Hirschowitz pronostique la fonction de Hilbert des réunions génériques de gros points dans $I\!P^2$. Cette conjecture n'a jamais pu être vérifiée dans le cas où le nombre r de gros points est fixé supérieur ou égal à dix et où les multiplicités sont arbitrairement grandes.
On montre que si r est une puissance de quatre, la fonction de Hilbert de la réunion de r gros points génériques de multiplicité m est $H_{m^r}(d) = min(\frac{(d+1)(d+2)}{2}, r\frac{m(m+1)}{2})$, conformément à la conjecture.

Introduction

La conjecture de Harbourne-Hirschowitz dit que si $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r \geq 0$ et $d \geq m_1 + m_2 + m_3$, la dimension $l(d, m_1, m_2, \ldots, m_r)$ du système linéaire des courbes de $I\!P^2$ de degré d passant par r points génériques $p_1, p_2, \ldots, p_r$ avec multiplicité $m_1, m_2, \ldots, m_r$ est $max(0, \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum \frac{m_i(m_i+1)}{2})$. Comme on peut se ramener au cas $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ par des transformations de Cremona, la conjecture pronostique la fonction de Hilbert $H_{(m_1,\ldots,m_r)}(d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - l(d, m_1, m_2, \ldots, m_r)$ des réunions génériques de r gros points de multiplicité $m_1, \ldots, m_r$.
La conjecture est connue quand le nombre r de points est au plus neuf ([N1]), quand les multiplicités sont petites ([AC],[AH1],[CM],[CM1], [M], ...), ou au moins suffisamment petites par rapport à r ([AH]). A l'opposé, les cas où les multiplicités sont grandes par rapport à r sont mal compris. En particulier, on ne connait pas de famille infinie $\mathcal{F}$ de multi-entiers $\underline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ telle que: tous les multi-entiers de $\mathcal{F}$ ont même longueur $r \geq 10$, il existe dans la famille des multi-entiers dont la plus petite des multiplicités m_r est arbitrairement grande et pour tout multi-entier $\underline{m}$ de cette famille, $H_{\underline{m}}$ est la fonction prévue par la conjecture. Le but de ce travail est d'exhiber une infinité de telles familles. Nous allons nous concentrer sur les familles $\mathcal{F}_r$ de multi-entiers homogènes (i.e. de la forme $(m, m, \ldots, m)$) de longueur r, familles naturelles et abondamment étudiées dans la littérature ([N2],[CM1], ...).

Théorème. *Supposons le corps de base k de caractéristique nulle. Soit $r = 4^h$ une puissance de quatre. La fonction de Hilbert H_{m^r} de la réunion de r gros points génériques de $I\!P^2$ de multiplicité m vaut $H_{m^r}(d) = min(\frac{(d+1)(d+2)}{2}, r\frac{m(m+1)}{2})$.*

La démonstration repose sur la géométrie des schémas ponctuels. Les schémas ponctuels utilisés (schémas monômiaux et schémas complets) sont introduits dans la section 1. La démonstration du théorème est donnée dans la section 2. On y introduit des sous-variétés de $Hilb\ I\!P^2$ paramétrant des schémas de dimension zéro et on réduit la démonstration du théorème à une incidence entre certaines de ces sous-variétés (proposition 6). Cette incidence est obtenue en deux étapes: on produit d'abord des incidences dites élémentaires (section 2.1), puis on conclut par un raisonnement combinatoire (section 2.2).
Signalons enfin que le théorème s'étend par les mêmes méthodes aux entiers r de la forme $4^h.9^k.25^l$, mais au prix d'arguments combinatoires incluant de trop nombreux sous-cas que nous ne donnerons pas.

1 Schémas de dimension zéro

1.1 Schémas monômiaux et escaliers

On appelle escalier une partie E de $\mathbb{N}^2$ dont le complémentaire C vérifie $C + \mathbb{N}^2 \subset C$. On notera $c(E)$ son cardinal, et I^E l'idéal de $k[[x, y]]$ formé par les éléments $\sum c_{ij}x^iy^j$ vérifiant $c_{ij} = 0$ si $(i, j) \in E$. Un sous-schéma de $I\!P^2$ supporté par un point p est dit monômial d'escalier E si il est défini par l'idéal I^E

dans un bon système de coordonnées locales en p. Le degré d'un tel schéma est $c(E)$.
On notera E_m l'escalier régulier de rang m: $E_m = \{(a,b),\ a+b<m\}$. On appelle escalier quasi-régulier de rang m un escalier E vérifiant $E_m \subset E \subset E_{m+1}$ et $E \neq E_{m+1}$.

1.2 Schémas définis par des idéaux complets

On dit qu'une suite $K = (p_0^{m_0}, p_1^{m_1}, \ldots, p_{r-1}^{m_{r-1}})$ de points pondérés dans $\mathbb{Z}$ est un préamas de $\mathbb{P}^2$ si $p_0 \in S_0 := \mathbb{P}^2$ et $p_{i+1} \in S_{i+1}$, où S_{i+1} est l'eclatée de S_i en p_i. On note $\pi_{j,i}$ les morphismes $S_j \to S_i$ définis par le préamas. On parlera d'amas au lieu de préamas si, pour tout $i>0$, $\pi_{i,0}(p_i) = p_0$. Chaque point p_i définit un diviseur exceptionnel $\pi_{i+1,i}^{-1}(p_i)$ de S_{i+1}, noté Q_i^{i+1} ou E_i^{i+1}. Pour $s > i+1$, on note Q_i^s (respectivement E_i^s) la transformée stricte (respectivement totale) de Q_i^{i+1} par $\pi_{s,i+1}$. Le préamas K définit un diviseur $D_K = \sum m_i E_i^r$ de S_r, un faisceau d'idéaux $(\pi_{r,0})_* \mathcal{O}_{S_r}(-D_K)$ et donc un sous-schéma de $\mathbb{P}^2$. Un sous-schéma qui peut être défini par un préamas est dit complet. Dans la suite, on identifiera deux préamas $K = (p_0^{m_0}, \ldots, p_{r-1}^{m_{r-1}})$ et $K' = (p_0'^{m_0'}, \ldots, p_{r-1}'^{m_{r-1}'})$ s'il existe un $\mathbb{P}^2$-isomorphisme de S_r vers S_r' qui envoie D_K sur $D_{K'}$.
Un schéma ponctuel complet n'est pas défini par un unique préamas. On peut cependant avoir une forme d'unicité grâce à la notion de proximité. On dit que p_i est proche de p_j si $p_i \in Q_j^i$. Un point p_i est proche d'au plus deux points. S'il est proche de deux points, on dira qu'il est satellite et dans le cas contraire, on dira qu'il est libre. Soit $K = (p_0^{m_0}, \ldots, p_{r-1}^{m_{r-1}})$ un préamas et p_i un point du prémas tel que $m_i < \sum_{p_j \text{ proche de } p_i} m_j$. Soit $K' = (p_0^{m_0'}, \ldots, p_{r-1}^{m_{r-1}'})$ où $m_i' = m_i + 1$, $m_j' = m_j' - 1$ si p_j est proche de p_i et $m_j' = m_j$ pour les autres indices. Alors K et K' définissent le même schéma. On dit que K' est obtenu par déchargement de K au point p_i. Un préamas est déchargé si pour tout point p_i, $m_i \geq \sum_{p_j \text{ proche de } p_i} m_j$. Tout schéma ponctuel complet est défini par un unique préamas déchargé $(p_0^{m_0}, \ldots, p_{r-1}^{m_{r-1}})$ à multiplicités strictement positives et son degré est $\sum \frac{m_i(m_i+1)}{2}$.

La prochaîne proposition explique comment coder par un graphe les relations de proximité. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de points du préamas et elle est laissée au lecteur.

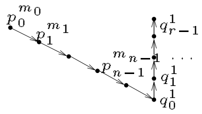
Définition 1. On appelle graphe pondéré la donnée d'un ensemble fini de points $\mathfrak{P}$, d'un ensemble de segments $\mathfrak{S}$, d'une application origine $o : \mathfrak{S} \to \mathfrak{P}$, d'une application but $b : \mathfrak{S} \to \mathfrak{P}$, d'une application grille $g : \mathfrak{S} \to \{*_v, *_h, *_o\}$ et d'une application multiplicité $m : \mathfrak{P} \to \mathbb{Z}$. Un segment s est dit horizontal (resp. vertical, oblique) si $g(s) = *_h$ (resp. $g(s) = *_v$, $g(s) = *_o$). Deux points p et q sont dits consécutifs s'il existe un segment d'origine p et de but q. On appelle coude horizontal (resp. vertical) de longueur $r \geq 2$, d'origine p_0 et de but p_r une suite de points consécutifs $p_0, p_1, \ldots, p_r$ tels que le segment joignant p_0 à p_1 ne soit pas horizontal (resp. vertical) et, pour $i \geq 1$, les segments de p_i vers p_{i+1} sont horizontaux (resp. verticaux). Un coude est un coude horizontal ou vertical. Par convention, un coude de longueur 1 est un couple de points consécutifs. Un coude maximal est un coude $p_0, \ldots, p_r$ qui ne peut pas être prolongé en un coude $p_0, \ldots, p_r, p_{r+1}$. Un isomorphisme entre deux graphes pondérés est la donnée de deux bijections entre les ensembles de points et les ensembles de flèches compatibles aux applications o, b et m. On appelle type combinatoire une classe d'isomorphisme de graphes pondérés.

Proposition 2. *Il existe une unique application f de l'ensemble des préamas de $\mathbb{P}^2$ dans l'ensemble des graphes pondérés telle que:*

1. *pour tout préamas $K = (p_0^{m_0}, \ldots, p_{r-1}^{m_{r-1}})$, l'ensemble de points $\mathfrak{P}$ de $f(K)$ est $\{p_0, \ldots, p_{r-1}\}$ et la multiplicité $m(p_i)$ d'un point p_i est m_i*
2. *tout point est le but d'au plus un segment*
3. *un point est satellite si et seulement si il est le but d'un segment horizontal ou vertical*
4. *si p_i et p_j sont deux points consécutifs alors $p_j \in Q_i^j$ et la réciproque est vraie si p_j est libre*
5. *Q_i^r et Q_j^r s'intersectent si et seulement si $f(K)$ contient un coude maximal d'extremités p_i et p_j*

6. p_j *est proche de* p_i *si et seulement si il existe un coude d'origine* p_i *et de but* p_j
7. *un segment d'origine un point libre et de but un point satellite est vertical*

1.3 Exemple principal utilisé dans ce travail



Graphe G de type (m, n)

Définition 3. *On dit qu'un graphe pondéré* G *(voir figure) est de type* (m, n) *s'il existe des entiers* ≥ 0 r,m_i, *des points* p_i, q_i *tels que:*

- G *est formé de* $n + r$ *points consécutifs* $(p_0^{m_0}, \dots, p_{n-1}^{m_{n-1}}, q_0^1, \dots, q_{r-1}^1)$
- *les flèches reliant les points de* G *sont définies par la figure*
- G *est déchargé (i.e.* $m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq r$*),* $m_0 \in \{m, m+1\}$ *et* $m_{n-1} = m$.

Un type combinatoire de type (m, n) *est la classe d'isomorphisme d'un graphe pondéré de type* (m, n)*. La notion de "type* (m, n)*" s'étend naturellement aux amas* K *via la proposition 2, et aux schémas complets, qui sont définis par un unique "bon" amas. Un système de coordonnées locales* (x, y) *centré en* p_0 *est dit compatible avec un amas* $K = (p_0^{m_0}, \dots, p_{n-1}^{m_{n-1}}, q_0^1, \dots, q_{r-1}^1)$ *de type* (m, n) *si les transformées strictes successives de l'axe des* x *passent par les points* $p_1, \dots, p_{n-1}$*, et par* q_0 *si ce point est défini.*
Un escalier fini E *peut être défini par une suite décroissante d'entiers* n_i *et par la relation:* $(x, y) \in E$ *ssi* $x < n_y$*. Si* E *et* F *sont deux escaliers définis par des suites* n_i *et* p_i*, la suite* $n_i + p_i$ *définit un escalier appelé sommme horizontale de* E *et* F*, et notée* $E +_h F$*. Intervertissant les deux coordonnées, on dispose d'une somme verticale* $+_v$.

Proposition 4. *Soit* $K = (p_0^{m_0}, \dots, p_{n-1}^{m_{n-1}}, q_0^1, \dots, q_{r-1}^1)$ *un amas de type* (m, n)*,* (x, y) *un système de coordonnées locales compatible à* K *et* X *un sous-schéma de* $\mathbb{P}^2$ *supporté par* p_0*. Le schéma* X *est défini par* K *ssi* X *est le schéma monômial d'escalier* $E_{m_0} +_h E_{m_1} +_h \dots E_{m_{n-1}} +_h (E_1 +_v E_1 +_v \dots +_v E_1)$ *dans les coordonnées* (x, y)*, où les parenthèses contiennent* r *copies de* E_1.

Démonstration: c'est un conséquence de [CGL] ∎

2 Démonstration du théorème

Définition 5. *Soient* $G_1, \dots, G_s$ *des types combinatoires et* $E^1, \dots, E^t$ *des escaliers. La sous-variété de* Hilb $\mathbb{P}^2$ *qui paramètre les sous-schémas de* $\mathbb{P}^2$ *qui s'écrivent comme réunion disjointe de* s *schémas complets de type combinatoire* $G_1, \dots, G_s$ *et de* t *schémas monômiaux d'escalier* $E^1, \dots, E^t$ *sera notée* $V(G_1, \dots, G_s, E^1, \dots, E^t)$*. Cette variété est irréductible. On note* X *le sous-schéma paramétré par son point générique et* $l(d, G_1, \dots, G_s, E^1, \dots, E^t)$ *le nombre* $h^0(I_X(d))$.

Proposition 6 (réduction a une incidence). *Si pour tout quadruplet d'escaliers quasi-réguliers de même rang* $\{E^1, E^2, E^3, E^4\}$*, il existe un escalier quasi-régulier* E *tel que l'adhérence* $\overline{V(E^1, E^2, E^3, E^4)}$ *de* $V(E^1, E^2, E^3, E^4)$ *contienne* $V(E)$*, alors le théorème est vrai.*

Démonstration: si l'hypothèse est satisfaite, on peut collisionner 4^h gros points de multiplicité m en un schéma monômial quasi-régulier comme on le voit par récurrence sur h. Le cas $h = 0$ est évident. On regroupe les 4^h gros points en quatre paquets de 4^{h-1} gros points. Par hypothèse de recurrence, il existe un escalier quasi-régulier E' tel qu'on peut collisionner les gros points de chacun des paquets en un schéma monômial d'escalier E'. Par l'hypothèse de la proposition, on peut collisionner les quatre schémas d'escalier E' en un schéma d'escalier E quasi-régulier. Le dégré d'un shéma ponctuel étant conservé par limite plate, le cardinal de E est $r\frac{m(m+1)}{2}$ et, puisque E est quasi-régulier, $l(d, E) = max(0, \frac{(d+1)(d+2)}{2} - r\frac{m(m+1)}{2})$. Par semi-continuité de la cohomologie, on a $l(d, E_m, \ldots, E_m) \leq l(d, E)$, où le terme de gauche contient r copies de E_m. On obtient l'égalité voulue $l(d, E_m, \ldots, E_m) = max(0, \frac{(d+1)(d+2)}{2} - r\frac{m(m+1)}{2})$ car l'inégalité réciproque est évidente. ■

2.1 Relations d'incidence élémentaires.

Dans cette section, nous exhibons quelques relations d'incidence entre les sous-variétés de $Hilb\mathbb{P}^2$ de la forme $V(G_1, G_2, \ldots, G_s, E^1, \ldots, E^t)$. Ces relations seront *élémentaires* , c'est à dire qu'elles s'écriront $\overline{V(D^1, D^2)} \supset V(D^3)$ ou bien $\overline{V(D^1)} \supset V(D^2)$. L'incidence voulue par la proposition 6 sera obtenue dans la prochaîne sous-section à partir des incidences élémentaires par un raisonnement combinatoire.

Proposition 7. *Soit E^3 la somme horizontale (respectivement verticale) de deux escaliers E^1 et E^2. Alors, $\overline{V(E^1, E^2)} \supset V(E^3)$*

Démonstration: voir [H]. ■

Définition 8. Soit V_n l'escalier vertical de rang n i.e. $V_n = \{(0, b), 0 \leq b < n\}$. Soit E un escalier. On appelle candidat de E un élément (a, b) de $\mathbb{N}^2 - E$ vérifiant $a = 0$ ou $(a-1, b) \in E$. On peut classer les candidats pour l'ordre suivant: $(a, b) < (c, d)$ si $a + b < c + d$ ou $(a + b = c + d$ et $b < d)$. On appelle somme hypersingulière de E et de V_n la réunion de E et des n plus petits candidats pour cet ordre. On notera cet ensemble $E +_{hyp} V_n$

Proposition 9. *La somme hypersingulière $E +_{hyp} V_n$ est un escalier. Si le corps de base k est de caractéristique nulle, alors $\overline{V(E, V_n)} \supset V(E +_{hyp} V_n)$.*

Esquisse de démonstration: soit p un point de $\mathbb{P}^2$ et $Spec\ k[[x, y]]$ un voisinage formel de p. Soit Z_1 le schéma défini par l'idéal I^{V_n} et $Z_2(t)$ le translaté au point de coordonnées (t^k, t^{k+1}) du schéma Z_2 défini par l'idéal I^E. Un (long) calcul montre que, pour k assez grand, la limite plate quand t tend vers 0 du schéma $Z_1 \cup Z_2(t)$ est définie par l'idéal $I^{E +_{hyp} V_n}$. ■

Définition 10. *Soit n un entier naturel. Un escalier E est dit $(1, -n)$ stable si $((x, y) \in E$ et $y \geq n) \Rightarrow (x+1, y-n) \in E$. Le $(1, -n)$ spécialisé d'un escalier E est le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ qui a le même nombre d'éléments que E sur les droites $nx + y = cte$ et qui est $(1, -n)$ stable.*

Proposition 11. *Le $(1, -n)$ spécialisé d'un escalier E est un escalier E'. Si car $k = 0$, $\overline{V(E)} \supset V(E')$.*

Démonstration: voir [Ev] ■

Proposition 12. *Soient T_{n-1} et T_1 deux types combinatoires de type $(m, n-1)$ et $(m, 1)$. Il existe un unique type combinatoire T_n de type (m, n) tel que, si C_1, C_{n-1} et C_n sont des schémas de type T_1, T_{n-1} et T_n, les degrés de ces schémas vérifient: $deg(C_1) + deg(C_{n-1}) = deg(C_n)$. Le type T_n est appelé la somme des types T_{n-1} et T_1.*

Démonstration: notons $d(T)$ le degré d'un schéma de type combinatoire T. Un type combinatoire de type (m, n) est entièrement déterminé par une suite $(m_0, m_1, \ldots, , m_{n-1}, r)$ vérifiant $m_0 \geq m_1 \geq \cdots \geq m_{n-1} \geq r$, $m_{n-1} = m$ et $m_0 \in \{m, m+1\}$ et le degré correspondant est $\sum \frac{m_i(m_i+1)}{2} + r$. On peut classer les types combinatoires de type (m, n) en utilisant l'ordre lexicographique pour les suites qui les définissent. Le plus petit et le plus grand des types combinatoires de type (m, n) ont pour degré respectif $d_{min}(m, n) = n\frac{m(m+1)}{2}$ et $d_{max}(m, n) = (n-1)\frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + m$. En outre, on remarque que si T et T' sont deux types combinatoires consécutifs pour l'ordre introduit, $d(T') = d(T) + 1$. Donc pour tout d compris entre $d_{min}(m, n)$ et $d_{max}(m, n)$, il existe un unique type combinatoire T de type (m, n) satisfaisant $d(T) = d$. Puisque $d_{min}(m, n-1) + d_{min}(m, 1) = d_{min}(m, n)$ et $d_{max}(m, n-1) + d_{max}(m, 1) < d_{max}(m, n)$, il existe un unique type combinatoire T_n de type (m, n) tel que $d(T_n) = d(T_{n-1}) + d(T_1)$. ■

Proposition 13. *Soient T_{n-1} et T_1 deux types combinatoires de type $(m,n-1)$ et $(m,1)$, et $T_n := T_{n-1}+T_1$. On a l'incidence élémentaire $\overline{V(T_{n-1},T_1)} \supset V(T_n)$.*

Démonstration: deux schémas de type T_n étant monômiaux de même escalier, il suffit pour démontrer la proposition de construire un schéma C_n de type T_n qui soit une collision de deux schémas C_{n-1} et C_1 de type respectif T_{n-1} et T_1. Le principe général est le suivant. Le schéma C_{n-1} sera fixe dans $\mathbb{P}^2$ tandis que le schéma C_1 "bouge" et vient rencontrer C_{n-1}. La collision C_n de C_{n-1} et C_1 dans $\mathbb{P}^2$ induit une collision $\tilde{C}$ dans un éclatement $\tilde{\mathbb{P}}^2$ de $\mathbb{P}^2$. Cette collision $\tilde{C}$ s'avère être une collision hypersingulière et on la calcule à l'aide de la proposition 9. Enfin, on calcule C_n à partir de $\tilde{C}$.
Le trajet du schéma C_1 (que nous préciserons plus tard) correspond à une famille plate de $Spec\ k[[t]]\times\mathbb{P}^2$ dont on note $C_1(t)$ la fibre générique et $C_1(0)$ la fibre spéciale. Puisque C_{n-1} est un schéma de type T_{n-1}, il est défini par un amas $(p_0^{m_0},\dots,p_{n-2}^{m_{n-2}},q_0^1,\dots,q_{r-1}^1)$. On éclate $\mathbb{P}^2$ suivant l'amas $(p_0^{m_0},\dots,p_{n-2}^{m_{n-2}})$. Le trajet de C_1 dans $\mathbb{P}^2 =: S_0$ correspond à un trajet dans la surface éclatée S_{n-1}: il existe une unique famille plate de $Spec\ k[[t]]\times S_{n-1}$ dont la fibre générique $\tilde{C}_1(t)$ est définie par le faisceau d'idéaux $(\pi_{n-1,0})^*I_{C_1(t)}$. L'inclusion $(\pi_{n-1,0})^*(\lim_{t\to 0} I(t)) \subset \lim_{t\to 0}\ (\pi_{n-1,0})^*I(t)$ est valable pour tout faisceau d'idéaux $I(t)$ de $(Spec\ k[[t]]-\{0\})\times\mathbb{P}^2$. Quand $I(t)$ définit $C_1(t)\cup C_{n-1}$, on obtient:

$$(\pi_{n-1,0})^*(I_{C_n}) \subset \lim_{t\to 0}(\pi_{n-1,0})^*(I_{C_{n-1}}.I_{C_1(t)}) = \lim_{t\to 0}(\pi_{n-1,0})^*I_{C_{n-1}}\ .\ I_{\tilde{C}_1(t)} \tag{1}$$

La théorie des idéaux complets nous assure que le faisceau d'idéaux $(\pi_{n-1,0})^*I_{C_{n-1}}$ est un produit (avec les notations E_i^j de la section 1 pour les diviseurs exceptionnels):

$$(\pi_{n-1,0})^*I_{C_{n-1}} = \mathcal{O}(-\sum_{i\le n-2} m_iE_i^{n-1}).I_{K_1} \tag{2}$$

où I_{K_1} est le faisceau d'idéaux de S_{n-1} défini par l'amas $K_1 := (q_0^1,q_1^1,\dots,q_{r-1}^1)$ de S_{n-1}. Puisque $\mathcal{O}(-\sum_{i\le n-2} m_iE_i^{n-1})$ est localement un idéal principal, on a en posant $I_{\tilde{C}} = \lim_{t\to 0} I_{K_1}.I_{\tilde{C}_1(t)}$

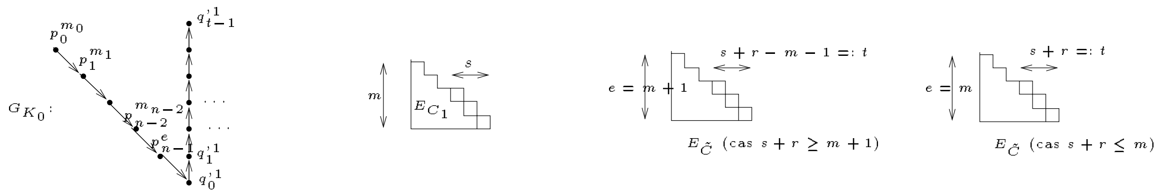
$$\lim_{t\to 0}\mathcal{O}(-\sum_{i\le n-2} m_iE_i^{n-1}).I_{K_1}.I_{\tilde{C}_1(t)} = \mathcal{O}(-\sum_{i\le n-2} m_iE_i^{n-1}).I_{\tilde{C}} \tag{3}$$

Les relations (1) à (3) permettent de relier C_n et $\tilde{C}$:

$$(\pi_{n-1,0})^*I_{C_n} \subset \mathcal{O}(-\sum_{i\le n-2} m_iE_i^{n-1}).I_{\tilde{C}} \tag{4}$$

Calculons $I_{\tilde{C}}$. D'après les propositions 2 et 4, dans un système de coordonnées locales centré en q_0, dans lequel l'axe des y est Q_{n-2}^{n-1} et dans lequel l'axe des x est quelconque, le schéma $V(I_{K_1})$ est un schéma monômial d'escalier V_r vertical de rang r (si r est nul, q_0 n'est à priori pas défini et on décrète alors que c'est un point libre quelconque de Q_{n-2}^{n-1}). Puisque C_1 a pour type T_1, il est monômial, associé à un escalier E_{C_1}. L'escalier E_{C_1} est dessiné dans la figure, ce qui définit un entier s. On choisit maintenant le trajet de C_1 de sorte que $\tilde{C}$ soit la collision hypersingulière des schémas monômiaux d'escalier E_{C_1} et V_r calculée dans la proposition 9: $I_{\tilde{C}} = I^{E_{C_1}+_{hyp}V_r}$. L'escalier $E_{C_1}+_{hyp}V_r =: E_{\tilde{C}}$ est dessiné dans la figure, en séparant les cas $s+r\ge m+1$ et $s+r\le m$.
Explorons plus avant le lien entre C_n et $\tilde{C}$ en partant de la relation (4). D'après la proposition 4, $I^{E_{\tilde{C}}}$ est un idéal complet défini par un amas $K_{\tilde{C}} = (p_{n-1}^e, {q'}_0^1, {q'}_1^1,\dots,{q'}_{t-1}^1)$ de S_{n-1}, où $p_{n-1}=q_0$, et où e et t sont définis dans la figure représentant $E_{\tilde{C}}$. Eclatons S_{n-1} relativement à $K_{\tilde{C}}$. On note S_n l'éclatée de S_{n-1} en p_{n-1} et S_{n+1+i} la surface obtenue après éclatement du point q'_i. On dispose alors de morphismes $\pi_{j,i}$ et de diviseurs exceptionnels E_i^j avec $j\le n+t$. En appliquant $(\pi_{n+t,n-1})^*$ à l'inclusion (4), on obtient alors $(\pi_{n+t,0})^*I_{C_n} \subset \mathcal{O}(-\sum_{i\le n-2} m_iE_i^{n+t} - eE_{n-1}^{n+t} - \sum_{i\ge n} E_i^{n+t})$. Avec la notation $D_0 = \sum_{i\le n-2} m_iE_i^{n+t} + eE_{n-1}^{n+t} + \sum_{i\ge n} E_i^{n+t}$, l'inclusion $I_{C_n} \subset (\pi_{n+t,0})_*(\pi_{n+t,0})^*I_{C_n}$ implique:

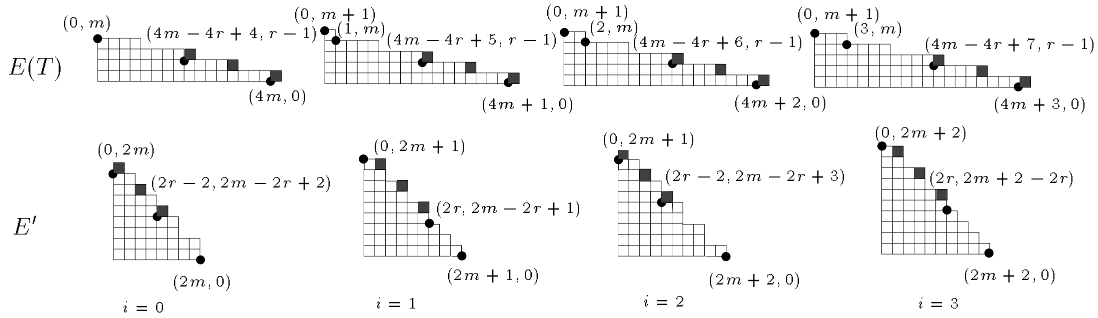
$$I_{C_n} \subset (\pi_{n+t,0})_*\mathcal{O}(-D_0) \tag{5}$$



Cette relation va permettre de calculer C_n: on montre que l'inclusion est une égalité en vérifiant que $(\pi_{n+t,0})_*\mathcal{O}(-D_0)$ définit un schéma de même degré que C_n. Deux cas se présentent: $e = m$ et $e = m+1$. Dans les deux cas, la formule permettant de calculer t montre que $t \leq m$ car $s < m+1$ et $r \leq m$.
Cas $e = m$. Puisque T_{n-1} est de type $(m, n-1)$, on a les relations $m_0 \in \{m, m+1\}$, $m_{n-2} = m$ et $m_{i-1} \geq m_i$ pour $i \leq n-2$. On en déduit que l'amas K_0 définissant D_0 est déchargé (voir sur la figure son graphe pondéré G_{K_0}). L'idéal $(\pi_{n+t,0})_*\mathcal{O}(-D_0)$ a donc pour colongueur $Q_0 := \sum_{i \leq n-2} \frac{m_i(m_i+1)}{2} + \frac{e(e+1)}{2} + t$. Le cardinal de $E_{\tilde{C}}$ vaut $\frac{e(e+1)}{2} + t = deg(C_1) + r$ car $I^{E_{\tilde{C}}}$ est un idéal définissant la collision hypersingulière de C_1 et d'un schéma d'escalier V_r. Par ailleurs, $\sum_{i \leq n-2} \frac{m_i(m_i-1)}{2} + r = deg(C_{n-1})$. Ces trois égalités montrent l'égalité $Q_0 = deg(C_{n-1}) + deg(C_1) = deg(C_n)$.
Cas $e = m+1$. Notons $i \geq 0$ le plus petit indice tel que $m_i = m$. L'amas K_0 définissant D_0 n'est pas déchargé: $K_0 = (p_0^{m+1}, \ldots, p_{i-1}^{m+1}, p_i^m, p_{i+1}^m, \ldots, p_{n-3}^m, p_{n-2}^m, p_{n-1}^{m+1}, q'^1_0, q'^1_1, \ldots, q'^1_{t-1})$. Son déchargement successif aux points $p_{n-2}, p_{n-3}, \ldots, p_i$ donne les amas $K_1, K_2, \ldots K_{n-i-1}$ et, par construction, K_0 et $K_{n-i-1} = (p_0^{m+1} \ldots p_{i-1}^{m+1}, p_i^{m+1}, p_{i+1}^m, \ldots, p_{n-3}^m, p_{n-2}^m, p_{n-1}^m, q'^1_0, q'^1_1, \ldots, q'^1_{t-1})$ définissent le même schéma. Le degré de ce schéma est $Q_{n-i-1} = \sum_{M \text{ est une multiplicité de } K_{n-i-1}} \frac{M(M+1)}{2}$ car K_{n-i-1} est déchargé. Or $Q_{n-i-1} = Q_0 = deg(C_n)$ car K_{n-i-1} et K_0 ont les mêmes multiplicités à permutation près. Donc la relation (5) est bien une égalité.
Posons $K = K_0$ dans le cas $e = m$ et $K = K_{n-i-1}$ dans le cas $e = m+1$. La collision C_n est définie par K qui est du type T_n voulu. ∎

2.2 Démonstration du théorème à l'aide des relations d'incidence élémentaires via un raisonnement combinatoire

On appelle donnée combinatoire un objet qui est soit un escalier, soit un type combinatoire. Les relations d'incidence permettent de définir une relation de semi-ordre partiel sur l'ensemble $\mathfrak{E}$ des ensembles de données combinatoires. On considère pour cela la plus grossière des relations transitives $\geq$ sur $\mathfrak{E}$ qui vérifient $\mathcal{E} \geq \mathcal{F}$ si $\overline{V(\mathcal{E})} \supset V(\mathcal{F})$. En vertu de la proposition 6, il nous faut démontrer que si E^1, E^2, E^3, E^4 sont quatre escaliers quasi-réguliers de même rang, il existe un escalier quasi-régulier E vérifiant $\{E^1, E^2, E^3, E^4\} \geq \{E\}$. Soit F^i le $(1, -1)$ spécialisé de E^i. D'après l'exemple 4, il existe un type combinatoire T^i de type $(m, 1)$ tel que $V(T^i) = V(F^i)$. Soit $T := T^1 + T^2 + T^3 + T^4$. Toujours par l'exemple 4, il existe un escalier $E(T)$ tel que $V(E(T)) = V(T)$. On note E le $(-2, 1)$ spécialisé de $E(T)$. Puisque $\{E^1, E^2, E^3, E^4\} \geq \{F^1, F^2, F^3, F^4\} = \{T^1, T^2, T^3, T^4\} \geq \{T\} = \{E(T)\} \geq \{E\}$ il nous suffit pour montrer le théorème de montrer que E est quasi-régulier. L'escalier $E(T)$ est dessiné dans la figure suivante (T est de type $(m, 4)$ et plusieurs cas sont distingués, suivant la valeur de i $(0 \leq i \leq 3)$ où i est le nombre de points de T ayant multiplicité $m+1$). Sous $E(T)$ est dessiné un escalier quasi-régulier E'. Vérifions l'égalité $E = E'$. Puisque E' est stable par $(-2, 1)$ spécialisation, il suffit de voir que, pour tout p, le nombre $H_{E(T)}(p)$ d'éléments (x, y) de $E(T)$ vérifiant $x + 2y = p$ est le même que le nombre d'éléments $H_{E'}(p)$ de E' vérifiant cette propriété. Or c'est le cas car $H_{E(T)}(p) = H_{E'}(p) =$



●(x, y) signifie que le point marqué a pour coordonnées (x, y).
r est le nombre de points de T de multiplicité 1

$$\begin{cases} [\frac{p}{2}]+1 & \text{si} \quad 0 \leq p \leq 2m-1+i-[\frac{i+1}{4}] \\ m-[\frac{p-2m-i}{2}] & \text{si} \quad 2m+i-[\frac{i+1}{4}] \leq p \text{ et } p \leq 4m-2r+1+i \\ m-[\frac{p-2m-i-1}{2}] & \text{si} \quad 4m-2r+2+i \leq p \text{ et } p \leq 4m+i \\ 0 & \text{si} \quad p > 4m+i \end{cases}$$ où [ ] désigne la partie entière. ■

Bibliographie:

[AC]: Arbarello E. et Cornalba M., Footnotes to a paper of Beniamino Segre, Math. Ann., 256, (1981)

[AH]: Alexander J. et Hirschowitz A., An asymptotic vanishing theorem for generic unions of multiple points, duke e-print 9703037

[AH1]: Alexander J. et Hirschowitz A., La méthode d'Horace éclatée: application à l'interpolation en degré quatre, Invent. Math. 107, (1992), 586-602

[CM]: Ciliberto C. et Miranda R., Degenerations of planar linear systems, à paraître au journal de Crelle, duke e-print 9702015

[CM1]: Ciliberto C. et Miranda R., Linear systems of plane curves with base points of equal multiplicity, duke e-print 9804018

[CGL]: Campillo A., Gonzalez-Sprinberg G., Lejeune-Jalabert M., Clusters of infinitely near points, Math. Ann., 306, 169-194, (1996).

[Ev]: Evain L., Une minoration du degré de courbes planes à singularités imposées, Bull. de la SMF, à paraître

[H]: Hirschowitz A., La méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables, Manuscripta math, vol. 50, (1995), 337-388

[M]: Mignon T., Thèse, Nice, (1997)

[N1]: Nagata N., On the fourteenth problem of Hilbert, American J. Maths. 81, (1959), 766-772

[N2]: Nagata N., On rational surfaces, II. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto., Ser. A Math. 33, (1960), 271-293

Evain Laurent - Université d'Angers - Département de mathématiques - 49045 Angers Cedex 01
e-mail: evain@tonton.univ-angers.fr