Une minoration du degré de courbes planes à singularités imposées

Résumé:
Dans ce travail, on montre que le degré d'une courbe de $I\!\!P^2$ passant par r points en position générale avec multiplicité m est strictement plus grand que $\sqrt{r}m$ sous l'une des deux conditions suivantes: r est un carré parfait supérieur ou égal à dix ou r est plus grand que $(\frac{8m}{4m-1}.(m+1))^2$. Ce résultat s'inscrit dans une conjecture générale de Nagata, et le premier cas était déjà connu par Nagata lui-même.

Abstract:
It is shown that the degree of a projective plane curve through r generic points with multiplicity m is strictly greater than $\sqrt{r}m$ provided one of the following two conditions is satisfied: r is a perfect square greater or equal to ten or r is greater than $(\frac{8m}{4m-1}.(m+1))^2$. This result is part of a conjecture of Nagata, and the first case was already known to Nagata himself.

1 Introduction

En liaison avec la construction de son contre-exemple au quatorzième problème de Hilbert, Nagata a émis la conjecture suivante: pour tout entier r supérieur ou égal à dix, le plus petit degré d_0 d'une courbe de $I\!\!P^2$ passant par r points en position générale, avec multiplicité m en chacun d'entre eux, est supérieur strictement à $\sqrt{r}m$.

Le système linéaire des courbes planes de degré d passant par $r \geq 10$ points génériques a pour dimension attendue $max(0, \frac{(d+1)(d+2)}{2} - r\frac{m(m+1)}{2})$. Si les systèmes linéaires avaient toujours la dimension attendue, on pourrait donner une estimation asymptotique de d_0 quand m tend vers l'infini et r varie arbitrairement: $d_0 = \sqrt{r}m + o(\sqrt{r}m)$, où le o est une quantité positive. Autrement dit, la borne proposée par Nagata est asymptotiquement la meilleure possible.

Nagata a montré dans [N1,N2] la conjecture dans le cas où r est un carré parfait. Dans le cas particulier des courbes réduites et irréductibles, Xu a montré dans [X] les inégalités $d > \sqrt{r}m - \frac{1}{2\sqrt{r-1}}$ et $d \geq \sqrt{r-1}m$. Dans [AH], Alexander et Hirschowitz s'intéressent à un problème plus pointu, mais il résulte de leur travail que la conjecture de Nagata est vraie quand r est suffisamment grand devant m. Aucune borne précise n'est spécifiée mais j'ai été informé par les auteurs que cette borne devrait être de l'ordre de m^m.

Dans ce travail, nous donnons une nouvelle preuve du résultat de Nagata (Théorème 21), et nous démontrons la conjecture sous la condition numérique $r \geq (\frac{8m}{4m-1}.(m+1))^2$ (Théorème 22). Notons que les conditions liant r et m dans le deuxième théorème ne s'appliquent pas aux problèmes rencontrés par Nagata (par exemple lors de la construction de son contre-exemple au quatorzième problème de Hilbert) qui avait besoin d'un énoncé avec r fixé et m arbitrairement grand.

Les démonstrations sont basées sur les notions de gros point et de collision. Un gros point de taille m est un sous-schéma de $\mathbb{P}^2$ défini par la puissance $m^{\text{ème}}$ I_p^m d'un faisceau d'idéaux I_p définissant un point simple p. Un sous-schéma ponctuel C de $\mathbb{P}^2$ est une collision totale de gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$ si C peut être obtenu comme limite plate d'une réunion disjointe de gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$ quand les gros points approchent les uns des autres. En d'autres termes, C est la fibre spéciale d'une famille plate de sous-schémas de $\mathbb{P}^2$ dont la fibre générale est une réunion de r gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$.
Le lien entre les collisions de gros points et le problème de Nagata est le suivant. Appelons multiplicité d'un schéma ponctuel C supporté par un point p la plus petite multiplicité en p d'une courbe contenant C. La conjecture de Nagata est vérifiée si et seulement si il existe une collision C de r gros points de taille m de multiplicité strictement supérieure à $\sqrt{r}m$ ([E]). Les démonstrations consistent à construire de telles collisions.

La démonstration du théorème 21 est plus facile car les conditions arithmétiques sont favorables. En utilisant de simples collisions de schémas monômiaux le long de courbes lisses (collisions de front), on démontre un version faible du théorème, où on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large. Il nous faut cependant produire une collision moins naïve pour montrer l'inégalité stricte. Cette collision s'obtiendra par un procédé dit de $(1, -n)$ spécialisation, qui consiste à faire dégénérer des automorphismes du plan affine (propositions 7 et corollaire 9), et qui n'est valable que lorsque le corps de base est de caractéristique nulle.

Pour le théorème 22, les choses se compliquent car on ne peut plus utiliser de propriété arithmétique favorable. On construit alors des collisions en utilisant le principe général suivant: des collisions de grande multiplicité doivent pouvoir être construites en bougeant les gros points le long de courbes unibranches admettant une singularité d'ordre élevé, et en collisionnant les points sur cette singularité. Cela nous amène à la notion de collision hypersingulière (Définition-Proposition 11). En fait, nous ne calculons pas entièrement les collisions hypersingulières. Nous donnons cependant un énoncé (proposition 16) qui nous permet de contrôler suffisamment ces collisions pour démontrer le théorème.

Le plan adopté est le suivant. La section 2 rappelle quelques notions de base sur les schémas de dimension zéro qui sont manipulés dans les sections suivantes. La section 3 prépare la démonstration des théorèmes et introduit les collisions nécessaires: collision de front, $(1, -n)$ spécialisation et collision hypersingulière. Enfin, les théorèmes 21 et 22 sont démontrés dans la section 4.

2 Schémas de dimension zéro

Dans toute la suite k sera un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, sauf mention explicite du contraire.

On appelle escalier une partie E de $\mathbb{N}^2$ dont le complémentaire C vérifie $C + \mathbb{N}^2 \subset C$. Pour un escalier E, on notera

- $c(E)$ son cardinal (éventuellement infini)
- $o(E)$ son ordre, qui est le plus petit entier d pour lequel il existe un couple (a, b) dans $\mathbb{N}^2 - E$ avec $a + b = d$

Tout escalier E définit un idéal I^E de $k[[x, y]]$ formé par les éléments $f = \sum c_{ij}x^i y^j$ vérifiant $c_{ij} = 0$ si (i, j) appartient à E . On dira parfois par abus de langage qu'un monôme $m = x^a y^b$ est dans E si (a, b) est dans E. Avec cette convention, I^E est l'idéal engendré par les monômes hors de E.

Soit p un point de $\mathbb{P}^2$. Le complété $\hat{O}_{\mathbb{P}^2,p}$ de l'anneau local de $\mathbb{P}^2$ en p est isomorphe à l'anneau de séries formelles $k[[x, y]]$. En particulier, moyennant le choix d'un isomorphisme, tout sous-schéma ponctuel de $\mathbb{P}^2$ supporté par p peut être vu comme un sous-schéma de $Spec\, k[[x, y]]$.

Définition-Proposition 1. *Un sous-schéma ponctuel X de $\mathbb{P}^2$ supporté par p est dit monômial d'escalier E si on peut choisir un isomorphisme entre $\hat{O}_{\mathbb{P}^2,p}$ et $k[[x, y]]$ tel que l'idéal définissant X dans $Spec\, k[[x, y]]$ soit I^E. La colongueur d'un tel schéma est $c(E)$ et sa multiplicité est $o(E)$.*

Exemple 2. *Les gros points de taille m de $\mathbb{P}^2$ sont les schémas monômiaux d'escalier E_m, avec $E_m = \{(a, b),\ a + b < m\}$. On dira que E_m est l'escalier régulier de rang m.*

Suivant la stratégie expliquée dans l'introduction, nous allons construire une collision de r gros points de taille m de multiplicité supérieure à $\sqrt{r}m$. Plus précisément, nous allons construire par collisions un schéma monômial d'escalier E, où E est d'ordre supérieur à $\sqrt{r}m$.

3 Constructions de collisions

Commençons par remarquer que puisque deux schémas monômiaux de même escalier ne diffèrent que d'un changement de coordonnées, si on montre qu'un schéma monômial d'escalier E est une collision de r gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$, alors tous les schémas monômiaux d'escalier E seront des collisions de r gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$.

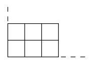
Nous allons présenter trois types de collision: collision de front, collision par $(1, -n)$ spécialisation et enfin collision hypersingulière. Pour chacune de ces collisions, nous allons définir une opération combinatoire sur les escaliers, puis expliquer que cette opération combinatoire correspond à une notion géométrique de collision.

3.1 Collision de front

Tout escalier fini E de $\mathbb{N}^2$ peut être défini par une suite décroissante n_i d'entiers naturels nuls à partir d'un certain rang et par la relation:

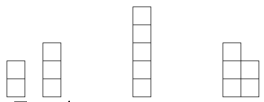
$$(x, y) \in E \Longleftrightarrow y < n_x$$

.



Exemple 3. *L'escalier précédent peut être défini par $n_0 = n_1 = n_2 = 2$ et $n_i = 0$ pour $i > 2$ (par convention, les éléments de $\mathbb{N}^2$ situés sur le bord supérieur et sur le bord droit de la partie quadrillée sont en dehors de l'escalier).*

Définition 4. *Soient deux escaliers E et E', définis respectivement par des suites n_i et p_i. La suite $(n_i + p_i)$ définit un nouvel escalier, qu'on appelle somme verticale des escaliers E et E', et que l'on note $E +_v E'$. Intervertissant le rôle des deux variables de $\mathbb{N}^2$, il existe une notion de somme horizontale, notée $+_h$.*



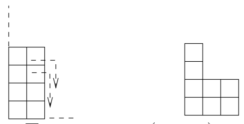
E E' $E +_v E'$ $E +_h E'$

Proposition 5 (Collision de front). *Tout schéma monômial d'escalier $E +_v E'$ ou $E +_h E'$ peut être obtenu comme collision de deux schémas monômiaux d'escaliers E et E'.*

Démonstration: voir [H].

3.2 Collision par $(1,-n)$ spécialisation

Définition 6. *Soit n un entier naturel. On dit qu'un ensemble E de $\mathbb{N}^2$ est $(1,-n)$ stable si $(x,y) \in E$ et $(x+1, y-n) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow (x+1, y-n) \in E$. Si c est dans $\mathbb{N}$, on note $N(E,c)$ le nombre d'éléments (a,b) de E vérifiant $na + b = c$. On appelle $(1,-n)$ spécialisé d'un escalier E le sous-ensemble E' de $\mathbb{N}^2$ qui est $(1,-n)$ stable et qui vérifie $N(E,c) = N(E',c)$ pour tout*



E $\quad$ $(1,-2)$ spécialisé de E

c dans $\mathbb{N}$.

Proposition 7. *Soit E un escalier. Le $(1,-n)$ spécialisé E' de E est un escalier. Supposons en outre le corps de base k de caractéristique nulle. Tout schéma monômial d'escalier E' s'obtient alors comme fibre spéciale d'une famille plate dont la fibre générale est un schéma monômial d'escalier E.*

Démonstration: considérons le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \varphi : k[x,y] & \to & k[x,y][t,1/t] \\ y & \mapsto & y \\ x & \mapsto & tx + y^n \end{array}$$

Soit I^E l'idéal monômial de $k[x,y]$ associé à l'escalier E. L'idéal

$$I(t) := \varphi(I^E)k[x,y,t,\frac{1}{t}]$$

définit un sous-schéma F de $(\mathbb{A}^1 - \{0\}) \times \mathbb{A}^2$ plat au dessus de $\mathbb{A}^1 - \{0\}$. Complétons cette famille en une famille plate $\overline{F}$ au dessus de $\mathbb{A}^1$; $\overline{F}$ est définie par l'idéal $J(t)$ de $k[x,y,t]$:

$$J(t) = I(t) \cap k[x,y,t]$$

On appelle $(1,n)$-degré de $x^p y^r$ le nombre $np+r$. Regardons les monômes de I^E de $(1,n)$-degré d fixé. Notons les $x^{p_1}y^{r_1}, ..., x^{p_k}y^{r_k}$. L'idéal $I(t)$ contient les termes

$$(\varphi(x^{p_1}y^{r_1}), ..., \varphi(x^{p_k}y^{r_k})) = (y^{r_1}(tx+y^n)^{p_1}, \ldots, y^{r_k}(tx+y^n)^{p_k})$$

qu'on peut écrire développés sous la forme suivante:

$$\begin{array}{ccccccccc} y^{r_1+np_1} & + & C^1_{p_1} txy^{n(p_1-1)+r_1} & + & \ldots & C^{p_1}_{p_1}(tx)^{p_1}y^{r_1} & & \\ y^{r_2+np_2} & + & C^1_{p_2} txy^{n(p_2-1)+r_2} & + & \ldots & \ldots & + & C^{p_2}_{p_2}(tx)^{p_2}y^{r_2} \\ \ldots & + & \ldots & + & \ldots & \ldots & & \\ y^{r_k+np_k} & + & C^1_{p_k} txy^{n(p_k-1)+r_k} & + & \ldots & \ldots & + & \ldots + C^{p_k}_{p_k}(tx)^{p_k}y^{r_k} \end{array}$$

Par homogénéité du $(1,n)$-degré, toutes les indéterminées situées sur la même colonne sont les mêmes. Les coefficients des indeterminées pour les k premières colonnes de ce système sont données par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & C_{p_1}^1 & \ldots & C_{p_1}^k \\ 1 & C_{p_2}^1 & \ldots & C_{p_2}^k \\ \\ 1 & C_{p_k}^1 & \ldots & C_{p_k}^k \end{pmatrix}$$

avec la convention usuelle $C_j^i = 0$ si $i > j$.
Par des opérations élémentaires sur les lignes, on peut donc triangulariser le système en un système T

$$\begin{array}{llllll} y^{r_1+np_1} & + & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & txy^{n(p_1-1)+r_1} & + & \ldots & \\ & & & + & t^2x^2y^{n(p_1-2)+r_1} \quad + \quad \ldots & + \ldots \\ \\ & & & & t^kx^ky^{n(p_1-k)+r_1} & + \ldots \end{array}$$

si on vérifie que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & C_{p_1}^1 & \ldots & C_{p_1}^k \\ 1 & C_{p_2}^1 & \ldots & C_{p_2}^k \\ \\ 1 & C_{p_k}^1 & \ldots & C_{p_k}^k \end{vmatrix}$$

est différent de 0. En caractéristique nulle, pour j fixé, C_p^j est polynôme en p à coefficients rationnels de degré j et de coefficient dominant $\frac{1}{j!}$. En particulier, les C_p^j pour $j \leq k-1$ forment une base de l'espace l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq k-1$, et on peut trouver une combinaison linéaire $\sum_{j=0}^{k-1} a_j C_p^j$ telle que $C_p^k = \frac{p^k}{k!} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j C_p^j$. Donc en retranchant

$$(a_0.\text{première colonne} + \cdots + a_{k-1}.(k-1)\text{-ème colonne})$$

à la dernière colonne de M, puis en multipliant la colonne ainsi obtenue par $k!$, la matrice M devient

$$\begin{pmatrix} 1 & C_{p_1}^1 & \ldots & C_{p_1}^{k-1} & {p_1}^k \\ 1 & C_{p_2}^1 & \ldots & C_{p_2}^{k-1} & {p_2}^k \\ \\ 1 & C_{p_k}^1 & \ldots & C_{p_k}^{k-1} & {p_k}^k \end{pmatrix}$$

En répétant successivement l'opération sur la $(k-1)^{\text{ème}}$ colonne, puis sur la $(k-2)^{\text{ème}}$ ..., les opérations élémentaires transforment M en

$$N = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & \ldots & {p_1}^{k-1} & {p_1}^k \\ 1 & p_2 & \ldots & {p_2}^{k-1} & {p_2}^k \\ \\ 1 & p_k & \ldots & {p_k}^{k-1} & {p_k}^k \end{pmatrix}$$

Le déterminant de N est un déterminant de Van Der Monde en les p_i distincts. Il est donc non nul et on peut triangulariser le système initial en T. Toutes les lignes de T sont des éléments de $I(t)$. En divisant la deuxième ligne de T par t , la troisième par t^2 ... puis en faisant $t = 0$ dans chacune des lignes obtenues, on obtient les éléments

$$y^{r_1+np_1}, xy^{n(p_1-1)+r_1}, \ldots, x^k y^{n(p_1-k)+r_1}$$

qui sont des éléments de $J(0)$ de $(1,n)$-degré d. On a donc k éléments dans la partie homogène $J(0)_d$, et k est aussi la dimension de I^E_d.
Rassemblons tous les éléments de $J(0)$ construits comme précédemment pour tous les $(1,n)$-degrés d. Ces éléments engendrent un idéal monômial $K \subset J(0)$, donc

$$dim_k\, k[x,y]/K \geq dim_k\, k[x,y]/J(0)$$

La colongueur est conservée par platitude et la fibre générale de $\overline{F}$ est un schéma monômial d'escalier E, d'où:

$$dim_k\, k[x,y]/J(0) = dim_k\, k[x,y]/I^E = c(E)$$

Pour tout degré d, les dimensions des parties homogènes de $(1,n)$-degré d de K et I^E vérifient $dim_k\, K_d \geq dim_k\, I^E_d$. On en déduit l'inégalité

$$dim_k\, k[x,y]/K \leq dim_k\, k[x,y]/I^E = c(E)$$

et l'égalité n'a lieu que si pour tout degré d, $dim_k K_d = dim_k I^E_d$, c'est à dire si les seuls éléments de K_d sont ceux que l'on a mis en évidence.
En résumé, nous avons montré les inégalités:

$$c(E) = dim_k\, k[x,y]/J(0) \leq dim_k\, k[x,y]/K \leq dim_k\, k[x,y]/I^E = c(E)$$

Donc $J(0) = K$ est un idéal monômial et les seuls éléments de $J(0)_d$ sont ceux que l'on a mis en évidence, c'est à dire les monômes $x^a y^b$ vérifiant $na + b = d$ et $(a,b) \notin E'$.
Pour tout idéal monômial, l'ensemble des éléments (a,b) de $\mathbb{N}^2$ pour lesquels $x^a y^b$ n'appartient pas à cet idéal forme un escalier donc E' est un escalier.
Nous avons donc montré que $\overline{F}$ est une famille plate de sous-schémas de $\mathbb{A}^2$ paramétrée par $\mathbb{A}^1$ dont la fibre générale est un schéma monômial d'escalier E et dont la fibre spéciale $\overline{F}_{t=0}$ est un schéma monômial d'escalier E'. Par restriction de la base à $Spec\, k[[t]]$ et de la fibre à $Spec\, k[[x,y]]$ (via les injections canoniques $k[x,y] \to k[[x,y]]$ et $k[t] \to k[[t]]$), on obtient une famille G de $Spec\, k[[t]] \times Spec\, k[[x,y]]$, plate sur $Spec\, k[[t]]$.
Soit maintenant X un schéma monômial d'escalier E'. Dans une carte locale convenable $Spec\, k[[x,y]]$, X est défini par l'idéal $I^{E'}$. La famille G montre que X s'obtient comme fibre spéciale d'une famille plate dont la fibre générale est un schéma monômial d'escalier E.

■

Remarque 8. *Intervertissant le rôle des deux coordonnées, on a bien sûr le résultat correspondant sur les $(-n,1)$ spécialisations.*

Corollaire 9. *Si un schéma monômial d'escalier E est collision de r gros points de taille $m_1,\dots,m_r$ et si E' est le $(1,-n)$ spécialisé de E, tout schéma monômial d'escalier E' est une collision de r gros points de taille $m_1,\dots,m_r$.*

En effet, il existe une variété $U(m_1,\dots,m_r)$ localement fermée dans le schéma de Hilbert de $\mathbb{P}^2$ qui paramètre les réunions disjointes de r gros points de taille $m_1,\dots,m_r$. Les collisions de r gros points de taille $m_1,\dots,m_r$ sont les sous-schémas de $\mathbb{P}^2$ paramétrés par les points de la frontière

$$\overline{U(m_1,\dots,m_r)} - U(m_1,\dots,m_r)$$

Donc tout schéma obtenu par spécialisation de collisions est aussi une collision.

■

3.3 Collisions hypersingulières

Définition 10. *Soient X et Y deux sous-schémas ponctuels de $\mathbb{A}^2$ de support $(0,0)$. Soit $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ une courbe paramétrée telle que $\varphi^{-1}(0,0) = \{0\}$. Notons $Y(t)$ le schéma translaté de Y au point $\varphi(t)$. Il existe une unique famille plate de sous-schémas de $\mathbb{A}^2$ paramétrée par $\mathbb{A}^1$ dont la fibre au dessus d'un point $t \neq 0$ est $X \cup Y(t)$. La fibre au dessus de $t=0$ s'appelle collision de X et de Y le long de la courbe paramétrée φ. La collision ne dépend pas du paramétrage choisi pour une courbe unibranche et on peut donc parler d'une collision le long d'une courbe unibranche.*

Proposition 11 (Existence d'une collision hypersingulière). *Notons $C(X,Y,k)$ la collision de X et de Y le long de la courbe $y^k = x^{k+1}$, et v le sous-schéma défini par l'idéal (x^2,y). Le schéma $C(X,Y,k)$ ne dépend pas de k assez grand et on l'appelle collision hypersingulière de X et de Y de direction tangente v.*

Démonstration: considérons le morphisme

$$\psi : Spec\ k[a,b] - (0,0) \to Hilb(\mathbb{A}^2)$$

qui envoie le point de coordonnées $(a,b) \neq (0,0)$ sur le point p de $Hilb(\mathbb{A}^2)$ paramétrant la réunion de X et du translaté de Y au point (a,b). En éclatant suffisamment $Spec\ k[a,b]$, on obtient une surface $\tilde{S}$, et un morphisme $\tilde{\psi}$:

$\tilde{S} \to Hilb(\mathbb{A}^2)$ induit par ψ.
Le morphisme d'anneaux:

$$\begin{array}{rcl} k[a,b] & \to & k[t] \\ a & \mapsto & t^k \\ b & \mapsto & t^{k+1} \end{array}$$

induit un morphisme $Spec\ k[t] \to Spec\ k[a,b]$ qu'on peut remonter en un morphisme $f_k : Spec\ k[t] \to \tilde{S}$. Par composition avec $\tilde{\psi}$, on récolte un morphisme

$$h_k : Spec\ k[t] \to Hilb(\mathbb{A}^2)$$

La collision le long de la courbe $y^k = x^{k+1}$ correspond au point $h_k(0)$ de $Hilb(\mathbb{A}^2)$. Mais pour k et k' assez grands, on a $f_k(0) = f_{k'}(0)$. En effet, $f_k(0)$ (respectivement $f_{k'}(0)$) est sur la transformée stricte par l'éclatement $\tilde{S} \to Spec\ k[a,b]$ de la courbe d'équation $b^k = a^{k+1}$ (respectivement $b^{k'} = a^{k'+1}$). Si $\tilde{S}$ est obtenu par r éclatements successifs d'un point à partir de $Spec\ k[a,b]$, alors pour k et k' supérieurs à r, $f_k(0) = f_{k'}(0)$ car il faut au minimum $min(k,k') + 1$ éclatements pour que les transformées strictes des courbes $y^k = x^{k+1}$ et $y^{k'} = x^{k'+1}$ soient disjointes. L'égalité $f_k(0) = f_{k'}(0)$ implique aussitôt $h_k(0) = h_{k'}(0)$.

■

Notation 12. *Dans la suite, nous ne traiterons plus que le cas des collisions hypersingulières de direction tangente v et nous emploierons l'expression "collision hypersingulière" pour dire "collision hypersingulière de direction tangente v".*
Voici par ailleurs différents degrés que nous utiliserons lors des démonstrations. Soit m un monôme de $k[x,y,t]$. On notera $d(m)$ le degré total de m en x et y, $d_x(m)$, $d_y(m)$ et $d_t(m)$ les degrés partiels en x, y et t. Pour k fixé, on notera ∂ le degré défini par $\partial(m) = kd_x(m) + (k+1)d_y(m) + d_t(m)$.

Proposition 13. *Soient E et E' deux escaliers, X et Y les sous-schémas de $\mathbb{A}^2$ définis respectivement par les idéaux monômiaux I^E et $I^{E'}$. La collision hypersingulière C de X et Y est également définie par un idéal monômial.*

Démonstration: Soit F le fermé de $(Spec\ k[t] - 0) \times \mathbb{A}^2$ dont la fibre au dessus de t soit la réunion $X \cup Y(t)$ où $Y(t)$ est le translaté de Y au point (t^k, t^{k+1}). Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi : k[x,y] & \to & k[x,y][t,t^{-1}] \\ x & \mapsto & x - t^k \\ y & \mapsto & y - t^{k+1} \end{array}$$

Le fermé F est défini par l'idéal produit

$$I(t) := (\varphi(I^{E'})k[t,t^{-1}][x,y]) \ . \ (I^E k[t,t^{-1}][x,y])$$

de $k[t,t^{-1}][x,y]$. L'idéal $I(t)$ étant engendré par des éléments de $k[t][x,y]$ ∂-homogènes, $J(t) := I(t) \cap k[t][x,y]$ est également un idéal ∂-homogène.

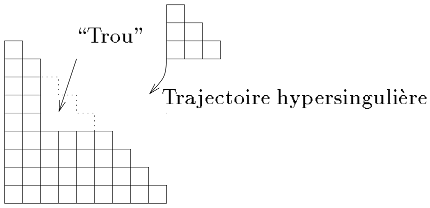
Le schéma C est défini par l'idéal $I_C = J(0)$ de $k[x,y]$. Soit P un polynôme de $J(0)$. Il existe des éléments Q de $J(t)$ et R de $k[x,y,t]$ tels que

$$Q = P + tR.$$

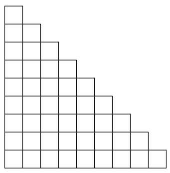
Chacune des composantes ∂-homogènes de Q appartient à $J(t)$. Le degré ∂ dépend de k et pour k assez grand, chacun des monômes de P est de degré différent. En isolant chaque composante homogène de Q et en faisant $t = 0$, il s'ensuit que chaque monôme de P est dans $J(0)$.

■

L'intérêt de la collision hypersingulière vient du fait que c'est une collision qui a tendance à "boucher les trous", comme le montrent l'exemple et la proposition suivants.
Soit E un escalier. Notons $X(E)$ le sous-schéma de $\mathbb{A}^2$ dont l'idéal est I^E.



$t \neq 0$: $X(E_{a,b,n,m}) \cup X(E_n)$

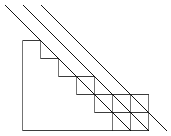


$t = 0$: la collision

Exemple 14. *(voir figure) Soient m et n deux entiers avec $m > n$, E_m et E_n les escaliers réguliers de rang m et n, et (a,b) un élément de $\mathbb{N}^2$ vérifiant $a + b = m - n$. Notons $E_{a,b,n}$ la partie de $\mathbb{N}^2$ obtenue par translation de E_n par (a,b). Notons $E_{a,b,n,m}$ la partie de $\mathbb{N}^2$ qui est le complémentaire de $E_{a,b,n}$ dans E_m.*
La collision hypersingulière de $X(E_{a,b,n,m})$ et d'un gros point de taille n est un gros point de taille m.

Le calcul de la collision de cet exemple est une conséquence facile du lemme 17 qui suit. Nous laissons les détails au lecteur.

Définition 15. *Soit E un escalier et $o(E)$ son ordre. Soit $m(E)$ le plus petit entier vérifiant $E \subset E_{m(E)}$. On dira que E a $m(E) - o(E)$ diagonales incomplètes.*



Exemple: trois diagonales incomplètes.

Proposition 16. *Soit E un escalier ayant au plus n diagonales incomplètes. La collision hypersingulière de $X(E)$ et d'un gros point de taille n est un schéma $X(F)$, où F est un escalier ayant au plus n diagonales incomplètes.*

Démonstration: elle va découler du lemme suivant, qui donne une version quantitative du fait que la collision hypersingulière "tend à boucher les trous".

Lemme 17. *Soient E un escalier, $X(E)$ le sous-schéma de $\mathbb{A}^2$ associé et C la collision hypersingulière de $X(E)$ et d'un gros point de taille n. Soit m un monôme hors de E pour lequel il existe un monôme m' hors de E avec*

$$d(m) \geq d(m') + n$$

ou

$$d(m) = d(m') + n - 1 \text{ et } d_x(m) < d_x(m')$$

alors

$$m \in I_C.$$

D'après la proposition 13, la collision est un sous-schéma de la forme $X(F)$ pour un escalier F. L'inclusion $X(E) \subset X(F)$ impose $E \subset F$, donc $o(F) \geq o(E)$. Le lemme précédent nous assure que tous les couples (a, b) vérifiant $(a + b) \geq o(E) + m$ sont hors de F, c'est à dire $F \subset E_{o(E)+m}$. Le nombre de diagonales incomplètes est au plus $(o(E) + m) - o(E) = m$.

■

Pour la démonstration du lemme, nous aurons besoin de deux autres lemmes.

Lemme 18 (Lemme de montée de m au dessus de $x^a y^b$).
Soit $F \subset \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^2$ la famille qui paramètre la collision de $X(E)$ et du gros point de taille n le long de la courbe $y^k = x^{k+1}$. Soit $J(t) := I(F)$. Soient a et b deux entiers et m un monôme hors de E. On peut trouver dans le quotient $k[x, y, t]/J(t)$ une égalité:

$$t^r m = \sum c_i t^{n_i} m_i$$

où:

$$m_i \text{ est un monôme de } k[x,y]$$

$$c_i \in k, \quad n_i, r \ \in \mathbb{N}$$

$$\forall i \ d_x(m_i) > a \text{ et } d_y(m_i) > b$$

$$\forall i \ \partial(t^{n_i} m_i) = \partial(t^r m).$$

Démonstration: On a $J(t) = I^E \cap (x - t^k, y - t^{k+1})^n$, où I^E est l'idéal engendré par les monômes hors de E. Donc $m(x - t^k)^n$ est un élément de$J(t)$. En développant le produit, on a donc une égalité dans $k[x,y,t]/J(t)$ de la forme

$$t^{kn} m = \sum c_i t^{n_i} m_i$$

où les m_i sont des monômes de $k[x,y]$ vérifiant

$$\forall i \ d_x(m_i) > d_x(m)$$

Autrement dit, à multiplication près par une certaine puissance de t, on a pu écrire m en fonction de monômes m_i de degré en x strictement plus grand que $d_x(m)$. En faisant la même opération sur chaque m_i, et en substituant l'expression de m_i obtenue dans celle de m, on peut pour r assez grand écrire $t^r m$ en fonction de monômes dont le degré en x est plus grand que $d_x(m) + 1$. En effectuant cette opération de substitution un grand nombre de fois, l'expression de $t^r m$ ne comporte que des monômes dont le degré en x est arbitrairement grand. Par symétrie, en centrant nos efforts cette fois-ci sur le degré en y, on peut également avoir le degré en y arbitrairement grand. La ∂-homogénéité est vérifiée pour chaque égalité intermédiaire et elle est donc vraie pour l'égalité finale.

∎

Lemme 19 (Lemme de descente de m' sur m).
Soient m et m' deux monômes tels que m divise m' et $m \notin E$. On peut trouver dans $k[x,y,t]/J(t)$ une égalité:

$$m' = \sum c_i t^{n_i} m_i$$

avec, pour tout i:

$$m \text{ divise } m_i$$

$$d(m_i) \leq d(m) + (n-1)$$

$$\partial(t^{n_i} m_i) = \partial(m')$$

Démonstration: si $d(m') \leq d(m) + n - 1$, $m' = m'$ est l'expression voulue. Sinon écrivons

$$m' = mx^a y^b$$

Puisque $a + b \geq n$, $J(t)$ contient

$$m(x - t^k)^a (y - t^{k+1})^b = m' - \sum c_i t^{n_i} m_i$$

où le terme de droite est obtenu par développement du terme de gauche. D'où l'égalité dans $k[x, y, t]/J(t)$

$$m' = \sum c_i t^{n_i} m_i$$

Si chaque m_i a un degré $d(m_i)$ convenable, on a l'expression recherchée. Sinon, on ordonne les monômes de $k[x, y]$ en posant: $x^a y^b < x^{a'} y^{b'}$ si $a + b < a' + b'$ ou $(a + b = a' + b'$ et $a < a')$. On recommence l'opération faite pour m' avec le plus grand m_{i_0} des monômes m_i dont le degré n'est pas satisfaisant. On obtient ainsi une expression de m_{i_0}. En substituant cette expression de m_{i_0} dans celle de m', on obtient une nouvelle expression de m': $m' = \sum c_i t^{n_i} m_i$. On peut recommencer la procédure sur m' s'il existe encore un monôme m_i qui n'est pas de degré convenable. Isolons dans les expressions successives de m' le plus grand terme qui n'est pas de degré convenable. Ces termes forment une suite strictement décroissante de monômes et le procédé s'arrête donc après un nombre fini d'opérations.

■

Démonstration du lemme 17: choisissons a, b tel que $x^a y^b$ soit divisible par m'. Appliquons le lemme de montée de m au dessus de $x^a y^b$. On obtient une expression de $t^r m$ dans $k[x, y, t]/J(t)$. Pour chacun des monômes m_i de l'expression obtenue, on applique le lemme de descente de m_i sur m', ce qui nous donne une expression de m_i. En substituant l'expression de chaque m_i dans celle de $t^r m$, on obtient dans $k[x, y, t]/J(t)$ une expression qui est encore de la forme

$$t^r m = \sum c_i t^{n_i} m_i$$

Cette égalité s'écrit aussi:

$$t^r m - \sum c_i t^{n_i} m_i \in J(t) \ (*)$$

On a pour tout i,

$$d(m_i) \leq d(m') + n - 1 \leq d(m)$$

En outre, en cas d'égalités,

$$d_x(m) < d_x(m') \leq d_x(m_i)$$

Puisque $(*)$ est une expression ∂-homogène, on en déduit que pour k assez grand, le degré en t de $t^r m$ est plus petit que le degré en t de chaque $t^{n_i} m_i$. En divisant $(*)$ par t^r on obtient encore un élément de $J(t)$ car $k[x,y,t]/J(t)$ est plat sur $k[t]$. En faisant ensuite $t=0$, on trouve finalement $m \in J(0) = I_C$.

■

Remarque 20. *La collision hypersingulière de $X(E)$ et d'un point simple est entièrement déterminée par les règles du lemme 17: c'est un schéma $X(E')$. L'escalier E' contient E et, au niveau des cardinaux, $c(E') = c(E) + 1$. L'élément de E' qui n'est pas dans E peut être décrit comme suit. Il est à choisir parmi les monômes hors de E de degré total minimum. L'élu parmi les candidats est alors le monôme dont le degré en x est le plus grand.*

4 Applications à la conjecture de Nagata

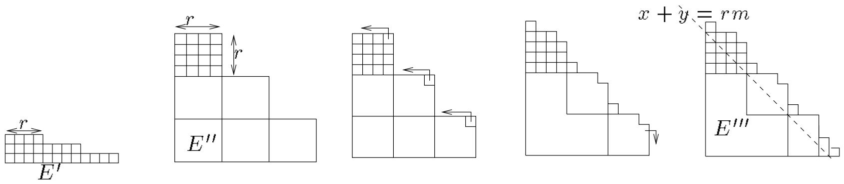
Appliquons les résultats de la partie précédente aux démonstrations des deux résultats suivants:

Théorème 21. *Supposons le corps k de caractéristique nulle. Soit $r = R^2$ un carré parfait supérieur ou égal à seize. Toute courbe plane passant par r points de $\mathbb{P}^2$ en position générale avec multiplicité m est de degré strictement supérieur à $\sqrt{r}m$.*

Théorème 22. *Soient r et m deux entiers avec $r \geq (\frac{8m}{4m-1}.(m+1))^2$. Toute courbe plane passant par r points de $\mathbb{P}^2$ en position générale avec multiplicité m est de degré strictement supérieur à $\sqrt{r}m$.*

Nous allons démontrer ces théorèmes en construisant des collisions de r gros points de taille m de multiplicité supérieure à $\sqrt{r}m$.

Démonstration du théorème 21 (cf figures suivantes):
Regroupons les R^2 gros points en R paquets de R. Pour chaque paquet de R, on peut construire par collision de front un schéma monômial d'escalier E', où E' est la somme horizontale de R copies de l'escalier E_m associé au



gros point de taille m. On peut ensuite collisionner les R schémas obtenus en un schéma monômial d'escalier E'', où E'' est la somme verticale de R

copies de E'. Faisons successivement une $(-R+1,1)$ spécialisation de E'', puis une $(1,-R+2)$ spécialisation du résultat. Notons E''' le dernier escalier obtenu. Les schémas monômiaux d'escalier E''' sont des collisions de r gros points de taille m (corollaire 9) et leur multiplicité est $o(E''') = \sqrt{r}m + 1$.

■

Démonstration du théorème 22:
Notons C_1 le gros point de taille m et de support $(0,0)$ dans $\mathbb{A}^2$. Par récurrence, on définit C_k comme la collision hypersingulière de C_{k-1} et d'un gros point de taille m.
La proposition 16 et une récurrence facile montrent que C_r est un schéma monômial défini par un escalier E^r ayant au plus m diagonales incomplètes. En particulier, l'escalier régulier $E_{o(E^r)+m}$ contient E^r. Au niveau des cardinaux de ces escaliers, on en déduit que

$$\frac{(o(E^r)+m+1)^2}{2} > c(E_{o(E^r)+m}) > c(E^r) = r\frac{m(m+1)}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} o(E^r) &> \sqrt{r}m(1+\frac{1}{m})^{\frac{1}{2}} - m - 1 \\ &> \sqrt{r}m(1+\frac{1}{2m} - \frac{1}{8m^2}) - m - 1 = \sqrt{r}m + \frac{\sqrt{r}}{2} - \frac{\sqrt{r}}{8m} - m - 1 \end{aligned}$$

La multiplicité $o(E^r)$ de C_r est bien supérieure à $\sqrt{r}m$ si

$$\sqrt{r}\frac{4m-1}{8m} \geq m+1$$

c'est à dire si $r \geq (\frac{8m}{4m-1}.(m+1))^2$

■

Laurent Evain
E-mail: evain@tonton.univ-angers.fr
Page WEB: http://193.49.162.129/ evain/home.html

Bibliographie:

[AH]: Alexander J. et Hirschowitz A., An asymptotic vanishing theorem for generic unions of multiple points, duke e-print 9703037

[AH1]: Alexander J. et Hirschowitz A., La méthode d'Horace éclatée: application à l'interpolation en degré quatre, Invent. Math. 107, (1992), 586-602

[E]: Evain L., Calculs de dimensions de systèmes linéaires de courbes planes par collisions de gros points, CRAS, t.325, (1997), 1305-1308

[H]: Hirschowitz A., La méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables, Manuscripta math, vol. 50, (1995), 337-388

[MP]: MacDuff D. et Polterovitch L., Symplectic packings and algebraic geometry, Invent. Math. 115, (1994), 405-429

[N1]: Nagata N., On the fourteenth problem of Hilbert, American J. Maths. 81, (1959), 766-772

[N2]: Nagata N., On rational surfaces, II. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto., Ser. A Math. 33, (1960), 271-293

[X]: Xu G., Curves in $\mathbb{P}^2$ and symplectic packings, Math. Ann. 299, (1994), 609-613