UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
U.F.R. FACULTÉ DES SCIENCES

Laboratoire J.A.Dieudonné

THESE

Présentée pour obtenir le titre de
Docteur en SCIENCES (Mention Mathématiques)

par

Laurent EVAIN

COLLISIONS DE TROIS GROS POINTS SUR UNE SURFACE ALGEBRIQUE

Soutenue le 08 janvier devant le jury composé de:

-Joël BRIANÇON: Membre
-André GALLIGO: Membre
-André HIRSCHOWITZ: Directeur de thèse
-Monique LEJEUNE-JALABERT: Rapporteur
-Carlos SIMPSON: Président
-Charles WALTER: Membre
-Alan EASTWOOD: Invité

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à André Hirschowitz, qui a dirigé cette thèse avec enthousiasme et générosité. Son regard critique m'a été d'une aide précieuse tout au long de ce travail, et a par ailleurs largement contribué à ma formation.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour leur participation, avec une mention spéciale pour Carlos Simpson et Monique Lejeune-Jalabert qui ont accepté la tâche de rapporteur, et pour Charles Walter, pour sa disponibilité durant ces trois ans.

Merci à Thierry pour avoir partagé mon bureau et pour les centaines de discussions mathématiques que nous avons eues. Merci à Yves, Fred et Anto, Mohammed, Joachim pour leur incomparable bonne humeur.

Merci bien sûr à Karine, pour son soutien de tous les instants.

Enfin, les membres des laboratoires J.A.Dieudonné de Nice et de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, chercheurs, thésards et administratifs, m'ont toujours réservé le meilleur acceuil et je leur en suis reconnaissant.

Table des matières

Liste des notations

- $\mathbb{A}^n$: espace affine de dimension n
- $Bl_Y(X)$: éclaté d'un schéma X le long d'un sous-schéma Y
- $col(X)$: colongueur d'un schéma de dimension zéro X
- $F(X,n)$: ouvert du produit X^n paramétrant les n-uplets de points distincts
- $\Gamma(X)$: anneau de fonctions d'un schéma affine X
- $Hillb^{p_1,p_2,\dots,p_r}(X) := Hilb^{p_1}(Hilb^{p_2}(\dots Hilb^{p_r}(X)))$
- $I(X)$: idéal ou faisceau d'idéaux d'une variété X
- k: corps de base algébriquement clos. Sauf mention du contraire, les schémas considérés sont de type fini sur k.
- $\varprojlim A_n$: limite projective d'anneaux A_n
- S: surface projective lisse
- $V(I)$: schéma défini par un idéal ou un faisceau d'idéaux I
- $X = \varinjlim X_n$: X et les X_n sont des schémas affines et $\Gamma(X) = \varprojlim \Gamma(X_n)$
- $[p]$: schéma représenté par un point p d'un schéma de Hilbert. Nous assimilons parfois p à $[p]$ quand cette identification n'est pas source de confusion.
- $[[x]]$: voisinage formel d'un point dans une variété

Introduction

Le problème:
Soit S une surface lisse. Un sous-schéma de S est appelé gros point de taille n s'il est défini par la puissance n-ème du faisceau d'idéaux d'un point simple p. On le notera p^n. Les réunions disjointes de r gros points de taille $n_1, n_2, \ldots, n_r$ s'organisent en une sous-variété localement fermée $U(n_1, \ldots, n_r)(S)$ du schéma de Hilbert de S, dont l'adhérence est notée $Coll(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S)$. On dira d'un sous-schéma de S paramétré par un point de la frontière

$$Coll(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S) - U(n_1, \ldots, n_r)(S)$$

que c'est une collision de r gros points de taille $n_1, \ldots, n_r$. La variété $Coll(n_1, \ldots, n_r)(S)$ sera dite fermée par collisions et, par abus de langage, on dira que c'est une variété de collisions. Nous voudrions comprendre ces différentes variétés de collisions et leur géométrie. Lorsque r est fixé et que $n_1, \ldots, n_r$ varient, produit-on ainsi une infinité de variétés, ou bien y en a-t-il un nombre fini à isomorphisme près? Lorsque les multiplicités n_i sont distinctes, $Coll(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S)$ est une compactification de l'espace des configurations de r points, c'est à dire de l'ouvert $F(S, r)$ de S^r paramétrant les r-uplets de points distincts. Quel est le rapport entre ces compactifications et les compactifications classiques, dues à Semple, Kleiman ou encore Fulton-MacPherson ([S],[FMP],[K])? Plus généralement, comment classifier les variétés de collisions? Le but de cette thèse est de répondre à ces questions quand r vaut deux ou trois.

Les motivations et les travaux antérieurs:
Notre intérêt pour les collisions trouve son origine dans le contexte des singularités. Quel est le degré minimal d d'une courbe de $\mathbb{P}^2$ passant par des points $p_1, \ldots, p_r$ avec multiplicités $m_1, \ldots, m_r$ quand les points $p_1, \ldots, p_r$ sont en position générale, ou, avec le langage des gros points, quel est le degré minimal d'une courbe contenant les gros points $p_1^{m_1}, \ldots, p_r^{m_r}$? Une conjecture due à Nagata dit que $d \geq m\sqrt{r}$ si $m_1 = m_2 = \cdots = m_r = m$ et $r \geq 10$. En outre, Nagata a prouvé cette conjecture quand r est un carré parfait.

Il est possible de transformer ce problème en un problème local grâce à la notion de collision. Définissons la multiplicité d'un schéma ponctuel X supporté par p comme la plus petite multiplicité en p d'une courbe contenant X. On peut montrer qu'il n'existe pas de courbe de degré d contenant la réunion générique $p_1^{m_1} \cup \cdots \cup p_r^{m_r}$ ssi il existe une collision ponctuelle des gros points $p_i^{m_i}$ de multiplicité supérieure à d. Une méthode pour contrôler les singularités d'une courbe plane consiste donc à exhiber des collisions de grande multiplicité. Cette approche nous a ainsi permis de donner une nouvelle démonstration du résultat de Nagata ([Ev]), et de démontrer la conjecture sous la condition $r \geq ((2m+5)\frac{4m}{4m-1})^2$ (même si Nagata avait en tête pour ses applications la condition $m >> r$).

Il existe une autre conjecture, due à Hirschowitz, disant que sous la condition $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ et $m_1 > m_2 > \cdots > m_r$, les conditions imposées par chacun des gros points devraient être indépendantes, c'est à dire que la dimension de l'espace des courbes de degré d contenant $p_1^{m_1} \cup \cdots \cup p_r^{m_r}$ devrait être $sup(0, \frac{d^2+3d+2}{2} - \sum \frac{m_i(m_i+1)}{2})$. Cette conjecture reste ouverte pour $r \geq 10$. Elle a été vérifiée dans un grand nombre de cas grace à une méthode dite méthode d'Horace ([Mi]-[Bos]). Cette méthode consiste, grosso modo, à mettre les gros points $p_1^{m_1}, \ldots, p_r^{m_r}$ dans une position spéciale dans laquelle le problème se simplifie, et à vérifier que les conditions imposées par chacun des gros points sont indépendantes dans cette position spéciale. On conclut alors par un argument classique de semi-continuité. La difficulté de la méthode consiste à exhiber de "bonnes" positions spéciales. Une bonne compréhension des collisions fournirait de nouvelles positions spéciales et permettrait d'améliorer la méthode.

La compréhension de $Coll(n_1, \ldots, n_r)(S)$ implique la connaissance des collisions de r gros points, et de la façon dont elles s'organisent en une variété. Comme nous l'avons vu, la seule connaissance des collisions de $r \geq 10$ gros points nous permettrait de résoudre un difficile problème de singularités. Même en se limitant aux points de multiplicité un, le fait que

$$Coll(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r\text{fois}})(S) = Hilb^r(S)$$

équivaut à l'irréductiblité du schéma de Hilbert $Hilb^r(S)$ et constitue déjà un résultat non trivial.

Le cas $r = 2$ est facile. Pour $r = 3$, la situation reste accessible et l'on dispose de résultats sur les collisions dus à Eastwood-Hirschowitz et Walter ([EH],[W]). Plus précisément, Eastwood et Hirschowitz ont mis en évidence cinq schémas abstraits $Z_1(n), \ldots, Z_5(n)$ qui caractérisent les collisions: un sous-schéma C de S est une collision de trois gros points de même taille n ssi C est isomorphe à l'un des $Z_i(n)$ en tant que schéma abstrait. Walter a quant à lui mis en évidence des sous-schémas $Z_i(n_1, n_2, n_3)$ de S qui sont des collisions de trois gros points de taille n_1, n_2, n_3. Dans le cas (n, n, n), notre but est de comprendre comment les $Z_i(n)$ s'organisent en une variété. Dans le cas (n_1, n_2, n_3), il faut, outre la structure de variété, comprendre s'il existe d'autres collisions que les schémas exhibés par Walter.

Les résultats:
Notre solution passe par la construction de treize variétés

$$R_{12}(S), R_{1,12}(S), \ldots, R^{1,2,3,123}_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$$

que nous noterons par commodité $V_1(S), \ldots, V_{13}(S)$ dans cette introduction. Parmi ces variétés se trouvent la compactification $K_3(S)$ de $F(S, 3)$ de Kleiman et son quotient par le groupe symétrique S_2. Dans le cas où $S = \mathbb{P}^2$, on retrouve également la variété W_6^* de Schubert-Semple et ses quotients par S_2 et S_3. Nous montrons qu'en revanche, quand $V_i(S)$ est une compactification de l'espace des configurations $F(S, 3)$, il n'existe pas de morphisme

$$V_i(S) \to S[3]$$

de $V_i(S)$ dans la compactification de Fulton-MacPherson valant l'identité sur $F(S, 3)$. Notre théorème principal s'énonce alors comme suit.

Théorème: *Pour tout triplet (n_1, n_2, n_3), la variété de collisions*

$$Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$$

s'identifie à l'une des variétés $V_i(S)$, et, plus précisément, l'identification est donnée par le tableau de la page suivante.

En corollaire de ce théorème, nous obtenons

Corollaire: *Toute collision de trois gros points est isomorphe à l'un des schémas $Z_i(n_1, n_2, n_3)$ de Walter.*

Une des difficultés pour réaliser la classification consiste à introduire une classe de compactifications suffisamment large pour contenir les variétés de collisions, mais suffisamment restreinte pour être homogène et permettre de faire de la géométrie: c'est la notion de variété de triplets enrichis. Ces variétés peuvent être décrites de la façon suivante. On exhibe un morphisme de l'espace de configurations $F(S, 3)$ dans un produit,

$$f : F(S, 3) \to F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_s$$

Conditions numériques	Modèle pour $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$	Variété classique isomorphe au modèle
$n_1 = n_2 > n_3 = 0$	$R_{12}(S)$	$Hilb^2(S)$
$n_1 > n_2 > n_3 = 0$	$R_{1,12}(S)$	$Bl_\Delta(S \times S)$
$n_1 > n_2 > n_3 > 0$ $n_1 + 1 < n_2 + n_3$	$R_{max}(S)$	variété de Le Barz $\widehat{H_3}(S)$ variété de Semple W_6^* si $S = I\!P^2$
$n_1 > n_2 > n_3 > 0$ $n_1 + 1 \geq n_2 + n_3$	$R^1_{1,2,3,12,13,123}(S)$	variété de Kleiman $K_3(S)$
$n_1 = n_2 > n_3 = 1$	$R_{3,12,123}(S)$	
$n_1 = n_2 > n_3 > 1$	$R^{1,123}_{1,23,123}(S)$	quotient $\widehat{H_3}(S)/S_2$ quotient W_6^*/S_2 si $S = I\!P^2$
$n_1 > n_2 = n_3 > 0$ $n_1 + 1 < n_2 + n_3$	$R^{1,123}_{1,23,123}(S)$	quotient $\widehat{H_3}(S)/S_2$ quotient W_6^*/S_2 si $S = I\!P^2$
$n_1 > n_2 = n_3 > 0$ $n_1 + 1 \geq n_2 + n_3$	$R^1_{123}(S)$	quotient $K_3(S)/S_2$
$n_1 = n_2 = n_3 = 1$	$R_{123}(S)$	$Hilb^3(S)$
$n_1 = n_2 = n_3 \geq 2$	$R^{123}_{123}(S)$	quotient $\widehat{H_3}(S)/S_3$ quotient W_6^*/S_3 si $S = I\!P^2$

chacun des termes F_i du produit étant de la forme

$$Hilb^i(S) \text{ ou } Hilb^i(Hilb^j(S)) \quad (i, j \in \mathbb{N} - \{0\})$$

L'image $f(F(S,3))$ est localement fermée dans le produit et les variétés de triplets enrichis sont définies par l'adhérence $\overline{f(F(S,3))}$. Cette définition naïve par adhérence n'est cependant pas satisfaisante car elle est peu géométrique et difficile à manipuler. On peut les définir soit comme des lieux schématiques d'incidence dans des produits de schémas de Hilbert, soit par la représentabilité de certains foncteurs. Ce sont les points de vue adoptés dans la thèse.

Le plan du texte:

- Les chapitres 1 et 2 développent les techniques nécéssaires au calcul de lieux schématiques d'incidence

- Le chapitre trois introduit les foncteurs et montre qu'ils sont représentables par des lieux d'incidence dans des produits de schémas de Hilbert
- Dans le chapitre quatre, nous étudions les schémas de triplets enrichis et nous décrivons les éléments de géométrie dont nous avons besoin pour la classification (stratification, actions de groupe et quotients...)
- Dans le chapitre cinq, nous montrons le théorème
- Enfin, dans le chapitre six, nous interprétons nos résultats en termes d'idéaux complets et nous en déduisons le corollaire.

Chapitre 1

Bases de Gröbner

La notion de lieu schématique d'incidence occupe une place importante dans ce travail. Ce chapitre explique comment calculer des lieux d'incidence pour des familles de sous-schémas d'un espace affine (proposition 22).

Soient $X = V(I)$ et $Y = V(J)$ deux sous-schémas de $\mathbb{A}^n$. Pour vérifier si $X \subset Y$, on peut procéder de la manière suivante. On détermine une base de Gröbner $f_1, \dots, f_s$ de $I \subset k[x_1 \dots x_n]$, on choisit des générateurs g_j de J, et on vérifie que pour tout j, le reste r_j d'une division de g_j par les f_i est nul.

Voici maintenant une version relative de ce problème. Donnons-nous un k-schéma affine $Spec\ A$ (A non nécessairement réduit), et deux sous-schémas X et Y de $Spec\ A \times Spec\ k[x_1 \dots x_n] = Spec\ A[x_1 \dots x_n]$. Supposons en outre que X soit plat et fini sur A. Il existe alors un plus grand sous-schéma fermé Z de $Spec\ A$ tel que $X \times_{Spec\ A} Z \subset Y \times_{Spec\ A} Z$. Comment trouver ce schéma d'incidence Z?

Une méthode consiste à utiliser la notion de bases de Gröbner unitaires d'idéaux de $A[x_1, \dots, x_n]$. Par souci pédagogique, nous commençons par une section sur les bases de Gröbner dans $k[x_1 \dots x_n]$.

1.1 Bases de Gröbner dans $k[x_1 \dots x_n]$

Notation 1. *Dans cette partie, I est un idéal de $k[x_1 \dots x_n]$=: $k[x]$ et on utilisera librement la notation x^e où e est un multi-entier pour désigner les monômes de $k[x_1 \dots x_n]$.*

Définition 2. *On appelle ordre monômial sur $k[x_1 \dots x_n]$ un ordre total sur les monômes tel que si m_1, m_2, m_3 sont trois monômes avec $m_1 \geq m_2$ alors*

$m_1m_3 \geq m_2m_3 \geq m_2$

Exemple 3.

- *L'ordre lexicographique pour lequel* $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} < x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$ *si* $\exists i, 1 \leq i \leq n$ *avec* $a_j = b_j$ *pour* $j < i$ *et* $a_i < b_i$
- *L'ordre lexicographique homogène pour lequel* $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} < x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$ *si* $a_1 + \dots + a_n < b_1 + \dots + b_n$ *ou bien si* $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ *et* $\exists i, 1 \leq i \leq n$ *avec* $a_j = b_j$ *pour* $j < i$ *et* $a_i < b_i$.
- *Plus généralement, ordonnons les monômes de degré 1. Ce choix nous permet de définir un ordre homogène dont l'ordre lexicographique homogène est un cas particulier correspondant à* $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

Définition 4. *On appelle terme un polynôme de la forme* $c\,x^e$ *avec* $c \in k$ *non nul. Le choix d'un ordre nous permet de comparer entre eux les termes. On peut associer à un polynôme* p *non nul son terme initial* $t(p)$ *qui est le plus grand terme pour l'ordre considéré. L'écriture* $t(p) = c(p)\,m(p)$ *définit* $c(p)$, *qui est dans* k, *et* $m(p)$, *qui est un monôme. On appellera* $c(p)$ *le coefficient initial du polynôme et* $m(p)$ *son monôme initial.*

Le choix d'un ordre nous permet d'avoir un algorithme de division avec reste dans $k[x_1 \dots x_n]$ comme pour les polynômes en une variable.

Proposition 5 (Existence d'une division).
Soient $f, g_1, \dots, g_t \in k[x_1 \dots x_n]$
Il existe des q_i *(non uniques) dans* $k[x_1 \dots x_n]$ *et une expression*

$$f = \sum q_i g_i + r$$

tels que

- *aucun des termes de* r *ne soit dans l'idéal* $(m(g_1), \dots, m(g_t))$
- $\forall i,\ m(f) \geq m(q_i g_i)$

Démonstration: voir [E]

Définition 6. *On appellera idéal initial de* I *et on notera* $in(I)$ *l'idéal engendré par les* $t(f)$ *avec* $f \in I$. *On appelle base de Gröbner toute partie finie* $f_1 \dots f_s$ *génératrice de* I *dont les termes initiaux soient générateurs de* $in(I)$.

On peut donner une première application des bases de Gröbner, à savoir la possibilité de tester l'appartenance à un idéal.

Proposition 7. *Soient $I = (g_1, \ldots, g_t)$ un idéal de $k[x_1 \ldots x_n]$ dont les g_i forment une base de Gröbner, et f un élément de $k[x_1 \ldots x_n]$. Soit*

$$f = \sum q_i g_i + r$$

une division de f par les g_i. Le reste est indépendant de la division et on a:

$$f \in I \Leftrightarrow r = 0$$

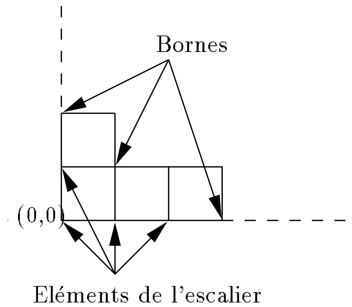
Démonstration: c'est une conséquence immédiate de la définition d'une base de Gröbner.

■

Escaliers et invariants

Nous allons attacher à une base de Gröbner un escalier, qui est un invariant combinatoire.

Définition 8. *On appelle escalier toute partie de $\mathbb{N}^n$ dont le complémentaire C vérifie $C + \mathbb{N}^n \subset C$. Par extension, un escalier de monômes est un ensemble de monômes tel que les multi-entiers associés forment un escalier. On appelle borne d'un escalier un monôme qui n'est pas dans E et minimal pour la relation de divisibilité.*



Proposition 9. *Soit I un idéal de $k[x_1 \ldots x_n]$. L'ensemble des monômes x^e qui ne sont pas dans $in(I)$ forme un escalier qu'on appellera escalier de I.*

Démonstration: évidente.

■

A un escalier E, on peut associer deux invariants:

- son ordre $o(E)$ qui est le plus petit o pour lequel il existe une borne $(i_1, \dots, i_n)$ de E avec $i_1 + \cdots + i_n = o$.
- son cardinal, noté $|E|$, qui appartient à $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

A un schéma $X = V(I)$ de $Spec\ k[x_1 \dots x_n]$, on peut associer deux invariants:

- sa colongueur $col(X)$:=dim $k[x_1 \dots x_n]/I$, dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- sa postulation $p(X)$:= min { d tel que $\exists f \in I$ de degré d } .

Choisissons un ordre homogène sur $k[x_1 \dots x_n]$. On note E l'escalier de l'idéal I de X pour cet ordre. La proposition suivante explique comment lire les invariants de X sur l'escalier E.

Proposition 10. *On a les égalités suivantes:*

1. $p(X) = o(E)$
2. $|E| = col(X)$

Démonstration:

- Le point 1 est une vérification élémentaire.
- point 2: le reste d'une division par une base de Gröbner est unique. Les x^α quand $\alpha \in E$ forment donc une base de $k[x_1 \dots x_n]/I$.

■

1.2 Bases de Gröbner avec paramètres

Notation 11. *Dans toute cette section, A est une k-algèbre, I un idéal de $A[x_1, \dots, x_n] =: A[x]$ et on utilisera librement la notation x^e où e est un multi-entier pour désigner les monômes de $A[x]$.*

Définition 12. *Les notions d'escalier, d'ordre monômial, de monôme initial, de coefficient initial et de terme initial sont les mêmes que dans la section 1.1. On notera $in(I)_e$ (ou $in(I)_{x^e}$) l'idéal de A engendré par les coefficients initiaux des polynômes de I qui admettent x^e (ou e par abus de langage) pour monôme initial. On dira que $in(I)_e$ est l'idéal de coefficients associé au monôme x^e. L'idéal $in(I)$ sera l'idéal engendré par les termes initiaux des éléments de I et s'appellera l'idéal initial de I.*

Proposition 13.

1. *Soit t un terme.*
   $t \in in(I) \Leftrightarrow \exists f \in I$ *tel que* $t(f) = t$.
2. $P \in in(I) \Leftrightarrow$ *pour tout terme t de P,* $\exists f \in I$ *tel que* $t(f) = t$.
3. *La relation d'ordre partiel naturelle sur $\mathbb{N}^n$ est compatible avec l'inclusion des idéaux de coefficients, c'est à dire:*
   $i_1 \leq j_1, \ldots, i_n \leq j_n \Rightarrow in(I)_{x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}} \subset in(I)_{x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}}$
4. *L'ensemble des monômes x^e pour lesquels $in(I)_e = 0$ forme un escalier $E_{min}(I)$.*
5. *L'ensemble des monômes x^e pour lesquels $in(I)_e \neq A$ forme un escalier $E_{max}(I)$.*

Démonstration:
1. Le sens $\Leftarrow$ est trivial. Réciproquement, soit t un terme de $in(I)$. Par définition de $in(I)$, il existe des $f_i \in I$ et des $\lambda_i \in A[x_1, \ldots, x_n]$ avec $t = \sum \lambda_i t(f_i)$. Quitte à ne garder dans λ_i que le terme t_i vérifiant $m(t_i)m(f_i) = m(t)$, on peut supposer que chaque λ_i est un terme. Alors $\lambda_i t(f_i) = t(\lambda_i f_i)$ et $t = \sum t(\lambda_i f_i) = t(\sum \lambda_i f_i)$.
2. Puisque $in(I)$ est un idéal homogène, un élément est dans $in(I)$ ssi ses parties homogènes le sont. D'autre part, on connait les composantes homogènes de $in(I)$ par 1.
3. est une vérification facile utilisant la structure d'idéal de I.
4. et 5. sont des conséquences de 3.

∎

Définition 14. *On appelle base de Gröbner toute partie finie $f_1 \ldots f_s$ génératrice de I dont les termes initiaux sont générateurs de $in(I)$.*

Remarque 15. *L'existence d'une base de Gröbner est assurée par le fait que nous travaillons sur un anneau noethérien.*

On établit ici aussi l'existence d'une division satisfaisant certaines conditions.

Proposition 16 (Existence d'une division).
Choisissons un ordre monômial sur $A[x_1 ... x_n]$. Soient $f_1 ... f_s$ des éléments de $A[x_1 \ldots x_n]$ et notons J l'idéal $(t(f_1), \ldots, t(f_s))$
$\forall f \in A[x_1 ... x_n], \ \exists \lambda_i \in A[x_1 ... x_n], \ \exists R \in A[x_1 ... x_n]$ *tels que*

- $f = \sum \lambda_i f_i + R$
- *aucun des termes t de R n'est dans l'idéal J*
- $\forall i,\ m(f) \geq m(\lambda_i f_i)$

Une telle expression sera appelée division de f par les f_i et R le reste de la division.

Démonstration: elle se calque sur la démonstration existante dans le cas où A est un corps.
Si aucun des termes de f n'est dans l'idéal J, alors $f = 0 + f$ est une expression qui convient. Sinon, considérons le plus grand terme t de f appartenant à J. Il peut s'écrire sous la forme $t = \sum_i \mu_{i1} t(f_i)$. Quitte à enlever les autres termes de μ_{i1}, on peut supposer que μ_{i1} est un terme de monôme $m(t)/m(f_i)$ et $\Sigma\mu_{i1} f_i$ admet alors t pour terme initial. Ecrivons $f = \Sigma\mu_{i1} f_i + g_1$. Si aucun des termes de g_1 n'est dans l'idéal J, on a atteint l'expression voulue. Sinon, on réalise la même opération avec g_1, c'est à dire qu'on écrit $g_1 = \Sigma\mu_{i2} f_i + g_2$ où $t(\Sigma\mu_{i2} f_i)$ est le plus grand terme de g_1 qui est dans J. On crée ainsi une suite de g_i. La suite correspondante des t_i, où t_i est le plus grand terme de g_i qui n'est pas dans J, est strictement décroissante. Comme il est bien connu qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante de monômes (voir [E] par exemple), on a au bout d'un nombre fini n d'étapes un g_n dont aucun des termes n'est dans J. On a donc l'expression recherchée avec $\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_{ik}$ et $R = g_n$.

■

Il est possible de tester l'appartenance à I par division par une base de Gröbner. En outre, cette propriété caractérise les bases de Gröbner.

Proposition 17. *Soit $I \subset k[x_1 \ldots x_n]$ et $f_1, \ldots, f_s$ une base de Gröbner de I. Soient g un élément de I et $g = \sum \lambda_i f_i + R$ une division de g par les f_i. On a $g \in I$ ssi $R = 0$.*

Démonstration: évidente

■

Proposition 18 (Caractérisation des bases de Gröbner).
Soient $f_1 \ldots f_s$ des polynômes de I. Les propositions suivantes sont équivalentes:

1. *$(f_1 \ldots f_s)$ est une base de Gröbner de I*

2. *Pour tout élément f de I et pour toute division $f = \sum \lambda_i f_i + R$ de f par les f_i, on a $R = 0$*

Démonstration:
$1 \Rightarrow 2$ d'après la proposition précédente.
$2 \Rightarrow 1$: il est clair que les f_i sont des générateurs de I. Il nous reste à vérifier que le terme initial de tout élément de I est dans l'idéal $J = (t(f_1), \dots, t(f_s))$. Soit f un élément de $A[x_1, \dots, x_n]$ vérifiant $t(f) \notin J$. On veut montrer que f n'appartient pas à I. Soit

$$f - t(f) = \sum \lambda_i f_i + R$$

une division de $f - t(f)$ par les f_i. En regardant précisément l'algorithme montrant l'existence d'une division, on voit qu'on peut choisir cette division de sorte que $m(R) \leq m(f - t(f)) < m(f)$. L'expression

$$f = \sum \lambda_i f_i + (t(f) + R)$$

est une division de f par les f_i à reste non nul, donc f n'est pas dans I.

■

Dans la suite, nous travaillerons essentiellement avec des bases de Gröbner unitaires:

Définition 19.
Une base de Gröbner $(f_1, \dots, f_s)$ d'un idéal I de $A[x_1, \dots, x_n]$ est dite unitaire si chaque polynôme f_i est unitaire.

Remarque 20. *Si un idéal I admet une base de Gröbner unitaire $(f_1, \dots, f_s)$, alors $E_{min}(I) = E_{max}(I) =: E(I)$. Une division d'un élément f par $f_1, \dots, f_s$ est simplement une expression*

$$f = \sum \lambda_i f_i + R$$

où tout monôme m de R est dans $E(I)$ et $m(f) \geq m(\lambda_i f_i)$.

Dans le cas où le fermé $V(I)$ de $Spec\ A[x_1, \dots, x_n]$ est plat et fini sur A, il existe un critère simple pour vérifier que des polynômes unitaires forment une base de Gröbner de I.

Proposition 21. *Soient $X = Spec\ A$ un schéma affine et F un fermé de $X \times Spec\ k[x_1 \ldots x_n]$ plat et fini sur X de degré d. Soient $f_1 \ldots f_s$ des polynômes unitaires de $I(F)$. Notons E l'escalier de $\mathbb{N}^2$ formé par les multi-entiers e tels que x^e ne soit pas dans l'idéal $(m(f_1), \ldots, m(f_s))$. Les éléments $f_1, \ldots, f_s$ forment une base de Gröbner unitaire de $I(F)$ ssi E est de cardinal d.*

Démonstration: d'après [BGS], si $f_1, \ldots, f_s$ forment une base de Gröbner unitaire de I, et si $\mathfrak{p}$ est un point quelconque de $Spec\ A$, les éléments $f_1(\mathfrak{p}), \ldots, f_s(\mathfrak{p})$ forment une base de Gröbner unitaire de

$$I(\mathfrak{p}) \subset A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}[x_1, \ldots, x_n]$$

En particulier l'escalier E de $I(\mathfrak{p})$ a pour cardinal la colongueur de la fibre au dessus d'un point $\mathfrak{p}$ quelconque, à savoir d, ce qui démontre le "seulement si".
Réciproquement, notons A^d le sous A-module libre de $A[x]$ engendré par les x^e avec e dans E, $\psi : A[x] \to A[x]/I$ la projection et $\varphi : A^d \to A[x]/I$ la restriction de ψ à A^d.
Pour tout élément f de $A[x]$, choisissons une division de f par les f_i:

$$f = \sum \lambda_i f_i + R(f)$$

On obtient ainsi une application ensembliste $R : A[x] \to A^d$. Les morphismes ψ, φ, R s'organisent en le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} A[x] & \rightarrow & A^d \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & A[x]/I & \end{array}$$

Puisque $A[x]/I$ est plat et fini comme A-module, il est localement libre de rang d et φ, qui est surjectif, est un isomorphisme. On a alors les équivalences suivantes:

$$f \in I \Leftrightarrow \psi(f) = 0 \Leftrightarrow \varphi \circ R(f) = 0 \Leftrightarrow R(f) = 0$$

Les éléments $f_1, \ldots, f_s$ forment donc une base de Gröbner unitaire de I d'après la caractérisation 18 des bases de Gröbner par division.

■

Nous allons maintenant énoncer la proposition essentielle de ce chapitre, qui explique que la division par une base de Gröbner unitaire permet de calculer les lieux schématiques d'incidence.

Proposition 22. *Soient A une k-algèbre, X et Y deux sous-schémas de $Spec\ A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tels que le morphisme $X \to Spec\ A$ soit plat et fini. Supposons que $I(X)$ admette une base de Gröbner unitaire $f_1, f_2, \dots, f_s$. Notons m_i $(i \leq r)$ les monômes de l'escalier $E(I(X))$. Soient $g_1, \dots, g_t$ un système de générateurs de $I(Y)$. Considérons pour tout i une division de g_i par $f_1, \dots, f_s$.*

$$g_i = \sum_j \lambda_{ij} f_j + \sum_{j \leq r} c_{ij} m_j$$

L'idéal I engendré par les c_{ij} est l'idéal du plus grand sous-schéma fermé Z de $Spec\ A$ tel que $X \times_{Spec\ A} Z \subset Y \times_{Spec\ A} Z$

Démonstration: soit Z un sous-schéma de $Spec\ A$. Notons φ_Z la projection

$$\varphi_Z : A[x_1, \dots, x_n] \to A/I(Z)[x_1, \dots, x_n]$$

Les schémas $X \times_{Spec\ A} Z$ et $Y \times_{Spec\ A} Z$ sont deux sous-schémas fermés de $Spec\ A/I(Z)[x_1, \dots, x_n]$ d'idéaux respectifs $(\varphi_Z(f_i))$ et $(\varphi_Z(g_i))$. En outre, les $\varphi_Z(f_i)$ forment une base de Gröbner unitaire de l'idéal qu'ils engendrent d'après la proposition précédente.
Si $I(Z) \supset I$, les expressions

$$\varphi_Z(g_i) = \sum \varphi_Z(\lambda_{ij}) \varphi_Z(f_j)$$

nous assurent que $X \times_{Spec\ A} Z \subset Y \times_{Spec\ A} Z$.
S'il existe (i_0, j_0) tel que $c_{i_0, j_0} \notin I(Z)$, la division

$$\varphi_Z(g_{i_0}) = \sum \varphi_Z(\lambda_{i_0 j}) \varphi_Z(f_j) + \underbrace{\sum_j \varphi_Z(c_{i_0,j}) m_j}_{reste\ non\ nul}$$

montre qu'on n'a pas $X \times_{Spec\ A} Z \subset Y \times_{Spec\ A} Z$.

■

Chapitre 2

Calculs de lieux d'incidence

Nous affronterons au chapitre 5 le problème suivant. Soient S une surface lisse, C un sous-schéma ponctuel de S de support s et d_0 un point de $Hilb^2(S)$ tels que $[d_0]^n \subset C$ ($[d_0]^n$ désigne le schéma d'idéal $I([d_0])^n$). On aimerait déterminer le lieu schématique Z de $Hilb^2(S)$ formé par les d tels que $[d]^n \subset C$ au voisinage de $d = d_0$. Si S était l'espace affine $\mathbb{A}^2$, on choisirait un voisinage affine U de d_0 dans $Hilb^2(S)$. On aurait deux fermés X et Y de $U \times S = U \times \mathbb{A}^2$ dont les fibres au dessus d'un point d de $Hilb^2(S)$ seraient respectivement les sous-schémas $[d]^n$ et C de $\mathbb{A}^2$. On utiliserait alors les techniques du chapitre précédent qui expliquent comment calculer des lieux d'incidence pour des familles de sous-schémas d'un espace affine.
Quand S est une surface quelconque, l'idée est alors la suivante: si on choisit U suffisamment local (i.e. en prenant pour U un "voisinage formel" de d_0 dans $Hilb^2(S)$), X et Y deviennent des sous-schémas fermés de $U \times Spec\ k[[x, y]]$, où $Spec\ k[[x, y]]$ est le voisinage formel de s dans S. A l'aide d'un morphisme $Spec\ k[[x, y]] \to \mathbb{A}^2$, X et Y deviennent des familles de sous-schémas de $\mathbb{A}^2$, ce qui nous permet d'appliquer nos méthodes.

Le but de ce chapitre est de justifier proprement ces opérations et d'en donner une application (proposition 39). Nous en profitons pour donner une notion de cartes locales d'un schéma de Hilbert valable sur un corps quelconque, tandis que la littérature classique ([G] ou [LB] par exemple) traite du cas complexe et utilise la topologie "usuelle".

2.1 Du formel à l'affine

Définition 23. *Soit A un anneau et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal. Notons $\hat{A}$ le complété $\varprojlim A/\mathfrak{m}^n$ et $[[m]] = Spec\ \hat{A}$. On appellera voisinage formel de $\mathfrak{m}$ dans $Spec\ A$ le morphisme naturel de $[[m]]$ dans $Spec\ A$ ou, plus généralement,* *tout morphisme d'un schéma $\hat{X}$ dans Spec A pour lequel il existe un isomorphisme de $[[m]]$ dans $\hat{X}$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} {[[m]]} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \hat{X} \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}\ A & \end{tikzcd}$$

Soient $\mathfrak{m}$ un point d'un schéma non affine V et U un ouvert affine de V contenant $\mathfrak{m}$. Un morphisme $\hat{X} \to V$ est appelé voisinage formel de $\mathfrak{m}$ s'il est obtenu par composition d'un voisinage formel $\hat{X} \to U$ de $\mathfrak{m}$ dans U avec l'inclusion $U \hookrightarrow V$. On vérifie sans peine que cette définition ne dépend pas du choix de l'ouvert affine U contenant $\mathfrak{m}$.

Notation 24. *On note C la catégorie des k-algèbres $\hat{A}$ pour lesquelles il existe une k-algèbre de type fini A et un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tels que $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$. On notera X_n et $\hat{X}$ les schémas Spec $A/\mathfrak{m}^{n+1}$ et Spec $\hat{A}$ et on écrira $\hat{X} = \varinjlim X_n$. Plus généralement, si les X_n sont des schémas affines et si on dispose de morphismes $f_n : \Gamma(X_{n+1}) \to \Gamma(X_n)$, on dénotera par $\varinjlim X_n$ le schéma Spec $(\varprojlim \Gamma(X_n))$. On notera $\mathfrak{C}$ la sous-catégorie pleine des schémas formée par les Spec $\hat{A}$ quand $\hat{A}$ est dans C. Pour un élément de $\mathfrak{C}$, on utilisera la notation avec le chapeau $\hat{X}$si on veut le penser comme un schéma abstrait, tandis qu'on utilisera la notation avec le double crochet $[[m]]$ si on veut le faire intervenir dans un voisinage formel.*

Soit $[p]$ un sous-schéma ponctuel d'un schéma projectif V, de support $v \in V$ correspondant à un point p de $Hilb(V)$. Notons $Def_{[p]\subset V}$ le foncteur de $\mathfrak{C}$ dans la catégorie des ensembles défini par

$$\begin{aligned} Def_{[p]\subset V}(\quad \hat{X} \quad) = \{ & \text{fermés } F \text{ de } V \times \hat{X}, \text{plats sur } \hat{X}, \\ & \text{dont la fibre spéciale } F \times_{\hat{X}} X_0 \text{ est } [p]\} \end{aligned}$$

Proposition 25. *Le foncteur $Def_{[p]\subset V}$ est représentable par le schéma $[[p]]$, où $[[p]] \to Hilb(V)$ est le voisinage formel de p dans $Hilb(V)$.*

Lemme 26 (Propriété universelle du voisinage formel). *Soient X un k-schéma de type fini et x un point fermé de X. Le voisinage formel $v : [[x]] \to X$ satisfait la propriété universelle suivante: pour tout schéma $\hat{Y} = \varinjlim Y_n$ de $\mathfrak{C}$, pour tout morphisme $f : \hat{Y} \to X$ pour lequel $f(Y_0) = x$, il existe un unique morphisme $g : \hat{Y} \to [[x]]$ tel que $v \circ g = f$*

Démonstration de la proposition: considérons une déformation de $[p]$ paramétrée par un schéma $\hat{X}$ de $\mathfrak{C}$. Par propriété universelle de $Hilb(V)$, cette déformation est associée à un unique morphisme $\hat{X} \to Hilb(V)$, qui se factorise par le voisinage formel de p dans $Hilb(V)$ de façon unique en vertu du lemme 26.

■

Démonstration du lemme:
unicité de la factorisation: on peut supposer que X est affine. On note alors $X = Spec\ B, [[x]] = Spec\ \hat{B}$ avec $\hat{B} = \varprojlim B/\mathfrak{m}^n$. Les schémas $\hat{Y}$ et Y_n sont eux toujours affines; on note $\hat{Y} = Spec\ \hat{A}$ et $Y_n = Spec\ A_n$. Le morphisme de $\hat{Y} \to X$ correspond au niveau des anneaux à une suite de morphismes $f_n : B \to A_n$ assujettis à la condition $g_n f_{n+1} = f_n$ où g_n est le morphisme de $A_{n+1} \to A_n$ fourni avec la définition de $\hat{Y}$. Considérons deux morphismes différents φ_1 et φ_2 de $\hat{B}$ dans $\hat{A} = \varprojlim A_n$. Il nous faut vérifier que $\varphi_1 \circ w \neq \varphi_2 \circ w$ où w est le morphisme d'anneaux associé à v. Notons p_n la projection de $\hat{A}$ sur A_n. Les morphismes $p_n \circ \varphi_1$ et $p_n \circ \varphi_2$ sont distincts pour un n suffisamment grand. Puisque A_n est artinien local, une certaine puissance p de son idéal maximal est nulle et les morphismes $p_n \circ \varphi_1$ et $p_n \circ \varphi_2$ se factorisent par $\hat{B}/\mathfrak{m}^p$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\hat{B}$. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant, qui définit les flèches h_1 et h_2.

$$\begin{tikzcd}
\hat{B} \arrow[rr, "\varphi_1 (resp.\ \varphi_2)"] \arrow[dr] & & \hat{A} \arrow[dd, "p_n"] \\
& B/\mathfrak{m}^p = \hat{B}/\mathfrak{m}^p \arrow[dr] & \\
B \arrow[uu, "w"] \arrow[ur] \arrow[rr, "h_1 (resp. h_2)"] & & A_n
\end{tikzcd}$$

Par surjectivité du morphisme $B \to B/\mathfrak{m}^p$, h_1 et h_2 sont distincts, et d'après les factorisations

$$h_1 = p_n \circ \varphi_1 \circ w$$

et

$$h_2 = p_n \circ \varphi_2 \circ w$$

on a finalement $\varphi_1 \circ w \neq \varphi_2 \circ w$.

existence de la factorisation: puisque A_n est artinien local, il existe un entier p (dépendant de n) tel que chacun des morphismes f_n se factorise sous la forme

$$B \to B/\mathfrak{m}^p \to A_n$$

Comme le morphisme $B \to B/\mathfrak{m}^p$ se factorise lui même par

$$B \xrightarrow{w} \hat{B} \to B/\mathfrak{m}^p$$

f_n se factorise sous la forme $f_n = h_n \circ w$, où h_n est un morphisme de $\hat{B}$ dans A_n. En outre, la même démonstration que ci-dessus assure l'unicité de h_n et, par suite, l'égalité $g_n \circ h_{n+1} = h_n$. Les morphismes h_n induisent donc un morphisme $\hat{B} \to \hat{A}$ qui est la factorisation voulue.

■

Le foncteur $Def_{[p]\subset V}$ gère les déformations locales de $[p]$. La localité est ici une notion portant sur la base, c'est à dire que l'on s'est interessé aux déformations dont la base est suffisamment locale. Comme le schéma $[p]$ est ponctuel de support $v \in V$, on voudrait introduire un autre niveau de localité, portant sur la fibre: on voudrait paramétrer les déformations de $[p]$ dans le voisinage formel $[[v]]$ de v plutôt que les déformations de $[p]$ dans V. L'idée naturelle consiste à introduire le foncteur F_{loc} de $\mathfrak{C}$ à valeurs la catégorie des ensembles défini par

$$\begin{aligned} F_{loc}(\hat{X}) = \{&\text{fermés } F \text{ de } [[v]] \times \hat{X}, \text{plats sur } \hat{X}, \\ &\text{dont la fibre spéciale } F \times_{\hat{X}} X_0 \text{ est } [p]\} \end{aligned}$$

Ce foncteur n'est hélas pas représentable car il existe des fermés de $[[v]] \times \hat{X}$ définissant de “mauvaises” familles plates.

Exemple 27. *Considérons les schémas $[[v]] = Spec\, k[[x]]$, $\hat{X} = Spec\, k[[t]]$ et $X_n = Spec\, k[t]/t^{n+1}$. L'idéal*

$$I = (xt - 1) \subset k[[t]] \otimes k[[x]]$$

définit un sous-schéma fermé

$$Z \subset \hat{X} \times [[v]]$$

plat au dessus de $\hat{X}$. La fibre au dessus de $t = 0$ est vide mais $xt - 1$ n'est pas inversible dans $k[[t]] \otimes k[[x]]$ et donc Z n'est pas vide. Notons Z' le schéma vide de $\hat{X} \times [[v]]$. Supposons que F_{loc} soit représentable par un schéma R. Les familles Z et Z' sont associées à des morphismes f et f' de $\hat{X}$ dans R ou encore, à des familles de morphismes f_n et f'_n de X_n dans R. L'égalité

$$Z \times_{\hat{X}} X_n = Z' \times_{\hat{X}} X_n = \emptyset$$

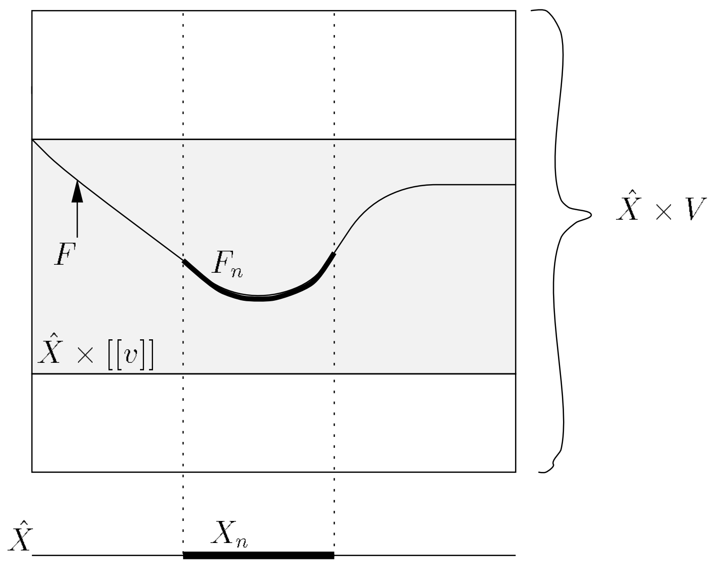
impose $f_n = f'_n$ d'où $f = f'$ et $Z = Z'$, ce qui n'est pas le cas. Le foncteur F_{loc} n'est donc pas représentable.

■

La proposition suivante explique différentes caractérisations possibles des "bonnes" familles.
Soient $\hat{X} = \varinjlim X_n$ et $[[v]]$ deux schémas de $\mathfrak{C}$, et $F \subset \hat{X} \times [[v]]$ une famille plate sur $\hat{X}$. Notons $F_n = F \times_{\hat{X}} X_n$. Supposons que la fibre spéciale F_0 soit un sous-schéma ponctuel de $[[v]]$. Remarquons qu'il existe un morphisme naturel de $\varinjlim F_n$ dans F. Par ailleurs, pour tout morphisme $f : [[v]] \to V$, il existe un morphisme naturel $\varphi_f : F \to \hat{X} \times V$.

Proposition 28. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. $F = \varinjlim F_n$
2. *pour toute variété projective V et pour tout voisinage formel $f : [[v]] \to V$, φ_f est un plongement fermé.*
3. *pour toute variété quasi-projective V et pour tout voisinage formel $f : [[v]] \to V$, φ_f est un plongement fermé.*
4. *il existe variété projective V et un voisinage formel $f : [[v]] \to V$ tel que φ_f soit un plongement fermé.*
5. *$F \to \hat{X}$ est un morphisme fini.*



Démonstration: $5 \Rightarrow 1$: d'après l'hypothèse, F est affine et $\Gamma(F)$ est un $\Gamma(\hat{X})$ module fini et plat, donc libre car $\Gamma(\hat{X})$ est un anneau local: $\Gamma(F) \simeq \Gamma(\hat{X})^d$. D'autre part

$$\Gamma(F_n) = \Gamma(F) \otimes_{\hat{\Gamma}(\hat{X})} \Gamma(X_n) = \Gamma(X_n)^d$$

On a bien $\Gamma(F) = \varprojlim \Gamma(F_n)$.

$1 \Rightarrow 2$

Etape 1. Montrons que le morphisme $F_n \to X_n \times V$ est un plongement fermé. Par le changement de base $X_n \to \hat{X}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & \hat{X} \times [[v]] & \rightarrow & \hat{X} \times V \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \hat{X} & & \end{array}$$

devient

$$\begin{array}{ccccc} F_n & \hookrightarrow & X_n \times [[v]] & \rightarrow & X_n \times V \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & X_n & & \end{array}$$

$\Gamma(X_n)$ est artinien et l'anneau de fonctions de la fibre spéciale $\Gamma(F_n) \otimes_{\Gamma(X_n)} k$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Par Nakayama([M]), $\Gamma(F_n)$ est alors un $\Gamma(X_n)$ module fini et par suite $\Gamma(F_n)$ est artinien. Il existe alors un entier p pour lequel on a la factorisation suivante:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_n \times v_p & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ F_n & \hookrightarrow & X_n \times [[v]] & \rightarrow & X_n \times V \end{array}$$

où v_p est un des schémas qui interviennent dans la définition de $[[v]] = \varinjlim v_n$.
La flèche diagonale de gauche est un plongement fermé puisqu'elle factorise $F_n \hookrightarrow X_n \times [[v]]$. La deuxième flèche diagonale est également un plongement fermé. C'est donc aussi le cas pour la composée $F_n \to X_n \times V$.

Etape 2: il existe un fermé $Z \subset \hat{X} \times V$ tel que $Z \times_{\hat{X}} X_n = F_n$
F_n est un fermé de $X_n \times V$ plat sur X_n donc définit un morphisme $\varphi_n : X_n \to Hilb(V)$. Ces morphismes sont compatibles et définissent un morphisme $\hat{\varphi} : \hat{X} \to Hilb(V)$. L'image inverse par $\hat{\varphi} \times Id$ de la famille universelle de $Hilb(V) \times V$ définit un fermé Z de $\hat{X} \times V$ et par construction $Z \times_{\hat{X}} X_n = F_n$.

Etape 3: L'image schématique $\overline{F}$de F par φ_f est plate sur $\hat{X}$ et $\overline{F} \times_{\hat{X}} X_n = F_n$.

Par définition, $\overline{F}$ est le plus petit fermé de $\hat{X} \times V$ contenant tous les F_n. Un fermé Z satisfaisant aux conditions de l'étape 2 vérifie l'inclusion $\overline{F} \subset Z$. En particulier,

$$\overline{F} \times_{\hat{X}} X_n \subset Z \times_{\hat{X}} X_n = F_n$$

Réciproquement l'inclusion $F_n \subset \overline{F}$ implique

$$F_n \times_{\hat{X}} X_n = F_n \subset \overline{F} \times_{\hat{X}} X_n$$

On a démontré $\overline{F} \times_{\hat{X}} X_n = F_n$.
Soit P la strate platifiante du morphisme $\overline{F} \to \hat{X}$ contenant le point X_0. Puisque $F_n \to X_n$ est plat, on a $X_n \subset P$; P contient tous les X_n et donc $P = \hat{X}$.

Etape 4: conclusion
Le morphisme $\overline{F} \to X$ est fini. Puisque $5 \Rightarrow 1$, $\overline{F} = \varinjlim \overline{F_n} = \varinjlim F_n = F$ et φ_f est un plongement fermé.

$2 \Rightarrow 3$: Soit $g : V \to \overline{V}$ une immersion ouverte de V dans une variété projective. Le morphisme φ_f est un plongement fermé comme factorisation du plongement fermé $\varphi_{g\circ f}$.

$3 \Rightarrow 4$ est trivial

$4 \Rightarrow 5$ puisque les morphismes projectifs quasi-finis sont finis.

■

Nous allons nous limiter à ces bonnes familles pour obtenir des foncteurs représentables.

Définition 29. *Soient $\hat{X} = \varinjlim X_n$ et $[[v]]$ deux schémas de $\mathfrak{C}$, $[p]$ un sous-schéma fermé ponctuel de $[[v]]$. Nous appellerons déformation de $[p]$ dans $[[v]]$ paramétrée par $\hat{X}$ un fermé*

$$F \subset \hat{X} \times [[v]]$$

plat sur $\hat{X}$, vérifiant l'une des conditions 1,2,3,4 ou 5 de la proposition 28, et tel que

$$F \times_{\hat{X}} X_0 \simeq [p]$$

Notons $Def_{[p]\subset[[v]]}$ le foncteur suivant:

$$\begin{array}{rccl} Def_{[p]\subset[[v]]}: & \mathfrak{C} & \to & Ensembles \\ & \hat{X} & \mapsto & \{\textit{Déformations de } [p] \textit{ dans } [[v]] \textit{ paramétrées par } \hat{X}\} \end{array}$$

Proposition 30. *Soit V un schéma quasi-projectif, $[p]$ un sous-schéma ponctuel de V de support $v \in V$, $[[v]]$ le voisinage formel de v dans V. Les foncteurs $Def_{[p]\subset[[v]]}$ et $Def_{[p]\subset V}$ sont isomorphes. En particulier $Def_{[p]\subset[[v]]}$ est représentable.*

Démonstration: d'après la caractérisation 3) des bonnes familles, tout fermé F de $\hat{X}\times[[v]]$, plat et fini sur $\hat{X}$, peut être vu comme un fermé de $\hat{X}\times V$. On obtient ainsi un morphisme d'ensembles de $Def_{[p]\subset[[v]]}(\hat{X})$ dans $Def_{[p]\subset V}(\hat{X})$. Ces différents morphismes s'organisent en une transformation naturelle de foncteurs $T_1 : Def_{[p]\subset[[v]]} \rightarrow Def_{[p]\subset V}$.
Réciproquement, si $\hat{X}$ est un schéma de $\mathfrak{C}$, tout plongement fermé $f : F \hookrightarrow \hat{X}\times V$ tel que F soit plat et fini sur $\hat{X}$, se factorise de façon unique sous la forme:

$$F \hookrightarrow \hat{X}\times[[v]] \rightarrow \hat{X}\times V$$

car $F = \varinjlim F_n$ et, $\Gamma(F_n)$ étant artinien, la factorisation est possible pour F_n. Ces factorisations définissent un morphisme d'ensembles de $Def_{[p]\subset V}(\hat{X})$ dans $Def_{[p]\subset[[v]]}(\hat{X})$. Ces morphismes s'organisent également en une transformation naturelle de foncteurs $T_2 : Def_{[p]\subset V} \rightarrow Def_{[p]\subset[[v]]}$.
Les foncteurs T_1 et T_2 sont par construction inverses l'un de l'autre.

■

Corollaire 31. *Soient V_1 et V_2 deux schémas quasi-projectifs, $[p_1]$ et $[p_2]$ deux-sous schémas ponctuels de V_1 et V_2 de support v_1 et v_2. S'il existe un isomorphisme $\varphi : [[v_1]] \rightarrow [[v_2]]$ induisant un isomorphisme entre $[p_1]$ et $[p_2]$, alors les foncteurs $Def_{[p_1]\subset V_1}$ et $Def_{[p_2]\subset V_2}$ sont isomorphes.*

Définition 32. *Soient V un schéma quasi-projectif, $[p]$ un sous-schéma ponctuel de V de support v. On appelle carte locale de Hilb V en p (ou, par abus de langage, carte locale de Hilb $[[v]]$ en p) la donnée d'un voisinage formel $[[v]]$ de v dans V et d'une famille universelle*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & B\times[[v]] \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

permettant de représenter le foncteur $Def_{[p]\subset[[v]]}$.

Les deux prochaines propositions expliquent comment trouver les équations d'une carte locale dans le cas où V est une variété lisse. Nous avons inclus ces deux propositions pour expliquer pourquoi il est possible de reprendre les équations déja mises en évidence dans la littérature dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$. En revanche, nous n'effectuerons pas nous-mêmes de calculs de cartes locales.

Proposition 33. *Soit $I = (f_1, \dots, f_p)$ un idéal de $k[[x_1 \dots x_n]]$ définissant un schéma ponctuel. Choisissons un ordre monômial sur $k[[x_1 \dots x_n]]$. Notons $E(I)$ l'escalier de I pour cet ordre et $e_1, \dots, e_r$ les monômes de $E(I)$. Soient a_{ij} ($1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq r$) des indéterminées. Définissons l'élément F_i de $k[[x_1 \dots x_n]] \otimes k[[a_{ij}]] =: k[[x]] \otimes k[[a]]$ par:*

$$F_i(x,a) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{r} a_{ij} e_j$$

Soit V le fermé de Spec $k[[x_1 \dots x_n]] \times$ Spec $k[[a_{ij}]]$ défini par les F_i. Notons

- *$P \subset$ Spec $k[[a_{ij}]]$ la strate platifiante du morphisme $V \to$ Spec $k[[a_{ij}]]$ contenant le point fermé*
- *$U := P \times_{Spec\ k[[a_{ij}]]} V$*

Alors

$$\begin{array}{ccc} U & \rightarrow & \text{Spec}\, k[[x_1 \dots x_n]] \times P \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & P & \end{array}$$

est une carte locale de Hilb $k[[x_1 \dots x_n]]$ en le point p tel que $[p] = V(I)$.

Démonstration: voir [G] et [Gal] où les démonstrations sont faites avec un vocabulaire analytique mais s'adaptent sans problème.

■

Remarque 34. *La proposition utilise la notion d'ordre monômial sur un anneau de séries formelles. Il existe en fait une théorie parallèle à la théorie des bases de Gröbner sur les anneaux de séries formelles que nous n'avons pas introduite pour éviter de trop longues généralités. On peut de toutes façons se passer de cette notion en voyant $V(I)$ comme un sous-schéma d'un espace affine et en utilisant 31. Le lecteur intéressé par la théorie sur les séries se reportera à [Gal].*

Proposition 35 (Calcul du platificateur). *Soient $r_l = (u_{l,1}, \dots, u_{l,p})$, $1 \leq l \leq s$ des générateurs du module des relations entre les f_i ($\sum_1^p u_{l,i} f_i = 0$). On définit m_l par*

$$m_l = u_{l,1}F_1 + \cdots + u_{l,p}F_p$$

Le reste R_l de la division de m_l par les F_i s'écrit

$$\sum_{\underline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in E(I)} h_{l,\underline{\alpha}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \qquad h_{l,\underline{\alpha}} \in k[[a_{ij}]]$$

et les $h_{l,\underline{\alpha}}$ sont les équations du platificateur.

Démonstration: voir [Gal]. Les démonstrations n'utilisent pas fondamentalement le fait que le corps de base est $\mathbb{C}$ et peuvent être adaptées à un corps quelconque.

■

Ces justifications nous permettent d' utiliser les cartes dejà mises en évidence sur $\mathbb{C}$, par exemple dans [LB].

Exemple 36. *Soit $[d]$ un doublet ponctuel d'une surface lisse S. En choisissant un voisinage formel adéquat $Spec\ k[[x,y]]$ du support de $[d]$, on peut supposer que les équations de $[d]$ sont (x^2, y) dans ce voisinage formel. Soit U le fermé de $Spec\ k[[a,b,c,e]] \times Spec\ k[[x,y]]$ défini par l'idéal $(x^2+ax+b, y+cx+e)$.*

$$\begin{array}{ccc} U & \rightarrow & Spec\ k[[a,b,c,e]] \times Spec\ k[[x,y]] \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Spec\ k[[a,b,c,e]] & \end{array}$$

est une carte locale de $Hilb^2(S)$ en d.

Exemple 37. *Soit $[t]$ un triplet ponctuel curviligne d'une surface lisse S. En choisissant un voisinage formel $Spec\ k[[x,y]]$ adéquat, on peut supposer que les équations de $[t]$ sont (x^3, y). Soit U le fermé de $Spec\ k[[a,b,c,d,e,f]] \times Spec\ k[[x,y]]$ défini par l'idéal $(x^3+ax^2+bx+c, y+dx^2+ex+f)$.*

$$\begin{array}{ccc} U & \rightarrow & Spec\ k[[a,b,c,d,e,f]] \times Spec\ k[[x,y]] \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Spec\ k[[a,b,c,d,e,f]] & \end{array}$$

est une carte locale de $Hilb^3(S)$ en t.

Exemple 38. *Soit $[t]$ un triplet ponctuel non curviligne d'une surface lisse S. Pour tout voisinage formel $Spec\ k[[x,y]]$ du support de $[t]$, les équations de $[t]$ sont (x^2, xy, y^2). Soit P le fermé de $Spec\ k[[a,b,c,d,e,f,g,h,l]]$ dont les équations sont*

$$(c - ae - bh + bd + e^2, f - de + bg, l - ag - dh + ge + d^2)$$

Soit U le fermé de $P \times Spec\ k[[x,y]]$ défini par

$$(x^2 + ax + by + c, xy + dx + ey + f, y^2 + gx + hy + l)$$

Le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} U & \rightarrow & P \times Spec\ k[[x,y]] \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & P & \end{array}$$

est une carte locale de $Hilb^3(S)$ en t.

2.2 Application

Comme application de ces techniques, nous démontrons une proposition dont nous aurons besoin au chapitre 5.

Proposition 39. *Soit S une surface lisse sur un corps de caractéristique nulle. Soit C un sous-schéma ponctuel de S de support s. Supposons qu'il existe un voisinage formel $Spec\ k[[x,y]]$ de s dans S dans lequel l'idéal $I(C)$ est engendré par les monômes*

$$(x^{\alpha}y^{\beta}) \quad (3\alpha + 4\beta \geq 6n,\ n \geq 2)$$

Le lieu Z de $Hilb^2(S)$ formé par les d tels que $[d]^n \subset C$ est inclus dans un schéma ponctuel de colongueur trois.

Démonstration: nous verrons au chapitre cinq que si U_2 est le fermé universel de $Hilb^2(S)\times S$, le fermé U_2^n d'idéal $I(U_2)^n$ est plat et fini sur $Hilb^2(S)$ à fibres de colongueur $n(n+1)$. Soit d_0 un doublet vérifiant $[d_0]^n \subset C$. Regardons $[d_0]$ comme sous-schéma de $\mathbb{A}^2$ via le morphisme canonique

$$Spec\ k[[x,y]] \to Spec\ k[x,y]$$

On vérifie que le doublet $[d_1]$ d'idéal

$$I([d_1]) = (x, y^2)$$

ne vérifie pas $[d_1]^n \subset C$. Puisque $[d_0]$ est ponctuel supporté par $(0,0)$, et différent de $[d_1]$, on a

$$I([d_0]) = (x^2, y + c_0x)$$

Le voisinage formel $[[d_0]]$ de d_0 dans $Hilb^2(S)$ est isomorphe à $Spec\ k[[a,b,c,e]]$ et l'idéal universel définissant la carte locale de $Hilb^2(S)$ en d_0 est:

$$I(U_2) = (x^2 + ax + b\ ,\ y + (c + c_0)x + e)$$

Les fermés $Spec\ k[[a,b,c,e]] \times C$ et U_2^n de

$$Spec\ k[[a,b,c,e]] \times Spec\ k[[x,y]]$$

peuvent être vus comme des fermés de

$$Spec\ k[[a,\dots,e]] \times \mathbb{A}^2$$

moyennant le morphisme canonique $Spec\ k[[x,y]] \to Spec\ k[x,y]$ et leurs idéaux sont encore:

$$I(U_2^n) = (x^2 + ax + b, y + (c + c_0)x + e)^n$$

et

$$I(C) = (x^\alpha y^\beta) \quad (3\alpha + 4\beta \geq 6n)$$

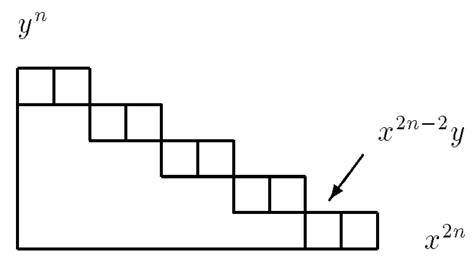
En outre, les polynômes de la forme

$$((x^2 + ax + b)^\mu (y + (c + c_0)x + e)^\nu) \ avec \ \mu + \nu = n$$

forment une base de Gröbner unitaire de $I(U_2)^n$ pour l'ordre homogène avec $y > x$ d'après la proposition 21: les termes initiaux de ces polynômes sont les

$$x^r y^s \quad avec \quad r + 2s = 2n$$

et l'escalier défini par ces monômes est de cardinal $n(n+1)$.



On contrôle le lieu Zde $Spec\ k[[a,b,c,e]]$ au dessus duquel $U_2^n \subset C \times Spec\ k[[a,b,c,e]]$ par des divisions (proposition 22):

$$x^{2n} = (x^2 + ax + b)^n - \underbrace{nax^{2n-1} + autres\ termes\ du\ reste}_{reste}$$

donc $I(Z) \supset a$. Le lieu Z est inclus dans

$$Spec\ k[[a,b,c,e]]/a = Spec\ k[[b,c,e]]$$

On restreint notre étude à ce lieu et on fait de nouvelles divisions:

$$x^{2n} = (x^2 + b)^n - \underbrace{nbx^{2n-2} + termes\ du\ reste}_{reste}$$

$$\Downarrow$$

$$b \in I(Z)$$

$$x^{2n-1}y = (x^2)^{n-1}(y + (c + c_0)x + e)x - (c + c_0)(x^2)^n - \underbrace{ex^{2n-1}}_{reste}$$

$$\Downarrow$$

$$e \in I(Z)$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
x^{2n-4}y^3 &= (x^2)^{n-2}(y+(c+c_0)x)^2y - 2(c+c_0)y^2x^{2n-3} - (c+c_0)^2x^{2n-2}y \\
&= \textit{element de } I(U_2)^n - 2(c+c_0)(y+(c+c_0)x)^2x^{2n-3} \\
&\quad -(c+c_0)^2x^{2n-2}y + 4(c+c_0)^2yx^{2n-2} + 2(c+c_0)^3x^{2n-1} \\
&= \textit{element de } I(U_2)^n + 2(c+c_0)^3x^{2n-1} \\
&\quad +3(c+c_0)^2x^{2n-2}(y+(c+c_0)x) - 3(c+c_0)^3x^{2n-1} \\
&= \textit{element de } I(U_2)^n - (c+c_0)^3x^{2n-1}
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$(c+c_0)^3 \in I(Z)$$

Puisque c est dans l'idéal maximal de $k[[a,b,c,e]]$, le lieu $V((c_0+c)^3)$ de

$$Spec\ k[[a,b,c,e]]$$

est non vide uniquement si $c_0 = 0$. Le doublet $[d_0]$ est donc nécessairement le doublet d'équations (x^2, y). Par suite Z est ponctuel et puisque

$$I(Z) \supset (a,b,c^3,e)$$

Z est bien de colongueur au plus trois.

■

Chapitre 3

Schémas de n-uplets enrichis

Le but de ce chapitre est d'introduire les schémas $R_\eta(S)$ qui nous serviront à identifier les variétés de collisions, et de donner leurs premières propriétés. Nous allons définir des foncteurs $\mathcal{F}_\eta(S)$. Chacun de ces foncteurs sera représentable par un schéma $R_\eta(S)$ qui sera par définition un schéma de n-uplets enrichis de S.

La définition des foncteurs étant assez technique et difficile d'accès, nous commençons par un exemple pour expliquer le type de foncteurs dont nous avons besoin dans la section 3.1. La section 3.2 définit les foncteurs et montre qu'ils sont représentables. Enfin, la section 3.3 établit quelques propriétés des schémas $R_\eta(S)$ (morphismes d'oubli, actions de groupes ...).

3.1 Un exemple

Nous verrons lors de la classification des variétés de collisions que l'on peut identifier $Coll(3,2,1)(S)$ à une variété construite de la façon suivante. Pour un point $p=(p_1,p_2,p_3)$ de $F(S,3)$, on note

$$p_{ij} \text{ le point de } Hilb^2(S) \text{ paramétrant le sous-schéma } p_i \cup p_j \text{ de } S$$

$$p_{123} \text{ le point de } Hilb^3(S) \text{ paramétrant le sous-schéma } p_1 \cup p_2 \cup p_3 \text{ de } S$$

et

$$p^1 \text{ le point de } Hilb^2(Hilb^2(S)) \text{ paramétrant le sous-schéma } p_{12} \cup p_{13}$$

Il existe un morphisme f:

$$\begin{array}{rcl} F(S,3) & \rightarrow & Hilb^2(S) \times Hilb^2(S) \times Hilb^2(Hilb^2(S)) \times Hilb^3(S) \\ p=(p_1,p_2,p_3) & \mapsto & (p_{12}, p_{13}, p^1, p_{123}) \end{array}$$

et $Coll(3,2,1)(S)$ est isomorphe à l'adhérence $\overline{f(F(S,3))}$.

On peut donner une description géométrique de cette adhérence. Tous les points de l'image $f(F(S,3))$ satisfont certaines conditions d'incidence, à savoir:

- $[p_{12}] \subset [p_{123}]$
- $[p_{13}] \subset [p_{123}]$
- $[p^1] \subset p_{12} \cup p_{13}$
- $[p^1] \subset [p_{123}]$

(La dernière relation signifie que chacun des points de $[p^1]$ paramètre un schéma inclus dans le schéma de degré trois $[p_{123}]$). On peut en fait définir un lieu schématique

$$Z \subset Hilb^2(S) \times Hilb^2(S) \times Hilb^2(Hilb^2(S)) \times Hilb^3(S)$$

où ces relations d'incidence sont vérifiées et ce lieu schématique est exactement $\overline{f(F(S,3))}$. Alternativement, on peut définir un foncteur $\mathcal{F}_\eta(S)$ dont les k-points correspondent à la donnée de sous-schémas

$$[p_{12}], [p_{13}], [p^1], [p_{123}]$$

satisfaisant les relations d'incidence ci-dessus, et ce foncteur est représentable par $\overline{f(F(S,3))}$.

3.2 Enrichissements et foncteurs

A l'instar de l'exemple précédent, toutes les variétés de collisions s'identifient à une variété de la forme $\overline{f(F(S,3))}$ où f est un morphisme dans un produit:

$$f : F(S,3) \to H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_s$$

chacun des termes H_i du produit étant soit $Hilb^i(S)$, soit

$$Hilb^j(Hilb^i(S)) \quad (i, j \in \mathbb{N} - \{0\})$$

Chacune de ces variétés peut également être définie, soit par représentabilité d'un foncteur, soit comme lieu schématique d'incidence. Ces deux définitions sont bien plus maniables que la définition par adhérence.

Dans cette section, nous allons définir ce qu'est un enrichissement. Essentiellement, c'est un moyen de décrire un ensemble de termes $H_1, \ldots, H_s$. Pour chaque enrichissement η, nous définissons un morphisme f_η

$$f_\eta : F(S,3) \to H_\eta = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_s$$

et un foncteur $\mathcal{F}_\eta(S)$ qui sera représentable par un sous-schéma $R_\eta(S)$ de H_η, appelé schéma de triplets enrichis. Si $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ est un point de $f_\eta(F(S,3))$, les schémas $[p_1], \ldots, [p_s]$ satisfont des relations d'incidence naturelles. Le schéma $R_\eta(S)$ est le fermé de H_η où ces relations sont vérifiées. Bien sûr, on a l'inclusion:

$$\overline{f_\eta(F(S,3))} \subset R_\eta(S)$$

Malheureusement, même en mettant toutes les relations d'incidence possibles, il arrive que $R_\eta(S)$ et $\overline{f_\eta(F(S,3))}$ diffèrent. Les bons enrichissements, i.e. ceux pour lesquels $R_\eta(S)$ et $\overline{f_\eta(F(S,3))}$ coïncident sont les enrichissements admissibles.

En fait nous allons définir, non pas une notion de schémas de triplets enrichis de S, mais une notion de schéma de n-uplets enrichis d'un schéma quasi-projectif X. La restriction aux cas qui nous intéressent (X est une surface, $n = 3$) ne simplifieraient pas l'exposé et le rendraient même moins naturel.

3.2.1 Enrichissements et variétés associées

Soient X un schéma quasi-projectif et n un entier. Considérons l'ensemble $E := \{1, \ldots, n\}$ et, pour $p > 0$, notons $\Sigma_p(E)$ l'ensemble des p-uplets non ordonnés de E, i.e. l'ensemble des sous-ensembles de E de cardinal p . Pour tout p-uplet σ de $\Sigma_p(E)$, il existe un morphisme naturel f_σ

$$\begin{array}{rcl} F(X,n) & \xrightarrow{f_\sigma} & H_\sigma(X) := Hilb^p(X) \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \to & f_\sigma(x) \text{ avec } [f_\sigma(x)] = \cup_{j \in \sigma} x_j \end{array}$$

Appelons q-uplet de p-uplets un élément de $\Sigma_q(\Sigma_p(E)) =: \Sigma_{qp}(E)$. Pour tout q-uplet de p-uplets $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_q\}$, il existe un morphisme naturel

$$\begin{array}{rcl} f_\sigma : F(X,n) & \to & H_\sigma(X) := Hilb^q(Hilb^p(X)) =: Hilb^{q,p}(X) \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f_\sigma(x) \text{ avec } [f_\sigma(x)] = f_{\sigma_1}(x) \cup \cdots \cup f_{\sigma_q}(x) \end{array}$$

Plus généralement, on définit récursivement $\Sigma_{p_l, p_{l-1}, \ldots, p_1}(E)$ comme l'ensemble des sous-ensembles de cardinal p_l de $\Sigma_{p_{l-1}, p_{l-2}, \ldots, p_1}(E)$ i.e.

$$\Sigma_{p_l, p_{l-1}, p_{l-2}, \ldots, p_1}(E) = \Sigma_{p_l}(\Sigma_{p_{l-1}, p_{l-2}, \ldots, p_1}(E))$$

Un élément σ de $\Sigma_{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(E)$ sera appelé structure de $\{1,\dots,n\}$ de niveau l. Une structure sera une structure de niveau quelconque. A une structure $\sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{p_l}\}$ de niveau l sont associés le schéma

$$H_\sigma(X) := Hilb^{p_l}(Hilb^{p_{l-1}}(\dots(Hilb^{p_1}(X)))) =: Hilb^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X)$$

et le morphisme

$$\begin{array}{rcl} f_\sigma : F(X,n) & \to & H_\sigma(X) \\ x & \mapsto & f_\sigma(x) \text{ avec } [f_\sigma(x)] = f_{\sigma_1}(x)\cup f_{\sigma_2}(x)\cup\dots\cup f_{\sigma_{p_l}}(x) \end{array}$$

Remarque 40. *Il existe une bijection canonique entre $\Sigma_{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(E)$ et $\Sigma_{1,p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(E)$ et dans la suite, nous identifierons deux éléments qui se correspondent par cette bijection. Pour deux tels éléments σ et σ', on a une identification canonique*

$$i : H_\sigma(X) \to H_{\sigma'}(X)$$

et en outre $i\circ f_\sigma = f_{\sigma'}$, de sorte que les identifications sont compatibles avec les définitions précédentes.

On appelle enrichissement de $\{1,\dots,n\}$ (ou enrichissement tout court lorsque le contexte est clair) un ensemble

$$\eta = \{\sigma_1,\dots,\sigma_s\}$$

de structures de $\{1,\dots,n\}$ contenant la structure $\sigma=\{1,\dots,n\}$ de $\Sigma_n(E)$. Le niveau d'un enrichissement sera le plus grand des niveaux des σ_i.
Pour un tel enrichissement η, on définit

$$H_\eta(X) := H_{\sigma_1}(X)\times H_{\sigma_2}(X)\times\dots\times H_{\sigma_s}(X)$$

et le morphisme

$$f_\eta := f_{\sigma_1}\times f_{\sigma_2}\times\dots\times f_{\sigma_s} : F(X,n)\to H_\eta(X)$$

On note $\overline{f_\eta(F(X,n))}$ le plus petit sous-schéma fermé de $H_\eta(X)$ qui factorise f_η.

Au regard de la classification des variétés de tricollisions, les variétés qui nous intéressent sont les variétés de la forme $\overline{f_\eta(F(S,3))}$ pour un enrichissement η de $\{1,2,3\}$ de niveau inférieur ou égal à deux.

3.2.2 Définition des foncteurs

Soit $\sigma \in \Sigma_{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(E)$ une structure de $\{1,2,\dots,n\}$. Notons

$$H_\sigma^-(X) := Hilb^{p_{l-1},p_{l-2},\dots,p_1}(X)$$

avec la convention $Hilb^{p_{l-1},p_{l-2},\dots,p_1}(X) = X$ si $l=1$. Un point de $H_\sigma(X)$ correspond donc à un sous-schéma de colongueur p_l de $H_\sigma^-(X)$. Pour un enrichissement $\eta = \{\sigma_1,\dots,\sigma_s\}$ de $\{1,\dots,n\}$, on peut donner une idée du foncteur $\mathcal{F}_\eta(X)$. C'est un foncteur des k-schémas dans les ensembles. Si B est un schéma, un B-point de $\mathcal{F}_\eta(X)$ correspond à la donnée de fermés

$$Z_1 \subset B \times H_{\sigma_1}^-(X), Z_2 \subset B \times H_{\sigma_2}^-(X), \dots, Z_s \subset B \times H_{\sigma_s}^-(X)$$

satisfaisant des relations d'incidence. Pour expliciter ces relations d'incidence, nous allons définir des relations d'incidence sur les structures et des relations d'incidence sur les fermés Z_i. A chaque fois que des structures $(\sigma_{i_1},\dots,\sigma_{i_r})$ vérifieront une relation d'incidence, on demandera aux fermés $(Z_{i_1},\dots,Z_{i_r})$ de vérifier une relation d'incidence correspondante.

3.2.3 Relations d'incidence sur les structures

Définition de relations de recouvrement sur les structures

Donnons nous des entiers $p_1,\dots,p_l$, $n_1,\dots,n_r$ et des structures $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ de même niveau $l+1$ avec

$$\sigma_i \in \Sigma_{n_i,p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(E)$$

En regardant σ_i comme un ensemble de structures de niveau l, on a

$$\sigma_i \subset \Sigma_{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(E)$$

et à ce titre la relation

$$\sigma_1 \subset \ (\sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \dots \cup \sigma_r)$$

prend du sens. On dira que σ_1 est recouverte par les structures $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_r$.

Définition d'une relation d'inclusion sur les structures

Donnons nous des entiers $p_1,\dots,p_{k+1}$, $l_1,\dots,l_r$ et des structures σ_1 et σ_2 de niveaux respectifs $k+1$ et $k+r$ avec

$$\sigma_1 \in \Sigma_{p_{k+1},p_k,\dots,p_1}(E)$$

et

$$\sigma_2 \in \Sigma_{l_r,l_{r-1},\ldots,l_1,p_k,\ldots,p_1}(E)$$

Nous allons définir par récurrence sur $r \geq 1$ la relation d'inclusion $\sigma_2 \subset \sigma_1$.
Si $r = 1$, σ_1 et σ_2 sont deux sous-ensembles de $\Sigma_{p_k,\ldots,p_1}$ et le sens de l'inclusion est évident.
Si $r > 1$, σ_2 est un sous-ensemble de $\Sigma_{l_{r-1},\ldots,l_1,p_k,\ldots,p_1}(E)$. Notons Z le sous-ensemble de $\Sigma_{l_{r-1},\ldots,l_1,p_k,\ldots,p_1}(E)$ formé par les $\sigma \subset \sigma_1$. On dira que σ_2 est inclus dans σ_1 si $\sigma_2 \subset Z$.

3.2.4 Relations d'incidence sur les schémas

Nous allons donner une notion d'inclusion d'un schéma dans un autre schéma généralisant la définition classique et une notion de recouvrement d'un schéma par d'autres schémas. Nous donnons ces définitions en famille pour pouvoir les incorporer dans des manipulations de foncteurs.

Relation d'inclusion sur les schémas

Commençons par la relation d'inclusion simple bien connue

Proposition 41 (existence d'un schéma d'incidence).
Soient Z_1 un sous-schéma fermé de $B \times X$ plat et fini sur B et $Z_2 \subset B \times X$ un fermé quelconque. Il existe un sous-schéma fermé B' de B satisfaisant la propriété universelle suivante. Tout morphisme $Y \to B$ pour lequel on a l'inclusion

$$Z_1 \times_B Y \subset Z_2 \times_B Y$$

se factorise de façon unique par B':

$$Y \to B' \to B$$

En outre, B' peut être défini comme le plus grand sous-schéma fermé de B pour lequel l'inclusion

$$Z_1 \times_B B' \subset Z_2 \times_B B'$$

est vérifiée. On le notera $Inc(Z_1, Z_2)$.

Démonstration: voir [Kee]

∎

Soient deux sous-schémas fermés Z_1 et Z_2 de $B \times Hilb^{p_l,p_{l-1},\ldots,p_1}(X)$ et $B \times X$ tels que Z_1 soit plat et fini sur B. Nous allons définir par récurrence sur $l \geq 0$ le sous-schéma fermé $\underline{Inc}(Z_1, Z_2)$ de B formé par les b de B pour lesquels on a l'inclusion $(Z_1)_b \subset (Z_2)_b$ entre les fibres au dessus de b.

Si $l = 0$, on a par définition $Hilb^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X) = X$. On définit $\underline{Inc}(Z_1, Z_2)$ par $\underline{Inc}(Z_1, Z_2) = Inc(Z_1, Z_2)$.

Si $l \geq 1$, on dispose d'un fermé

$$Z_2' \hookrightarrow (B \times Hilb^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X)) \ \times \ X$$

qui est l'image inverse du fermé Z_2 par la projection:

$$(B \times Hilb^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X)) \ \times \ X \to B \times X$$

On dispose également d'un fermé Z_1'

$$Z_1' \hookrightarrow (B \times Hilb^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X)) \ \times \ Hilb^{p_{l-1},p_{l-2},\dots,p_1}(X)$$

qui est l'image inverse de la famille universelle au dessus de $Hilb^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X)$ par la projection sur les deux derniers facteurs. On peut par récurrence définir le lieu

$$\underline{Inc}(Z_1', Z_2') \hookrightarrow \quad B \times Hilb^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X)$$

On définit alors le sous-schéma $\underline{Inc}(Z_1, Z_2)$ de B par

$$\underline{Inc}(Z_1, Z_2) := Inc(Z_1, \underline{Inc}(Z_1', Z_2'))$$

Notation 42. *Pour deux sous-schémas fermés Z_1 et Z_2 comme ci-dessus, on utilisera la notation $Z_1 \subset Z_2$ pour signifier $\underline{Inc}(Z_1, Z_2) = B$.*

On démontre facilement par récurrence la propriété universelle suivante en utilisant la proposition 41.

Proposition 43. *Soient Z_1 un sous-schéma fermé de $B \times Hilb^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X)$ plat et fini sur B et Z_2 un fermé quelconque de $B \times X$. Le sous-schéma $\underline{Inc}(Z_1, Z_2)$ de B satisfait la propriété universelle suivante. Tout morphisme $Y \to B$ pour lequel on a l'inclusion*

$$Z_1 \times_B Y \subset Z_2 \times_B Y$$

se factorise de façon unique par $\underline{Inc}(Z_1, Z_2)$:

$$Y \to \underline{Inc}(Z_1, Z_2) \to B$$

En outre, $\underline{Inc}(Z_1, Z_2)$ peut être défini comme le plus grand fermé B' de B pour lequel l'inclusion

$$Z_1 \times_B B' \subset Z_2 \times_B B'$$

est vérifiée.

Relation de recouvrement sur les schémas:

Soient B un k-schéma, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ des sous-schémas fermés de $B \times X$ avec Z_1 plat et fini sur B.

Notation 44. *Le fermé $Z_2.Z_3.Z_4 \ldots Z_r$ sera par définition le fermé de $B \times X$ d'idéal le produit $I_2.I_3.I_4 \ldots I_r$ des idéaux I_i définissant les Z_i.*

Définition 45. *On dira que Z_1 est recouvert par $Z_2, Z_3, \ldots, Z_r$ si on a l'inclusion $Z_1 \subset Z_2.Z_3 \ldots Z_r$*

Bien sûr, on peut définir par la proposition 41 le lieu $Inc(Z_1, Z_2.Z_3 \ldots Z_r)$ de B au dessus duquel on a l'inclusion $Z_1 \subset Z_2.Z_3 \ldots Z_r$ et ce schéma vérifie la propriété universelle correspondante.

3.2.5 Définition des foncteurs (suite et fin).

Définition 46. *Soit $\eta = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ un enrichissement de $\{1, \ldots, n\}$. On note $\mathcal{F}_\eta(X)$ le foncteurs des k-schémas dans les ensembles, qui à un k-schéma B associe l'ensemble des données $(Z_1, \ldots, Z_s)$ telles que:*

- *Z_i est un sous-schéma fermé de $B \times H^-_{\sigma_i}(X)$ plat et fini sur B. Les colongueurs des fibres sont telles que Z_i définit un morphisme $B \to H_{\sigma_i}(X)$*

- *pour tout r-uplet $(i_1, \ldots, i_r)$ vérifiant $\sigma_{i_1} \subset \sigma_{i_2} \cup \sigma_{i_3} \cup \cdots \cup \sigma_{i_r}$, on a l'inclusion $Z_{i_1} \subset Z_{i_2}.Z_{i_3} \ldots Z_{i_r}$*

- *pour tout couple (i_1, i_2) vérifiant $\sigma_{i_1} \subset \sigma_{i_2}$, on a l'inclusion $Z_{i_1} \subset Z_{i_2}$*

Notation 47. *Pour un enrichissement $\eta = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$, on note U_i le fermé de $H_\eta(X) \times H^-_{\sigma_i}(X)$, plat au dessus de*

$$H_\eta(X) = H_{\sigma_1}(X) \times \ldots \times H_{\sigma_s}(X)$$

correspondant à la famille universelle définie par $H_{\sigma_i}(X)$. Pour tout r-uplet $(i_1, \ldots, i_r)$ vérifiant $\sigma_{i_1} \subset \sigma_{i_2} \cup \sigma_{i_3} \cup \cdots \cup \sigma_{i_r}$, on dispose du fermé

$$Inc(U_{i_1}, U_{i_2}.U_{i_3} \ldots U_{i_r}) \subset H_\eta(X)$$

Pour tout couple (i_1, i_2) vérifiant $\sigma_{i_1} \subset \sigma_{i_2}$, on dispose du fermé

$$\underline{Inc}(U_{i_1}, U_{i_2}) \subset H_\eta(X)$$

On note $R_\eta(X)$ le fermé

$$\Big(\bigcap_{\sigma_{i_1}\subset\sigma_{i_2}} \underline{Inc}(U_{i_1},U_{i_2})\Big) \cap \Big(\bigcap_{\sigma_{i_1}\subset\sigma_{i_2}\cup\sigma_{i_3}\cup\cdots\cup\sigma_{i_r}} Inc(U_{i_1},U_{i_2}.U_{i_3}\ldots U_{i_r})\Big)$$

de $H_\eta(X)$

Proposition 48. *Le foncteur $\mathcal{F}_\eta(X)$ est représentable par le sous-schéma $R_\eta(X)$ de $H_\eta(X)$.*

Démonstration: soit B un k-schéma et $Z_1,\ldots,Z_s$ un élément de l'ensemble $\mathcal{F}_\eta(X)(B)$. On veut montrer qu'il existe un unique morphisme $B\to R_\eta(X)$ tel que, pour tout i, $Z_i = U_i\times_{R_\eta(X)} B$. Par propriété universelle des schémas de Hilbert et du produit, il existe un unique morphisme $B\to H_\eta(X)$ tel que $Z_i = U_i\times_{H_\eta(X)} B$. Ce morphisme se factorise de façon unique par $R_\eta(X)$ par propriété universelle des schémas d'incidence donc $Z_i = U_i\times_{R_\eta(X)} B$.

∎

Nous avons introduit les schémas $R_\eta(X)$ pour avoir une définition géométrique de l'adhérence $\overline{f_\eta(F(X,n))}$. Les points $p=(p_1,p_2,\ldots,p_s)$ de $f_\eta(F(X,n))$ sont des points de $R_\eta(X)$ car les schémas associés $[p_1],[p_2],\ldots,[p_s]$ satisfont les relations d'incidence voulues. On a donc toujours

$$\overline{f_\eta(F(X,n))}\subset R_\eta(X)$$

Malheureusement, on n'a pas égalité en général. On voudrait que cette égalité soit réalisée, au moins dans le cas où X est une variété lisse irréductible.

Définition 49. *Un enrichissement η est dit admissible si pour toute variété lisse irréductible X, on a l'égalité $R_\eta(X)=\overline{f_\eta(F(X,n))}$.*

3.3 Premières propriétés des schémas $R_\eta(X)$

3.3.1 Changements de base

Dans la suite de cette thèse, nous considérerons le plus souvent le cas où la variété X est lisse irréductible. La proposition suivante explique que, dans le cas où X n'est pas lisse irréductible, le schéma $R_\eta(X)$ peut se comprendre moyennant l'immersion de X dans une variété lisse irréductible.

Proposition 50. *Soit Y un sous-schéma localement fermé d'un schéma X. Les schémas $R_\eta(Y)$ et $R_\eta(X)\times_{Hilb^n(X)}Hilb^n(Y)$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration: vérifions que ces deux schémas représentent le même foncteur.
Posons $\eta=\{\sigma_1,\dots,\sigma_s,\}$ où σ_1 est la structure $\{1,\dots,n\}$ de $\Sigma_n(E)$.
Notons $\mathcal{F}_\eta(Y)=: F$ et G les foncteurs associés à

$$R_\eta(Y) \text{ et } R_\eta(X)\times_{Hilb^n(X)} Hilb^n(Y)$$

Soit B un k-schéma. On veut établir une bijection canonique entre $F(B)$ et $G(B)$.

Un élément de $F(B)$ correspond à la donnée de fermés Z_i de $B\times H^-_{\sigma_i}(Y)$ soumis à des relations d'incidence.
Un élément de $G(B)$ correspond à la donnée de fermés Z_i de $B\times H^-_{\sigma_i}(X)$, d'un fermé Z de $B\times Y$ soumis à des relations d'incidence. Les relations d'incidence entre les Z_i sont formellement les mêmes que pour les éléments de $F(B)$. On demande en outre que $Z_1\subset B\times X$ s'identifie à $Z\subset B\times Y$ moyennant l'immersion de Y dans X. On a donc $Z_1\subset B\times Y$. Comme par ailleurs, on a toujours la relation $Z_i\subset Z_1$, on a $Z_i\subset B\times Y$. Enfin, $H^-_{\sigma_i}(Y)$ est un sous-schéma de $H^-_{\sigma_i}(X)$ et tout fermé W de $B\times H^-_{\sigma_i}(X)$ tel que $W\subset B\times Y$ est en fait un sous-schéma fermé de $B\times H^-_{\sigma_i}(Y)$. Dans notre cas, cela veut dire que les Z_i de $B\times H^-_{\sigma_i}(X)$ s'identifient canoniquement à des fermés Z_i de $B\times H^-_{\sigma_i}(Y)$. L'identification de $F(B)$ et $G(B)$ en découle.

■

3.3.2 Morphismes d'oubli

Les définitions des différents schémas de n-uplets enrichis $R_\eta(X)$ sont très similaires. En conséquence, il existe de nombreuses interactions entre les géométries de ces différents schémas. En voici le premier exemple.

Proposition 51. *Soient η et η' deux enrichissements avec $\eta\subset\eta'$. Il existe un morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta}: R_{\eta'}(X)\to R_\eta(X)$. De plus, $p_{\eta',\eta}\circ f_{\eta'}=f_\eta$.*

Démonstration: écrivons $\eta=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r\}$ et $\eta'=\eta\cup\{\sigma_{r+1},\dots,\sigma_s\}$. Par propriété universelle, le schéma $R_{\eta'}(X)$ est muni de fermés universels U_i $(i\le s)$

$$U_i\hookrightarrow R_{\eta'}(X)\times H^-_{\sigma_i}(X)$$

Par propriété universelle de $R_\eta(X)$, les fermés universels U_i $(i\le r)$ définissent le morphisme $p_{\eta',\eta}$ voulu.

L'égalité $p_{\eta',\eta} \circ f_{\eta'} = f_\eta$ peut être vue par exemple point par point. Le morphisme $p_{\eta',\eta}$ envoyant un point $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ de

$$R_{\eta'}(X) \subset H_{\sigma_1}(X) \times H_{\sigma_2}(X) \times \ldots \times H_{\sigma_s}(X)$$

sur le point $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ de

$$R_\eta(X) \subset H_{\sigma_1}(X) \times H_{\sigma_2}(X) \times \ldots \times H_{\sigma_r}(X)$$

l'égalité est évidente en utilisant les définitions de f_η et $f_{\eta'}$.

■

La proposition suivante qui nous dit que, sous certaines conditions, le morphisme d'oubli est un isomorphisme, sera appliquée à de nombreuses reprises lors de la classification des schémas de triplets. Elle repose sur l'existence d'un résiduel.

Proposition 52. *Soit η un enrichissement admissible et $\eta' = \eta \cup \sigma$ un autre enrichissement. Supposons que η contienne deux enrichissements σ_1 et σ_2 de même niveau que σ vérifiant*

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \in & \Sigma_{1,p_{l-1},p_{l-2},\ldots,p_1}(E) = \Sigma_{p_{l-1},p_{l-2},\ldots,p_1}(E) \\ \sigma_1 & \in & \Sigma_{p_l,p_{l-1},,p_{l-2},\ldots,p_1}(E) \\ \sigma_2 & \in & \Sigma_{p_l-1,p_{l-1},,p_{l-2},\ldots,p_1}(E) \\ \sigma_1 & = & \sigma_2 \cup \{\sigma\} \end{array}$$

alors pour tout X, le morphisme d'oubli

$$p_{\eta',\eta} : R_{\eta'}(X) \to R_\eta(X)$$

est un isomorphisme. En particulier η' est admissible.

Lemme 53 (existence d'une application résiduelle).
Soient F_1 et F_2 deux familles de $B \times X$ plates et finies sur une base B vérifiant $F_1 \subset F_2$. Supposons que les polynômes de Hilbert des fibres de F_1 et F_2 soient respectivement p et $p+1$. Il existe un unique morphisme $res(F_1, F_2) : B \to X$ dont le graphe $Res(F_1, F_2)$ vérifie

$$I(F_1).I(Res(F_1, F_2)) \subset I(F_2)$$

On dira que $res(F_1, F_2)$ est l'application résiduelle définie par l'inclusion $F_1 \subset F_2$. En particulier, pour deux sous-schémas de X de dimension zéro Y et Y' vérifiant $Y \subset Y'$ et $col(Y') = col(Y)+1$, il existe un schéma $Res(Y, Y')$.

Démonstration du lemme: montrons que le faisceau d'idéaux $(I(F_2) : I(F_1))$ définit un fermé Z de $B \times X$, plat sur B, dont la fibre au dessus de tout point b de B est de degré un. Le problème est local sur B qu'on peut supposer affine. Les schémas F_1 et F_2 sont alors également affines. Puisqu'on a l'inclusion

$$(I(F_2) : I(F_1)) \supset I(F_2)$$

le sous-schéma Z défini par $(I(F_2) : I(F_1))$ est un sous-schéma fermé de F_2. L'idéal de $\mathcal{O}_{B\times X}/I(F_2)$ définissant Z comme sous-schéma de F_2 est $(I(F_2) : I(F_1))/I(F_2) = (0 : (I(F_1)/I(F_2)))$. De la suite exacte

$$0 \to I(F_1)/I(F_2) \to \Gamma(F_2) \to \Gamma(F_1) \to 0$$

on déduit que $I(F_1)/I(F_2)$ est un $\Gamma(B)$-module localement libre de rang un et, quitte à restreindre B, on peut supposer qu'il est libre engendré par un élément f de $\Gamma(F_2)$. Le diagramme commutatif à ligne exacte

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Gamma(Z) \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 0 : (I(F_1)/I(F_2)) \arrow[r] & \Gamma(F_2) \arrow[ur] \arrow[rr, "\times f"] & & \Gamma(F_2)
\end{tikzcd}$$

montre que $\Gamma(Z) = \Gamma(F_2)/(0 : I(F_1)/I(F_2))$ s'identifie au sous $\Gamma(B)$-module de $\Gamma(F_2)$ formé par les multiples de f. Finalement la suite exacte

$$0 \to \Gamma(Z) \to \Gamma(F_2) \to \Gamma(F_1) \to 0$$

montre que $\Gamma(Z)$ est un $\Gamma(B)$-module plat, donc localement libre, de rang un. L'inclusion de Z dans $B \times X$ induit un morphisme de B dans X ayant la propriété voulue.

Soit $res(F_1, F_2)$ un morphisme ayant la propriété voulue. On a l'inclusion $I(Res(F_1, F_2)) \subset (I(F_2) : I(F_1))$. Deux familles, plates et finies de degré un sur la base et incluses l'une dans l'autre sont nécessairement égales donc $I(Res(F_1, F_2)) = (I(F_2) : I(F_1))$.

■

Remarque 54. *Dans [LB], Le Barz a montré l'existence d'un résiduel pour deux sous-schémas Y et Y' de dimension zéro de X. Le lemme est une version relative du résultat de Le Barz*

Démonstration de la proposition 52: Quitte à réaliser X comme sous-schéma d'une variété lisse irréductible et à utiliser la proposition 50, on peut supposer X lisse irréductible. Posons $\eta = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s\}$. Le schéma $R_\eta(X)$ est muni de fermés universels $U_1, U_2, \dots, U_s$. On définit le fermé U_σ de $R_\eta(X) \times H_\sigma^-(X)$ par l'idéal

$$I(U_\sigma) := (I(U_1) : I(U_2))$$

On vérifie au dessus d'un point général de $R_\eta(X)$ que les fibres des fermés universels

$$U_1, U_2, \dots, U_s,\ U_\sigma$$

satisfont les conditions d'incidence voulues et, par propriété universelle de $R_{\eta'}(X)$, définissent un morphisme

$$p_{\eta,\eta'} : R_\eta(X) \to R_{\eta'}(X)$$

Les morphismes $p_{\eta,\eta'}$ et $p_{\eta',\eta}$ sont par construction inverses l'un de l'autre.

■

3.3.3 Actions de groupe

On dispose d'une action naturelle du groupe symétrique S_n sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Cette action induit une action de S_n sur l'ensemble des structures de $\{1, \dots, n\}$ par permutation des indices, puis une action sur l'ensemble des enrichissements par permutation des structures. On a la proposition évidente suivante.

Proposition 55. *Soient η et η' deux enrichissements de $\{1, \dots, n\}$ qui sont dans la même orbite pour l'action de S_n. Alors les schémas $R_\eta(X)$ et $R_{\eta'}(X)$ sont isomorphes.*

Proposition 56. *Soit η un enrichissement et $G_\eta \subset S_n$ son stabilisateur pour l'action de S_n sur l'ensemble des enrichissements. Pour tout X, il existe une action naturelle de G_η sur le schéma $R_\eta(X)$*

Démonstration: soit g un élément de G_η et σ_i une structure de η. On a l'égalité

$$H_{\sigma_i}^-(X) = H_{g.\sigma_i}^-(X)$$

Le schéma $R_\eta(X)$ est muni de fermés universels

$$U_{\sigma_i} \subset R_\eta(X) \times H_{\sigma_i}^-(X)$$

Les fermés

$$U_{g.\sigma_i} \subset R_\eta(X) \times H_{\sigma_i}^-(X)$$

définissent un morphisme

$$\varphi_g : R_\eta(X) \to R_\eta(X)$$

qui est un isomorphisme d'inverse $\varphi_{g^{-1}}$. L'action de G_η sur $R_\eta(X)$ est définie par

$$\begin{array}{rcl} G_\eta & \to & Aut(X) \\ g & \mapsto & \varphi_g \end{array}$$

■

Chapitre 4

Schémas de doublets et de triplets enrichis

Alors que le chapitre précédent traitait assez généralement des schémas de n-uplets enrichis, ce chapitre ne concerne que les schémas $R_\eta(X)$ de n-uplets dont nous aurons besoin pour la classification des variétés de collisions. On y met en évidence les points de géométrie dont nous aurons besoin pour cette classification. De tels schémas correspondent aux enrichissements η de $\{1,2\}$ et aux enrichissements η de $\{1,2,3\}$ de niveau inférieur ou égal à deux.

- La section 4.1 regroupe des notations utiles pour ce chapitre et le suivant

- La section 4.2 traite des schémas de doublets enrichis (et c'est la seule)

- La section 4.3 aborde quelques points de géométrie des schémas de triplets $R_\eta(X)$: connexité, stratification, caractérisation géométrique des points "spéciaux"et généraux

- La classification des enrichissements de $\{1,2,3\}$ de niveau inférieur ou égal à deux et admissibles et des schémas associés est réalisée dans la section 4.4

- Dans la section 4.5, on compare nos constructions aux constructions classiques de Schubert-Semple, Kleiman et Fulton-MacPherson

- Enfin, dans la section 4.6, on détermine les quotients des schémas $R_\eta(X)$ par les actions de groupe naturelles

4.1 Notations

4.1.1 Enrichissements de $\{1,2,3\}$ de niveau ≤ 2

Notons $E = \{1,2,3\}$. On note les structures de niveau un de E à l'aide d'indices ($\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$):

$$\sigma_i = \{i\} \in \Sigma_1(E)$$

$$\sigma_{ij} = \{i,j\} \in \Sigma_2(E)$$

$$\sigma_{123} = \{1,2,3\} \in \Sigma_3(E)$$

On note les structures de niveau deux à l'aide d'exposants:

$$\sigma^k = \{\sigma_{ik}, \sigma_{jk}\} \in \Sigma_{2,2}(E)$$

$$\sigma^{123} = \{\sigma_{12,}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} \in \Sigma_{3,2}(E)$$

On représente les enrichissements avec des indices et des exposants, suivant les structures contenues dans l'enrichissement. Par exemple, l'enrichissement $\eta^{1,123}_{1,12}$ contiendra les structures $\sigma_1, \sigma_{12}, \sigma^1, \sigma^{123}$. Plus généralement,

$$\eta^{a_1,a_2,\ldots,a_r}_{b_1,b_2,\ldots,b_s} := \{\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \ldots, \sigma^{a_r}, \sigma_{b_1}, \sigma_{b_2}, \ldots, \sigma_{b_s}\}$$

On utilisera également cette notation avec indices et exposants pour les schémas $R_\eta(X)$ et $H_\eta(X)$:

$$R^{a_1,a_2,\ldots,a_r}_{b_1,b_2,\ldots,b_s}(X) := R_{\eta^{a_1,a_2,\ldots,a_r}_{b_1,b_2,\ldots,b_s}}(X)$$

$$H^{a_1,a_2,\ldots,a_r}_{b_1,b_2,\ldots,b_s}(X) := H_{\eta^{a_1,a_2,\ldots,a_r}_{b_1,b_2,\ldots,b_s}}(X)$$

Parmi les enrichissements de niveau inférieur ou égal à deux, il y en a un maximum, celui qui contient toutes les structures de niveau inférieur ou égal à deux. On le notera η_{max} et $R_{max}(X)$ le schéma de triplets de X correspondant.

4.1.2 Enrichissements de $\{1,2\}$

Les structures de niveau un de $\{1,2\}$ sont $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$. En fait, on a déjà ainsi toutes les structures.

Proposition 57. *Toutes les structures de $\{1,2\}$ s'identifient à une structure de niveau un au sens de la remarque 40*

Démonstration: on montre par une récurrence facile sur l que:

- $\Sigma_{p_l,p_{l-1},\ldots,p_1}(\{1,2\})$ est l'ensemble vide sauf si tous les p_i valent un, ou si tous sauf un sont égaux à un et le dernier vaut deux

- dans le premier cas $\Sigma_{1,1,\ldots,1}(\{1,2\})$ est de cardinal deux, et, dans le deuxième cas, $\Sigma_{1,1,1,\ldots,1,2,1,1,\ldots,1}(\{1,2\})$ est de cardinal un

Dans le premier cas, un élément de $\Sigma_{1,1,\ldots,1}(\{1,2\})$ s'identifie à un élément de $\Sigma_1\{1,2\}$ et dans le deuxième, un élément de $\Sigma_{1,1,1,\ldots,1,2,1,1,\ldots,1}(\{1,2\})$ s'identifie à un élément de $\Sigma_2(\{1,2\})$.

■

4.2 Les schémas de doublets enrichis

D'après la proposition précédente, il existe trois structures de $\{1,2\}$, à savoir $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$. Il existe alors quatre enrichissements de $\{1,2\}$:

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= \{\sigma_{12}\} \\ \eta_{1,12} &= \{\sigma_1, \sigma_{12}\} \\ \eta_{2,12} &= \{\sigma_2, \sigma_{12}\} \\ \eta_{1,2,12} &= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}\} \end{aligned}$$

Le foncteur $\mathcal{F}_{\eta_{12}}(X)$ est représentable par $R_{12}(X) = Hilb^2(X)$. Le foncteur $\mathcal{F}_{\eta_{1,12}}(X)$ est représentable par le lieu de $X \times Hilb^2(X)$ formé par les couples (p,d) pour lesquels on a l'inclusion $p \subset [d]$. Il est bien connu que ce schéma s'identifie à l'eclaté de $X \times X$ le long de la diagonale quand X est lisse. Les schémas $R_{2,12}(X)$ et $R_{1,2,12}(X)$ s'identifient à $R_{1,12}(X)$ d'après les propositions 52 et 55. Nous avons donc démontré la proposition suivante:

Proposition 58. *Soit X une variété lisse. Il existe exactement deux schémas de doublets enrichis de X: $Hilb^2(X)$ et l'eclaté de $X \times X$ le long de la diagonale.*

La suite de cette section établit une carte locale de $R_{1,2,12}(X)$ dans le cas où X est une surface. Nous aurons besoin de cette carte lors de la classification des variétés de collisions.

Puisque

$$R_{1,2,12}(X) \subset H_1(X) \times H_2(X) \times H_{12}(X)$$

il existe trois fermés universels U_1, U_2, U_{12} de $R_{1,2,12}(X) \times X$ induits par chacun des facteurs.

Définition 59. *Soit $\hat{d} = (p,p,d)$ un point de $R_{1,2,12}(X)$ tel que $[d]$ soit ponctuel. Donnons nous un schéma affine $[[\hat{d}]]$ et trois fermés F_1, F_2, F_{12} de $[[\hat{d}]] \times Spec\, k[[x,y]]$ plats et finis sur $[[\hat{d}]]$. S'il existe deux morphismes f et g réalisant $Spec\, k[[x,y]]$ et $[[\hat{d}]]$ comme voisinages formels de p et $\hat{d}$*

$$f : Spec\, k[[x,y]] \to X$$

$$g : [[\hat{d}]] \to R_{1,2,12}(X)$$

et si, moyennant $Id \times f$, les fermés F_1, F_2, F_{12} s'identifient aux images inverses de U_1, U_2, U_{12} par

$$g \times Id : \; [[\hat{d}]] \times X \to R_{1,2,12}(X) \times X$$

on dira que $([[\hat{d}]], F_1, F_2, F_{12})$ définissent une carte locale de $R_{1,2,12}(X)$ en $\hat{d}$.

Proposition 60. *Soit $\hat{d} = (p,p,d)$ un point de $R_{1,2,12}(X)$ avec $[d]$ ponctuel. Le voisinage formel de $\hat{d}$ dans $R_{1,2,12}(X)$ est isomorphe à $Spec\, k[[a,b,c,e]]$. Les fermés U_1, U_2 et U_{12} de $Spec\, k[[a,b,c,e]] \times Spec\, k[[x,y]]$ dont les idéaux sont:*

- $I_1 = (x+a, y+cx+e)$.
- $I_2 = (x+b, y+cx+e)$.
- $I_{12} = ((x+a)(x+b), y+cx+e)$.

définissent une carte locale de $R_{1,2,12}(X)$ en $\hat{d}$.

Démonstration: par un bon choix du voisinage formel $f : Spec\, k[[x,y]] \to X$, on peut supposer que les sous-schémas p et $[d]$ de X ont pour équations $I(p) = (x,y)$ et $I([d]) = (x^2, y)$ dans $Spec\, k[[x,y]]$. Posons $a = -x, a' = -y$. Le voisinage formel de p dans X est isomorphe à $Spec\ k[[a,a']]$. L'idéal universel définissant la diagonale de $X \times X$ est

$$I_1 = (x+a, y+a')$$

D'après l'exemple 36, le voisinage formel de d dans $Hilb^2(X)$ est isomorphe à $Spec\, k[[b', b'', c, e]]$ et l'idéal universel définissant le doublet est

$$I_{12} = (x^2 + b'x + b'', y + cx + e)$$

Le voisinage formel de (p,d) dans $X \times Hilb^2(X)$ est isomorphe à

$$Spec\, k[[a, a', b', b'', c, e]]$$

tandis que le voisinage formel de (p,d) dans $R_{1,12}(X)$ est le fermé Z de $Spec\ k[[a,a',b',b'',c,e]]$ où est satisfaite la relation d'incidence $p \subset [d]$. Montrons que ce fermé est défini par les équations

$$a' = e - ac \text{ et } b'' = -a^2 + ab'$$

D'après le chapitre 2, I_1 et I_{12}, qui sont à priori des idéaux de

$$k[[a,a',b',b'',c,e]] \otimes k[[x,y]]$$

peuvent être vus comme des idéaux de

$$k[[a,a',b',b'',c,e]] \otimes k[x,y]$$

sans que cela affecte le calcul du lieu d'incidence. Les éléments $x+a, y+a'$ forment une base de Gröbner de I_1 d'après la proposition 21. Divisons chacun des générateurs de I_{12} par cette base de Gröbner unitaire.

$$x^2 + b'x + b'' = (x + (b'-a))(x+a) + \underbrace{a^2 + b'' - b'a}_{reste}$$

$$y + cx + e = (y + a') + c(x+a) + \underbrace{e - a' - ac}_{reste}$$

On a donc
$$I(Z) = (a^2 + b'' - b'a, e - a' - ac)$$
Le voisinage formel de $\hat{d}$ dans $R_{1,12}(X)$ est le sous-schéma de

$$Spec\ k[[a,a',b',b'',c,e]]$$

défini par les équations $b'' = b'a - a^2$ et $a' = e - ac$. Il est donc isomorphe à $Spec\ k[[a,b',c,e]]$

Les idéaux I_1 et I_{12} sont alors respectivement

$$I_1 = (x+a, y+cx+e)$$

et
$$I_{12} = ((x+a)(x+b'-a), y+cx+e)$$
En effectuant le changement de variable $b = b' - a$, on obtient les équations voulues des idéaux universels I_1 et I_{12}. Enfin, puisque l'idéal I_2 vérifie

$$I_2 I_1 \subset I_{12} \text{ et } I_{12} \subset I_2$$

I_2 est bien l'idéal définissant le résiduel de p dans $[d]$ (voir la proposition 53).

■

4.3 Géométrie des schémas de triplets enrichis

Dans cette section, nous ne considérons que des enrichissements η de $\{1, 2, 3\}$ de niveau au plus deux.

Dans la suite de cette thèse, nous aurons régulièrement à vérifier des propriétés $P(x)$ dépendant d'un point x de $R_\eta(X)$. Par des arguments de semi-continuité, on ne vérifiera P que sur les points "généraux" et sur les points "spéciaux" de $R_\eta(X)$. La proposition suivante et sa démonstration donnent une description géométrique des points spéciaux.

Proposition 61. *Soit X une variété lisse de dimension au moins deux. Soient x un point de X, $[d]$ un sous-schéma ponctuel de X de colongueur deux contenant x. Soit $[t]$ un sous-schéma ponctuel de colongueur trois de X contenant $[d]$ isomorphe à Spec $k[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ en tant que schéma abstrait. Il existe un point $q(x, d, t)$ de $R_\eta(X)$ entièrement déterminé par x, d et t.*

Démonstration: nous allons exhiber un point de $R_{\eta_{max}}(X)$ déterminé par x, d et t. L'image de ce point par le morphisme d'oubli $p_{\eta_{max},\eta}$ sera le point $q(x, d, t)$. Rappelons nous que $R_{\eta_{max}}(X)$ est un sous-schéma de

$$\begin{aligned} H_1(X) \times H_2(X) &\times H_3(X) \times H_{12}(X) \times H_{13}(X) \times H_{23}(X) \\ &\times H^1(X) \times H^2(X) \times H^3(X) \times H^{123}(X) \times H_{123}(X) \end{aligned}$$

Les doublets inclus dans le triplet $[t]$ forment un sous-schéma de $Hilb^2(X)$ isomorphe à $\mathbb{P}^1$, et donc un doublet de doublets inclus dans le triplet correspond à un sous-schéma de degré deux du $\mathbb{P}^1$. Le doublet d inclus dans $[t]$ est un point du $\mathbb{P}^1$. Il existe un unique sous-schéma de degré deux de $\mathbb{P}^1$ supporté par d. On note d^2 le point de $Hilb^{2,2}(X)$ associé. On a par construction $[d^2] \subset [t]$. De même, on peut définir un point d^3 de $Hilb^{3,2}(X)$ pour lequel $[d^3] \subset [t]$. Considérons alors le point

$$(x, x, x, d, d, d, d^2, d^2, d^2, d^3, t)$$

de

$$\begin{aligned} H_1(X) \times H_2(X) &\times H_3(X) \times H_{12}(X) \times H_{13}(X) \times H_{23}(X) \\ &\times H^1(X) \times H^2(X) \times H^3(X) \times H^{123}(X) \times H_{123}(X) \end{aligned}$$

Vérifions que c'est bien un point de $R_{\eta_{max}}(X)$, i.e. que toutes les relations d'incidence sont satisfaites. Les relations à vérifier sont:

1. $x \subset [d]$ et $d \subset [d^2] \subset [d^3] \subset [t]$ correspondant aux inclusions $\sigma_1 \subset \sigma_{12} \subset \sigma^1 \subset \sigma^{123} \subset \sigma_{123}$ (pour l'inclusion $\sigma_{12} \subset \sigma^1$, nous utilisons l'identification de $\Sigma_{1,2}(E)$ avec $\Sigma_2(E)$).
2. $x.x \supset [d]$ correspondant à $\sigma_1 \cup \sigma_2 \supset \sigma_{12}$
3. $x.[d] \supset [t]$ correspondant à $\sigma_1 \cup \sigma_{23} \supset \sigma_{123}$
4. $d.d \supset [d^2]$ correspondant à $\sigma_{12} \cup \sigma_{13} \supset \sigma^1$
5. $d.[d^2] \supset [d^3]$ correspondant à $\sigma_{12} \cup \sigma^3 \supset \sigma^{123}$
6. toutes les relations se déduisant des précédentes par action du groupe symétrique S_3 sur les structures
7. Quelques autres imposées par les précédentes (par exemple, il faudrait à priori vérifier $x.x.x \supset [t]$ puisque $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \supset \sigma_{123}$, mais cela découle des conditions précédentes qui imposent $x.x \supset [d]$ et $x.[d] \supset [t]$).

La première relation est trivialement vraie par construction. Les relations deux et trois sont également évidentes. Pour la relation cinq, notons que d,$[d^2]$ et $[d^3]$ sont des schémas du $\mathbb{P}^1$ formé par les doublets inclus dans $[t]$. La correspondance entre diviseurs effectifs et sous-schémas pour une courbe lisse nous assure que l'intersection de $d.[d^2]$ avec $\mathbb{P}^1$ est exactement $[d^3]$. A fortiori $d.[d^2] \supset [d^3]$. La relation quatre se démontre de la même façon.

$\blacksquare$

Après les points spéciaux, voici une description des points généraux des schémas $R_\eta(X)$.

Proposition 62. *Soit η un enrichissement admissible et $\hat{t}$ un point de $R_\eta(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes quand X est lisse irréductible:*

- *il existe un point p de $F(X,3)$ tel que $\hat{t} = f_\eta(p)$*
- *le sous-schéma $[p_{\eta,\eta_{123}}(\hat{t})]$ de X admet pour support trois points distincts.*

Démonstration:
1 $\Rightarrow$2 est évident.
2 $\Rightarrow$1: on dit qu'un point x d'une variété X est limite de points d'un sous-ensemble E de X s'il existe un morphisme $Spec\ k[[t]] \to X$ qui envoie le point générique sur un point de E et le point spécial sur x. Par définition d'un enrichissement admissible, tout point de $R_\eta(X)$ est limite de points de $f_\eta(F(X,3))$. Mais si $[p_{\eta,\eta_{123}}(\hat{t})]$ admet pour support trois points distincts, la limite $\hat{t}$ des points de $f_\eta(F(X,3))$ est encore un point de $f_\eta(F(X,3))$.

$\blacksquare$

Définition 63. *Soit η un enrichissement admissible. On dira d'un point qui satisfait l'une des deux conditions ci-dessus que c'est un point général de $R_\eta(X)$.*

Corollaire 64. *La proposition nous fournit un moyen de montrer qu'un enrichissement n'est pas admissible. Il suffit d'exhiber un point $\hat{t}$ de $R_\eta(X)$ satisfaisant la deuxième condition mais pas la première.*

Proposition 65. *Soient X une variété lisse connexe et η un enrichissement de $\{1,2,3\}$ de niveau au plus deux. Le schéma $R_\eta(X)$ est connexe.*

Démonstration: soient q un point de $R_\eta(X)$ et $q(x,d,t)$ un point spécial de $R_\eta(X)$ au sens de la proposition 61. Nous allons déterminer une suite de points $q_0 = q, q_1, \dots, q_n = q(x,d,t)$ telle que, pour tout i, il existe une courbe C_i dans $R_\eta(X)$ contenant q_i et q_{i+1}.
Si $\eta = \eta_{\max}$, le schéma $R_\eta(X)$ est un sous-schéma de

$$X^3 \times Hilb^2(X)^3 \times Hilb^2(Hilb^2(X))^3 \times Hilb^3(Hilb^2(X)) \times Hilb^3(X)$$

Le point q est donc défini par des coordonnées

$$p_1(q), p_2(q), p_3(q), p_{12}(q), p_{13}(q), p_{23}(q), p^1(q), p^2(q), p^3(q), p^{123}(q), p_{123}(q)$$

Pour un η quelconque, q est déterminé par un certain nombre de coordonnées parmi $p_1(q), \dots, p_{123}(q)$.
Par définition d'un enrichissement, la coordonnée p_{123} fait toujours partie des coordonnées définissant q. Le support de $p_{123}(q)$ est constitué d'au plus trois points. En bougeant $p_{123}(q)$ le long d'une famille à un paramètre, on peut construire une courbe C_0 dans $R_\eta(X)$ telle que:
C_0 contienne q_0 et un point q_1 dont le triplet $[p_{123}(q_1)]$ associé est ponctuel de support x.
Soit $[[x]]$ le voisinage formel de x dans X. Le triplet $[p_{123}(q_1)]$ est maintenant un sous-schéma de $[[x]]$. Puisqu'on a les relations d'incidence:

$$\begin{aligned} p_i(q_1) &\subset [p_{123}(q_1)] \subset [[x]] \\ [p_{ij}(q_1)] &\subset [p_{123}(q_1)] \subset [[x]] \\ [p^i(q_1)] &\subset [p_{123}(q_1)] \subset [[x]] \\ [p^{123}(q_1)] &\subset [p_{123}(q_1)] \subset [[x]] \end{aligned}$$

"tout se passe" dans le voisinage formel $[[x]]$. En particulier tout automorphisme φ_t de $[[x]]$ définit un point $\psi_t(q_1)$ de $R_\eta(X)$. En tant que schéma abstrait, $[p_{123}(q_1)]$ est soit isomorphe à $Spec\ k[y,z]/(y^2, yz, z^2)$, soit isomorphe à $Spec\ k[z]/z^3$. Dans le premier cas, on définit $q_2 = q_1$. Dans le deuxième cas, et si on suppose que X est de dimension supérieure ou égale à trois, on peut choisir un isomorphisme

$$[[x]] \simeq Spec\ k[[y, z, t_1, t_2, \ldots, t_n]]$$

dans lequel $[p_{123}(q_1)]$ ait pour équations $(y, z^3, t_1, \ldots, t_n)$. Pour tout t dans $\mathbb{A}^1 - 0$, on définit l'automorphisme φ_t de $[[x]]$:

$$\begin{array}{rcl} y & \mapsto & ty + z^2 \\ z & \mapsto & z \\ t_i & \mapsto & t_i \end{array}$$

On en déduit un morphisme

$$\begin{array}{rcl} \psi_t : \mathbb{A}^1 - 0 & \to & R_\eta(X) \\ t & \mapsto & \psi_t(q_1) \end{array}$$

Comme $R_\eta(X)$ est propre sur k, il existe un morphisme $\tilde{\psi}$ prolongeant ψ en 0 et ∞ et $\tilde{\psi}(\infty) = q_1$. Notons $q_2 = \tilde{\psi}(0)$. On vérifie par un petit calcul que $[p_{123}(q_2)]$ est défini par l'idéal $(y^2, yz, z^2, t_1, \ldots, t_n)$.
Les doublets inclus dans $[p_{123}(q_2)]$ forment un $\mathbb{P}^1$ et le morphisme de $\mathbb{P}^1$ dans $Hilb^2(X)$ correspondant peut être décrit de la façon suivante:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 & \to & Hilb^2(X) \\ (h_0 : h_1) & \mapsto & x \text{ avec } I([x]) = (h_0 y - h_1 z, y^2, yz, z^2, t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{array}$$

Choisissons la famille d'automorphismes suivantes de $[[x]]$.

$$\begin{array}{rrl} \varphi_t : & y & \mapsto ty \\ & z & \mapsto z \\ & t_i & \mapsto t_i \end{array}$$

Comme précédemment, φ_t induit un morphisme $\tilde{\psi} : \mathbb{A}^1 \to R_\eta(X)$. On a $q_2 = \tilde{\psi}(1)$ et on cherche à comprendre $q_3 := \tilde{\psi}(0)$. Commençons par déterminer $p^1(\tilde{\psi}(0))$. Le point $p^1(\tilde{\psi}(1))$ correspond à un sous-schéma de degré deux D du $\mathbb{P}^1$ formé par les doublets inclus dans le triplet. Le morphisme φ_t induit un automorphisme ρ_t de $\mathbb{P}^1$:

$$\rho_t(h_0 : h_1) = (th_0 : h_1)$$

et $p^1(\tilde{\psi}(t))$ correspond au sous-schéma $\rho_t(D)$. Si on a choisi un bon isomorphisme

$$[[x]] \simeq Spec\, k[y, z, t_1, t_2, \ldots, t_n]$$

le support de D ne rencontre pas le point à l'infini $(1 : 0)$, le doublet d correspond au point $(0 : 1)$ de $\mathbb{P}^1$, et alors $[p^1(\tilde{\psi}(0))]$ est le sous-schéma de degré deux de $\mathbb{P}^1$ supporté par $d = (0 : 1)$.
La même démonstration montre que tous les points

$$p^i(\tilde{\psi}(0)),\ p_{ij}(\tilde{\psi}(0)),\ p^{123}(\tilde{\psi}(0))$$

correspondent à des sous-schémas de $\mathbb{P}^1$ supportés par $d = (0 : 1)$, ce qui signifie $\tilde{\psi}(0) = q(x, d, t)$.

■

Remarque 66. *on a fait la démonstration dans le cas où la dimension de X est supérieure ou égale à trois. Dans le cas où elle vaut deux, il suffit de supprimer les lignes contenant des "t_i" dans la démonstration. Le cas de la dimension un est facile et laissé au lecteur.*

Proposition 67. *Pour toute variété lisse irréductible X de dimension au moins deux, il existe une stratification naturelle sur $R_{\eta_{\max}}(X)$. Pour tout enrichissement admissible η, cette stratification induit une stratification sur $R_\eta(X)$. Pour tout η, la stratification comporte:*

- *une unique strate ouverte et dense*
- *une unique strate fermée incluse dans l'adhérence de toutes les autres.*

En outre la strate ouverte est composée des points généraux au sens de la définition 63 et la strate fermée est constituée des points spéciaux au sens de la proposition 61.

Démonstration: l'idée est la suivante. On dispose d'une bonne stratification sur la variété des triplets enrichis $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$ grâce à un travail de Le Barz. On l'utilise pour montrer que le morphisme d'oubli

$$R_{max}(X) \to R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$$

est un isomorphisme. Pour un enrichissement quelconque η, le morphisme

$$R_{max}(X) \to R_\eta(X)$$

induit une bonne stratification sur $R_\eta(X)$.

Le Barz ([LB]) a montré (sans toutefois utiliser cette terminologie) que $\eta_{1,2,3,12,13,23,123}$ est un enrichissement admissible et que la variété associée $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$ est lisse irréductible quand X l'est. Il a de plus décrit des diviseurs lisses irréductibles naturels sur $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$. Ces diviseurs sont les suivants:

$$\begin{aligned}
E_{ij} &= \{\hat{t} = (p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123}) \\
&\quad \text{t.q. } \; p_{ik} = p_{jk}\} \\
E^{\bullet} &= \{\hat{t} = (p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123}) \\
&\quad \text{t.q. } [p_{123}] \text{ soit ponctuel isomorphe à } Spec\; k[x,y]/(x^2, xy, y^2)\}
\end{aligned}$$

Il a décrit précisément les relations d'incidence entre les diviseurs et en particulier, il a démontré qu'ils se coupaient deux à deux transversalement. Ces diviseurs induisent une stratification sur $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$:

- $S_{\neq}$ est le lieu où les trois points (p_1, p_2, p_3) sont distincts. Il s'écrit à l'aide des diviseurs $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X) - (E_{12} \cup E_{13} \cup E_{23} \cup E^{\bullet})$

- S_{ij} est le lieu où les deux points (p_i, p_j) coïncident mais diffèrent du troisième point p_k. Il s'écrit $E_{ij} - \ (E_{ij} \cap E_{ik}) - (E_{ij} \cap E^{\bullet})$

- S_{cur} est le lieu où les trois points (p_1, p_2, p_3) coïncident et où $[p_{123}]$ est curviligne. Il s'écrit $(E_{ij} \cap E_{ik}) \ - \ (E_{ij} \cap E_{ik} \cap E^{\bullet})$

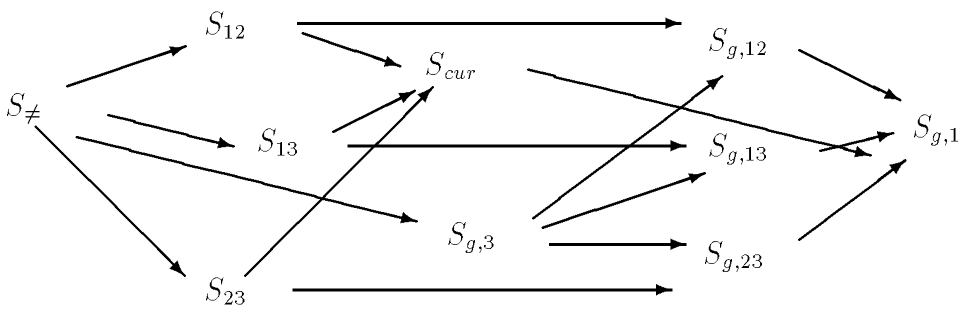
- $S_{g,3}$ est le lieu où les trois points (p_1, p_2, p_3) coïncident, où $[p_{123}]$ est isomorphe à $Spec\ k[x,y]/(x^2, xy, y^2)$, et où les p_{ij} sont trois points distincts. Il s'écrit $E^{\bullet} \ - \ ((\cup E_{ij}) \cap E^{\bullet})$

- $S_{g,jk}$ est le lieu où les trois points (p_1, p_2, p_3) coïncident, où $[p_{123}]$ est isomorphe à $Spec\; k[x,y]/(x^2, xy, y^2)$, où les points p_{ij} et p_{ik} coïncident mais diffèrent de p_{jk}. Il s'écrit $(E^{\bullet} \ \cap \ E_{jk}) \ - \ (E^{\bullet} \ \cap \ E_{jk} \ \cap E_{ij})$

- $S_{g,1}$ est le lieu où les trois points (p_1, p_2, p_3) coïncident, où $[p_{123}]$ est isomorphe à $Spec\; k[x,y]/(x^2, xy, y^2)$, où les trois points p_{ij}, p_{ik} et p_{jk} coïncident. Il s'écrit $E^{\bullet} \cap E_{jk} \cap E_{ij}$

Toutes ces strates sont localement fermées et en outre, l'adhérence d'une strate est une réunion de strates. Plus précisément, le schéma suivant définit une relation d'ordre sur l'ensemble des strates et l'adhérence d'une strate est la réunion des strates qui lui sont inférieures.
Nous n'allons pas montrer entièrement ces relations d'incidence mais juste montrer que

$$\overline{S_{12}} = S_{12} \cup S_{cur} \cup S_{g,12} \cup S_{g,1}$$



pour donner une idée de la méthode.
Puisque

$$S_{12} = E_{12} \ - \ (E_{12} \cap E_{13}) \ - \ (E_{12} \cap E^{\bullet})$$

S_{12} contient un ouvert dense de E_{12}, on a $\overline{S_{12}} = E_{12}$ et

$$E_{12} = S_{12} \cup S_{cur} \cup S_{g,12} \cup S_{g,1}$$

par définition des strates.
Nous allons maintenant utiliser cette stratification pour montrer que le morphisme d'oubli

$$p_{\eta_{max},\eta_{1,2,3,12,13,23,123}} : R_{\eta_{max}}(X) \to R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$$

est un isomorphisme. On commence par choisir des enrichissements

$$\theta_0 = \eta_{1,2,3,12,13,23,123}, \ \theta_1, \ \theta_2, \ \theta_3, \ \theta_4 = \eta_{max}$$

tels que $\theta_i \subset \theta_{i+1}$ et tel que le cardinal de θ_{i+1} soit le cardinal de θ_i plus un. On va montrer que les morphismes d'oubli successifs

$$p_{\theta_{i+1},\theta_i} : R_{\theta_{i+1}}(X) \to R_{\theta_i}(X)$$

sont des isomorphismes. Choisissons par exemple

$$\theta_1 = \eta_{1,2,3,12,13,23,123} \cup \{\sigma^1\}$$

et montrons l'isomorphisme précédent pour $i = 0$. Tous les autres isomorphismes se démontrent de la même manière.
Tout d'abord p_{θ_1,θ_0} est surjectif car les points généraux de

$$R_{1,2,3,12,13,23,123}(X) = R_{\theta_0}(X)$$

sont atteints et $R_{\theta_1}(X)$ est projectif: un point général de $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$ est de la forme

$$f_{\theta_0}(p)$$

pour un p dans $F(X,3)$ et il s'écrit

$$p_{\theta_1,\theta_0}(f_{\theta_1}(p))$$

Pour deux points dans la même strate de $R_{\theta_0}(X)$, les fibres de p_{θ_1,θ_0} sont identiques. Par semi-continuité de la dimension des fibres, et par semi-continuité de la colongueur des fibres pour une famille à fibres 0-dimensionnelles, si on vérifie que la fibre *schématique* au dessus d'un point général est non vide, et que celle au dessus d'un point spécial est incluse dans un point, alors la fibre au dessus de tout point sera schématiquement un point. Par suite p_{θ_1,θ_0} sera un isomorphisme.
On a déjà vu que la fibre au dessus d'un point général est non vide.
Soit $q = q(x,d,t)$ un point de la strate spéciale $S_{g,1}$. Les doublets inclus dans le triplet $[t]$ forment un sous-schéma de $Hilb^2(X)$ isomorphe à $I\!P^1$. La fibre au dessus de q est le lieu Z de $Hilb^2(Hilb^2(X))$ formé par les doublets de doublets d^2 vérifiant

$$\begin{aligned} [d^2] &\subset I\!P^1 \quad (car\ \sigma^1 \subset \sigma_{123}) \\ [d^2] &\subset d.d \quad (car\ \sigma^1 \subset \sigma_{12} \cup \sigma_{13}) \end{aligned}$$

Si $Y \hookrightarrow X$ est un sous-schéma ponctuel de degré n, le lieu de $Hilb^n(X)$ formé par les p tels que $[p] \subset Y$ est schématiquement réduit à un point. Pour montrer l'isomorphisme, il nous suffit donc de montrer que $I\!P^1 \cap d.d$ définit un sous-schéma de degré deux. Mais c'est clair car c'est un sous-schéma d'une courbe lisse défini par le carré d'un idéal maximal.

L'isomorphisme $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X) \simeq R_{\eta_{max}}(X)$ qu'on a construit permet de munir $R_{\eta_{max}}(X)$ de la stratification de $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$. Si η est un enrichissement admissible quelconque, $f_\eta(F(X,3))$ est un ouvert dense de $R_\eta(X)$. Cet ouvert est l'image de l'ouvert dense de $R_{\eta_{max}}(X)$. Puisque $R_{\eta_{max}}(X)$ est projective, le morphisme d'oubli

$$p_{\eta_{max},\eta} : R_{\eta_{max}}(X) \to R_\eta(X)$$

est surjectif. On vérifie que pour deux strates S_i et S_j de $R_{\eta_{max}}(X)$, on a

$$p_{\eta_{max},\eta}(S_i) = p_{\eta_{max},\eta}(S_j) \ ou\ p_{\eta_{max},\eta}(S_i) \cap p_{\eta_{max},\eta}(S_j) = \emptyset$$

La stratification sur $R_{\eta_{max}}(X)$ se descend donc sur $R_\eta(X)$. L'image de la strate spéciale est fermée comme image d'une variété projective. Enfin, les relations d'incidence entre les strates se préservent d'après la continuité du morphisme $p_{\eta_{max},\eta}$. En particulier, l'image de la strate spéciale est incluse dans l'adhérence de toutes les autres strates.

■

4.4 Le théorème de classification

On voudrait déterminer les enrichissements η admissibles de $\{1,2,3\}$ de niveau inférieur ou égal à deux et classifier les schémas $R_\eta(X)$ associés. Si on identifie deux enrichissements η et η' tels que pour tout schéma X, les schémas $R_\eta(X)$ et $R_{\eta'}(X)$ sont isomorphes, le problème est donc de comprendre les classes d'enrichissements admissibles. On voudrait même, dans chaque classe d'équivalence, trouver un enrichissement canonique, "plus beau" que les autres. Une idée naturelle pour prendre ce représentant canonique est de prendre, s'il existe, l'enrichissement η maximal pour l'inclusion dans la classe d'équivalence. On espère ainsi que, pour un enrichissement η' dans la classe d'équivalence de η, et pour un schéma X, l'isomorphisme $R_\eta(X) \to R_{\eta'}(X)$ soit donné par le morphisme d'oubli. Malheureusement, un tel enrichissement maximal n'existe pas toujours. En effet, le groupe symétrique S_3 agit sur l'ensemble des enrichissements, et, si η et η' sont deux enrichissements dans la même orbite, on a l'isomorphisme $R_\eta(X) \simeq R_{\eta'}(X)$ sans qu'on ait d'inclusion $\eta \subset \eta'$ ou $\eta' \subset \eta$ en général. Le théorème suivant explique que, à l'action du groupe symétrique près, on peut trouver des représentants canoniques dans les classes d'équivalence.

Théorème 68. *Considérons l'ensemble d'enrichissements $\{\theta_1, \ldots, \theta_{11}\}$ suivants*

$$\{\eta_{123},\ \eta_{1,123},\ \eta_{1,2,3,12,123},\ \eta_{3,12,123}$$
$$\eta^{1}_{123},\ \eta^{1}_{1,2,3,12,13,123},\ \eta^{123}_{123}$$
$$\eta^{123}_{1,123},\ \eta^{3,123}_{3,12,123},\ \eta^{3,123}_{1,2,3,12,123},\ \eta_{max}\}$$

Ces enrichissements sont admissibles. Pour tout enrichissement admissible η, il existe un θ_i et un élément g du groupe symétrique S_3 tel que:

- *$g.\eta \subset \theta_i$*
- *Pour tout schéma X, le morphisme d'oubli: $p_{\theta_i, g.\eta} : R_{\theta_i}(X) \to R_{g.\eta}(X)$ est un isomorphisme.*

Démonstration: Commençons par remarquer qu'il suffit de le démontrer pour les schémas X lisses irréductibles. En effet, si X est un schéma quelconque, on plonge X dans une variété lisse irréductible Y, et d'aprés l'étude du comportement de $R_\eta(X)$ par changement de base, on a :

$$R_{g.\eta}(X) = R_{g.\eta}(Y) \times_{Hilb^n(Y)} Hilb^n(X) = R_{\theta_i}(Y) \times_{Hilb^n(Y)} Hilb^n(X) = R_{\theta_i}(X)$$

Dorénavant, nous fixons une variété lisse irréductible X.

Notre méthode pour démontrer le théorème comporte trois étapes.

1. Nous commençons par démontrer que trois enrichissements particuliers sont admissibles à l'aide de calculs en coordonnées locales.

2. Nous donnons alors une série de lemmes qui nous permet, à partir d'un enrichissement admissible η, de produire des enrichissements admissibles η' contenant η. On montre ainsi que les enrichissements θ_i du théorème sont admissibles

3. Nous montrons enfin, toujours grâce à ces lemmes, que, quitte à faire agir le groupe symétrique, tout enrichissement admissible η est inclus dans un enrichissement θ_i tel que le morphisme d'oubli $p_{\theta_i,\eta}$ soit un isomorphisme.

Etape 1:

Proposition 69. *Soit X une variété lisse irréductible. Le schéma $R_{12,123}(X)$ est une variété lisse irréductible.*

Démonstration: puisque $R_{12,123}(X)$ est connexe (proposition 65), il suffit de vérifier la lissité. De plus, la démonstration de cette proposition montre que si le schéma $R_{12,123}(X)$ admet un point singulier, alors les points spéciaux $q(p,d,t)$ sont singuliers. Il nous reste à montrer la lissité en ces points spéciaux.
Supposons la variété X de dimension au moins trois. Pour un tel point q, on peut choisir un voisinage formel $Spec\ k[[x,y,z_1,z_2,\ldots,z_n]]$ de p dans lequel les équations de $[d]$ et $[t]$ sont respectivement:

$$I([d]) = (x^2, y, z_1, \ldots, z_n)$$

$$I([t]) = (x^2, xy, y^2, z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

D'après [LB], le voisinage formel de d dans $Hilb^2(X)$ est isomorphe à

$$Spec\ [[a, b, c, d, e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_n]]$$

et le voisinage formel de t dans $Hilb^3(X)$ est isomorphe à

$$Spec\ k[[u, u', u'', v, v', v'', \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n]]$$

Les idéaux universels de $Hilb^2(X)$ et $Hilb^3(X)$ au dessus de ces voisinages formels sont:

$$I_{12} = (x^2 + ax + b, y - cx - d, z_i - e_i x - f_i)$$

$$I_{123} = (x^2+ux+vy+w, xy+u'x+v'y+w', y^2+u''x+v''y+w'', z_i+\rho_i x+\sigma_i y+\theta_i)$$

où w, w', w'' sont des fonctions algébriques de u, u', u'', v, v', v''. Le voisinage formel de (d, t) dans $R_{12,123}(X)$ est le lieu

$$Z \hookrightarrow Spec\, k[[a, b, c, d, e_i, f_i, u, u', u'', v, v', v'', \rho_i, \sigma_i, \theta_i]]$$

au dessus duquel $I_{123} \subset I_{12}$.
Le calcul de Z a déjà été effectué dans $[LB]$. Le Barz y parlait du lieu ensembliste mais il a effectué le calcul au moyen de divisions et les techniques développées dans les deux premiers chapitres montrent qu'il a en fait calculé les lieux schématiques d'incidence. L'idéal de Z est le suivant:

$$I(Z) = (u - a + cv, b - dv - w, u' - ac + cv' + d, 2cd + cv'' + u'' - ac^2, \\ e_i + \sigma_i c + \rho_i, f_i + \theta_i + \sigma_i d)$$

et

$$Z \simeq Spec\, [[a, b, c, d, e_i, f_i, u, u', u'', v, v', v'', \rho_i, \sigma_i, \theta_i]]/I(Z)$$

Il existe un automorphisme de $k[[a, \ldots, \theta_n]]$ qui envoie e_i sur $e_i - \sigma_i c - \rho$, f_i sur $f_i - \theta_i - \sigma_i d$ et laisse les autres variables invariantes. L'idéal $I(Z)$ devient par cet automorphisme:

$$I(Z) = (u - a + cv, b - dv - w, u' - ac + cv' + d, 2cd + cv'' + u'' - ac^2, e_i, f_i)$$

et donc

$$\begin{aligned} Z &= Spec\, k[[a, b, c, d, e_i, f_i, u, u', u'', v, v', v'', \rho_i, \sigma_i, \theta_i]]/I(Z) \\ &= Spec\, k[[a, b, c, d, u, u', u'', v, v', v'', \rho_i, \sigma_i, \theta_i]]/J \end{aligned}$$

où

$$J = (u - a + cv, b - dv - w, u' - ac + cv' + d, 2cd + cv'' + u'' - ac^2)$$

En faisant de nouveaux changements de variables, on voit qu'on a finalement

$$Z = Spec\, k[[v, v', v'', a, c, d, \rho_i, \sigma_i, \theta_i]]$$

Donc Z est lisse au point spécial car son voisinage formel est le $Spec$ d'un anneau régulier.

On a fait la démonstration dans le cas où X est de dimension au moins trois. Dans le cas où X est de dimension deux, il suffit d'ôter de la démonstration les lignes contenant des termes z_i. Le cas de la dimension un est facile et laissé au lecteur.

■

Un argument de dimension montre que $f_{\eta_{12,123}}(X)$ est dense dans $R_{12,123}(X)$ d'où:

Corollaire 70. *L'enrichissement $\eta_{12,123}$ est admissible.*

Proposition 71. *Si X est une variété lisse irréductible, le schéma $R^1_{123}(X)$ est une variété lisse irréductible.*

Démonstration: comme précédemment nous allons montrer la lissité au point spécial. Nous traiterons le cas de la dimension deux. Toujours comme dans la démonstration précédente, le cas général s'obtient en ajoutant quelques variables.

Soit (p^1, p_{123}) un point spécial de $R^1_{123}(X)$. Les objets en jeu sont un schéma ponctuel $[p_{123}]$ de X de colongueur trois. Un schéma $[p^1]$ de $Hilb^2(X)$ ponctuel de colongueur deux inclus dans $[p_{123}]$. Un schéma $[p_{12}]$ ponctuel de X où p_{12} est le support de $[p^1]$. Un point p qui est le support à la fois de $[p_{12}]$ et de $[p_{123}]$.

On peut choisir un voisinage formel $Spec\ k[[x, y]]$ de p tel que:

- $I([p_{12}]) = (x^2, y)$, le voisinage formel de p_{12} dans $Hilb^2(X)$ soit isomorphe à
$$Spec\ k[[a, b, c, d]]$$
et l'idéal universel de $Hilb^2(X) \times X$ au dessus de cette carte est
$$(x^2 + ax + b, y - cx - d)$$
- $I([p_{123}]) = (x^2, xy, y^2)$, le voisinage formel de p_{123} soit isomorphe à
$$Spec\ k[[u, u', u'', v, v', v'']]$$
et l'idéal universel de $Hilb^3(X) \times X$ au dessus de cette carte est
$$I_{123} = (x^2 + ux + vy + w, xy + u'x + v'y + w', y^2 + u''x + v''y + w'')$$
où w, w', w'' sont des fonctions algébriques de u, u', u'', v, v', v''.
- le voisinage formel de p^1 dans $Hilb^2(Hilb^2(X))$ est isomorphe à
$$Spec\ k[[e, f, g, h, i, j, l, m]]$$
et l'idéal universel de $Hilb^2(Hilb^2(X)) \times Hilb^2(X)$ au dessus de cette carte est:
$$I^1 = (a - ec - f, b - gc - h, c^2 - ic - j, d - lc - m)$$
car $[p^1]$ a pour équations $a = b = c^2 = d = 0$ dans $Hilb^2(X)$

D'après la démonstration précédente, le lieu Z de $Hilb^2(X) \times Hilb^3(X)$ au dessus duquel $I_{123} \subset I_{12}$ est donné par l'idéal

$$J = (u - a + cv, b - dv - w, u' - ac + cv' + d, 2cd + cv'' + u'' - ac^2)$$

En prenant l'image inverse par les projections évidentes, I^1 et J peuvent être vus comme des idéaux de $(Hilb^2(Hilb^2(X)) \times Hilb^3(X)) \times Hilb^2(X)$. Par définition du lieu d'incidence, le lieu W de $Hilb^2(Hilb^2(X)) \times Hilb^3(X)$ au dessus duquel $[p^1] \subset [p_{123}]$ est le lieu au dessus duquel $J \subset I^1$.
Grâce au morphisme canonique $Spec\ k[[a, b, c, d]] \to Spec\ k[a, b, c, d]$, on peut supposer que I^1 et J définissent des familles de sous-schémas d'un espace affine. On calcule alors le lieu d'incidence par divisions en utilisant le fait que les générateurs de I^1 forment une base de Gröbner unitaire pour l'ordre homogène avec $a > b > d > c$.

Plutôt que d'écrire les divisions sous la forme traditionnelle

$$f = \sum \lambda_i f_i + R$$

où les f_i sont les générateurs de I^1, nous travaillerons dans

$$(k[[u, u', u'', v, v', v'', e, f, g, h, i, j, l, m]] \otimes k[a, b, c, d])/I^1$$

et nous écrirons $f = R$. Moyennant cette convention, les divisions des générateurs de J par I^1 s'écrivent:

$$cv + u - a = cv + u - ec - f = (u - f) + c(v - e)$$

donc $I(W) \supset (e - v, u - f)$

$$dv + w - b = lcv + mv + w - gc - h$$

donc $I(W) \supset (g - lv, h - w - vm)$.

$$d + cv' + u' - ac = lc + m + cv' + u' - fc - eic - ej$$

donc $I(W) \supset (l + v' - f - ei, m + u' - ej)$.

$$\begin{aligned} 2cd + cv'' + u'' - ac^2 &= 2lc^2 + 2cm + cv'' + u'' - ejc + (-l - v')c^2 \\ &= (l - v')(ic + j) + 2cm + cv'' + u'' - ejc \end{aligned}$$

donc $I(W) \supset (i(l - v') + 2m + v'' - ej, j(l - v') + u'')$.
Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} I(W) &= (e - v, u - f, g - lv, h - w - vm, l + v' - f - ei, m + u' - ej, \\ &\quad i(l - v') + 2m + v'' - ej, j(l - v') + u'') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W &= Spec\ k[[u,u',u'',v,v',v'',e,f,g,h,i,j,l,m]]/I(W) \\ &= Spec\ k[[u',v',e,f,i,j]] \end{aligned}$$

W est non singulier.

■

Corollaire 72. *L'enrichissement η^1_{123} est admissible.*

Voici un autre corollaire que nous utiliserons lors de la classification des collisions.

Corollaire 73. *Soit X une surface lisse. Soit p^1 un point de $Hilb^2(Hilb^2(X))$ tel que $[p^1]$ soit ponctuel. Supposons qu'il existe un point t de $Hilb^3(X)$ tel que $[t]$ soit isomorphe à $Spec\ k[x,y]/(x^2,xy,y^2)$ et $[t] \supset [p^1]$. Le lieu Z de $Hilb^3(X)$ formé par les triplets contenant $[p^1]$ est schématiquement réduit au point t*

Démonstration: conservons les notations de la démonstration précédente. Le probléme est local sur X et, quitte à utiliser le morphisme $Spec\ k[[x,y]] \to Spec\ k[x,y]$, on peut supposer qu'on travaille dans $\mathbb{A}^2$. Dans ce cas, les cartes formelles utilisées dans la démonstration précédente prennent du sens en tant que cartes affines en remplaçant partout les anneaux de séries formelles par des anneaux de polynômes.
Le lieu W_0 cherché admet pour équations $I(W_0)$, obtenu à partir de $I(W)$ en faisant $e=f=g=h=i=j=l=m=0$. On obtient alors

$$u=u'=u''=v=v'=v''=0$$

■

Proposition 74. *Soit X une variété lisse irréductible. Le schéma $R^{123}_{123}(X)$ est une variété lisse irréductible. En particulier η^{123}_{123} est admissible.*

Démonstration: on fait ici aussi la démonstration dans le cas de la dimension deux pour simplifier les notations.

Soit (p^{123},p_{123}) un point spécial de $R^{123}_{123}(X)$. Notons p_{12} le point de $Hilb^2(X)$ défini par le support de $[p^{123}]$. On reprend les notations de la démonstration de la proposition 71 pour les voisinages formels des points p_{12}, p_{123} ainsi que pour l'idéal J.

Le voisinage formel de p^{123} est isomorphe à

$$Spec\ k[[e,f,g,h,i,j,l,m,n,o,p,q]]$$

et l'idéal universel de $Hilb^3(Hilb^2(X)) \times Hilb^2(X)$ au dessus de cette carte est

$I^{123} = (a - ec^2 - fc - g, b - hc^2 - ic - j, c^3 - lc^2 - mc - n, d - oc^2 - pc - q)$

Il nous faut calculer le lieu W de

$$Spec\, k[[u, u', u'', v, v', v'', e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, q]]$$

au dessus duquel $I^{123} \supset J$. On effectue des divisions:

$$cv + u - a = cv + u - ec^2 - fc - g$$

donc $e = 0,\ g = u,\ f = v$ sur W.

$$dv + w - b = voc^2 + pcv + qv + w - hc^2 - ic - j$$

donc $vo = h,\ vp = i,\ vq + w = j$ sur W.

$$d + cv' + u' - ac = oc^2 + pc + q + v'c + u' - fc^2 - gc$$

donc $o = f,\ p + v' = g,\ q + u' = 0$ sur W.

$$\begin{aligned} 2cd + cv'' + u'' - ac^2 &= 2oc^3 + 2pc^2 + 2qc + cv'' + u'' - fc^3 - gc^2 \\ &= (2o - f)(lc^2 + mc + n) + (2p - g)c^2 + c(2q + v'') + u'' \end{aligned}$$

donc

$$I(W) \supset ((2o - f)l + 2p - g,\ (2o - f)m + 2q + v'',\ (2o - f)n + u'')$$

Au total

$$\begin{aligned} I(W) = (&e,\ g - u,\ f - v,\ vo - h,\ vp - i,\ vq + w - j,\ o - f,\ p + v' - g, \\ &q + u',\ (2o - f)l + 2p - g,\ (2o - f)m + 2q + v'',\ (2o - f)n + u'') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W &= Spec\, k[[u, u', u'', v, v', v'', e, f, g, h, i, j, l, m, n, o, p, q]]/I(W) \\ &= Spec\, k[[l, m, n, o, p, q]] \end{aligned}$$

Donc W est lisse.

$\blacksquare$

Etape 2:

Lemme 75. *Soit η un enrichissement admissible contenant σ_{12} et σ_{13}. Soit $\eta' = \eta \cup \{\sigma^1\}$. L'enrichissement η' est admissible et le morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta} : R_{\eta'}(X) \to R_\eta(X)$ est un isomorphisme.*

Nous avons déja effectué cette démonstration lors de l'étude de la stratification. Comme elle est courte et pour éviter un renvoi désagréable, nous la redonnons ici. Tout d'abord $p_{\eta',\eta}$ est surjectif car les points généraux de $R_\eta(X)$ sont atteints et que $R_{\eta'}(X)$ est projectif. Pour deux points dans la même strate de $R_\eta(X)$, les fibres de $p_{\eta',\eta}$ au dessus de ces points sont identiques. Par semi-continuité de la dimension des fibres, et par semi-continuité de la colongueur des fibres pour une famille à fibres 0-dimensionnelles, si on vérifie que la fibre *schématique* au dessus d'un point général est non vide, et que celle au dessus d'un point spécial est incluse dans un point, alors la fibre au dessus de tout point sera schématiquement un point. Par suite $p_{\eta',\eta}$ sera un isomorphisme.
On a déjà vu que la fibre au dessus d'un point général est non vide.
Soit $q = q(x, d, t)$ un point de la strate spéciale de $R_\eta(X)$. Les doublets inclus dans le triplet $[t]$ forment un sous-schéma de $Hilb^2(X)$ isomorphe à $\mathbb{P}^1$. La fibre au dessus de q est le lieu Z de $Hilb^2(Hilb^2(X))$ formé par les doublets de doublets d^2 vérifiant

$$[d^2] \subset \mathbb{P}^1 \quad (car\ \sigma^1 \subset \sigma_{123})$$
$$[d^2] \subset d.d \quad (car\ \sigma^1 \subset \sigma_{12} \cup \sigma_{13})$$

Si $Y \hookrightarrow X$ est un sous-schéma ponctuel de degré n, le lieu de $Hilb^n(X)$ formé par les p tels que $[p] \subset Y$ est schématiquement réduit à un point. Pour montrer la proposition, il nous suffit donc de montrer que $\mathbb{P}^1 \cap d.d$ définit un sous-schéma de degré deux. Mais c'est clair car c'est un sous-schéma d'une courbe lisse défini par le carré d'un idéal maximal.

■

Les lemmes suivants se démontrent également par vérification au point spécial.

Lemme 76. *Soit η un enrichissement admissible contenant σ_{12} et σ^{123}. Soit $\eta' = \eta \cup \{\sigma^3\}$. L'enrichissement η' est admissible et le morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta} : R_{\eta'}(X) \to R_\eta(X)$ est un isomorphisme.*

Lemme 77. *Soit η un enrichissement admissible contenant σ_{12} et σ^3. Soit $\eta' = \eta \cup \{\sigma^{123}\}$. L'enrichissement η' est admissible et le morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta} : R_{\eta'}(X) \to R_\eta(X)$ est un isomorphisme.*

Remarque 78. *Bien sûr, on obtient par l'action du groupe symétrique sur les structures d'autres énoncés équivalents.*

Les deux lemmes suivants expliquent que certains enrichissements η' sont admissibles car on peut trouver un enrichissement admissible η tel que $R_{\eta'}(X)$ s'identifie à une famille universelle au dessus de $R_\eta(X)$.

Lemme 79. *Soit $\eta = \{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$ un enrichissement admissible et*

$$\eta' = \eta \cup \{\sigma\}$$

avec

$$\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

Supposons qu'il existe des relations d'incidence liant σ aux θ_i parmi lesquelles $\sigma \subset \theta_i$ où θ_i est une structure de niveau un. Supposons en outre que la fibre du morphisme d'oubli

$$f_{\eta'}(F(X,3)) \to f_\eta(F(X,3))$$

au dessus d'un point général $(p_1, \ldots, p_s)$ s'identifie au sous-schéma de $H_\sigma(X)$ formé par les p_σ tels que $[p_\sigma] \subset [p_i]$. Alors η' est admissible.

Démonstration: on peut définir trois fermés de

$$H_{\eta'}(X) = H_{\theta_1}(X) \times \ldots \times H_{\theta_s}(X) \times H_\sigma(X)$$

- le fermé $\overline{f_{\eta'}(F(X,3))}$
- le fermé $R_{\eta'}(F(X,3))$ formé par les

  $$(p_1, \ldots, p_s, p_\sigma)$$

  satisfaisant certaines relations d'incidence notées $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_r$
- le fermé Z qu'on définit de la façon suivante. C'est le sous-schéma contenant l'ensemble des points

  $$(p_1, \ldots, p_s, p_\sigma)$$

  soumis à des relations d'incidence. Ces relations d'incidence sont toutes les relations d'incidence précédentes qui ne mettent pas en jeu le point p_σ et la relation $[p_\sigma] \subset [p_i]$. C'est donc un sous-ensemble de relations de $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_r$.

Ces sous-schémas satisfont les inclusions

$$\overline{f_{\eta'}(F(X,3))} \subset R_{\eta'}(F(X,3)) \subset Z$$

Le schéma Z se projette sur $R_\eta(X)$ par un morphisme p. Notons U l'ouvert dense $f_\eta(F(X,3))$ de $R_\eta(X)$. Par hypothèse on a l'égalité

$$Z \cap p^{-1}(U) = f_{\eta'}(F(X,3))$$

Comme Z est plat sur $R_\eta(X)$, on obtient

$$Z = \overline{Z \cap p^{-1}(U)} = \overline{f_{\eta'}(F(X,3))}$$

Par suite

$$R_{\eta'}(F(X,3)) = \overline{f_{\eta'}(F(X,3))}$$

et η' est admissible.

■

Lemme 80. *Soit $\eta = \{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$ un enrichissement admissible et*

$$\eta' = \eta \cup \{\sigma\}$$

avec

$$\sigma \in \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$$

Supposons qu'il existe des relations d'incidence liant σ aux θ_i parmi lesquelles $\sigma \subset \theta_i$ où θ_i est une structure de niveau deux. Supposons en outre que la fibre du morphisme d'oubli

$$f_{\eta'}(F(X,3)) \to f_\eta(F(X,3))$$

au dessus d'un point général $(p_1, \ldots, p_s)$ s'identifie au sous-schéma de $H_\sigma(X)$ formé par les p_σ tels que $p_\sigma \subset [p_i]$. Alors η' est admissible.

Démonstration: comme ci-dessus, $R_{\eta'}(X)$ s'identifie à une variété universelle et peut être obtenue comme adhérence de $f_{\eta'}(F(X,3))$.

■

Ces lemmes permettent de construire des enrichissements admissibles. Nous introduisons maintenant une définition qui va rendre l'exposé de ces constructions plus efficace.

Définition 81. *Soient $\eta \subset \eta'$ deux enrichissements. Supposons que l'on puisse trouver une suite d'enrichissements*

$$\eta_0 := \eta \subset \eta_1 \ldots \subset \eta_p = \eta'$$

telle que

$$\eta_{i+1} = \eta_i \cup \{\theta_{i+1}\}$$

où $\eta_i, \eta_{i+1}, \theta_{i+1}$ jouent le rôle de η, η', σ d'un des cinq lemmes précédents ou de la proposition 52. On dira que η' domine η et que la suite $\theta_1, \ldots, \theta_p$ est une suite de domination.
Si on n'utilise que les trois premiers des cinq lemmes et la proposition 52, on dira que η' et η sont identifiables.

Avec ce nouveau vocabulaire, nous pouvons réexprimer le contenu des lemmes.

Proposition 82. *Si un enrichissement η' domine un enrichissement η admissible, alors η est admissible.*
Si en outre η et η' sont identifiables, alors le morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta}$ est un isomorphisme.

Corollaire 83. *Les enrichissements*

$$\{\eta_{123},\ \eta_{1,123},\ \eta_{1,2,3,12,123},\ \eta_{3,12,123}$$

$$\eta^{1}_{123},\ \eta^{1}_{1,2,3,12,13,123},\ \eta^{123}_{123}$$

$$\eta^{123}_{1,123},\ \eta^{3,123}_{3,12,123},\ \eta^{3,123}_{1,2,3,12,123},\ \eta_{max}\}$$

sont admissibles

Démonstration:

- η_{123} est admissible car $R_{123}(X) = Hilb^3(X)$ étant irréductible, l'ouvert $f_{\sigma_{123}}(F(X,3))$ est dense.
- $\eta_{1,123}$ domine η_{123} (σ_1 est une suite de domination)
- $\eta_{12,123}$ a été traité dans l'étape un et $\eta_{1,2,3,12,123}$ domine $\eta_{12,123}$ (suite: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)
- $\eta_{3,12,123}$ domine $\eta_{12,123}$ (suite: σ_3)
- η^1_{123} a été traité dans l'étape un
- $\eta^1_{1,2,3,12,13,123}$ domine η^1_{123} (suite: $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1$)

- η_{123}^{123} a été traité dans l'étape un
- $\eta_{1,123}^{123}$ domine η_{123}^{123} (suite: σ_1)
- $\eta_{3,12,123}^{3,123}$ domine η_{123}^{123} (suite: $\sigma_{12}, \sigma_3, \sigma^3$)
- $\eta_{1,2,3,12,123}^{3,123}$ domine $\eta_{3,12,123}^{3,123}$ (suite: σ_1, σ_2)
- η_{max} domine η_{123}^{123} (suite: $\sigma_{12}, \sigma^3, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

■

Etape trois:
on veut maintenant montrer que, à l'action du groupe S_3 près, pour tout enrichissement admissible η, on peut trouver un enrichissement θ_i parmi les onze enrichissements du corollaire précédent contenant η tel que le morphisme d'oubli $p_{\theta_i,\eta}$ soit un isomorphisme. Choisir un enrichissement de $\{1,2,3\}$ de niveau inférieur ou égal à deux, c'est choisir un sous-ensemble de

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^{123}, \sigma_{123}\}$$

contenant σ_{123}. Il y a donc 2^{10} tels enrichissements et il nous faut d'abord les classifier pour pouvoir montrer la proposition. Nous allons le faire suivant les doublets déterminés par l'enrichissement.

Commençons par la remarque suivante. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Notons $[f]$ l'ensemble paramétré par un point f de F. La donnée de F détermine un ensemble G inclus dans E

$$G := \cup_{f\in F}[f]$$

et une partition de G. Pour décrire cette partition, considérons le plus petit ensemble H de $\mathcal{P}(E)$ satisfaisant les conditions suivantes.

- $F \subset H$
- si h_1 et h_2 sont dans H, alors le point h de $\mathcal{P}(E)$ défini par $[h] = [h_1] \cap [h_2]$ est dans H
- si h est dans H, alors le point h' de $\mathcal{P}(E)$ défini par $[h'] = G - [h]$ est dans H

Considérons maintenant le sous-ensemble I de H formé par les h tels que $[h]$ soit minimal pour l'inclusion. Les sous-ensembles $[h]$ de G quand h est dans I forment une partition de G.

Considérons maintenant $E = \Sigma_2(\{1,2,3\})$ qui contient trois éléments. On a:

$$E = \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &= \Sigma_{1,2}(\{1,2,3\}) \cup \Sigma_{2,2}(\{1,2,3\}) \cup \Sigma_{3,2}(\{1,2,3\}) \\ &= \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^{123}\} \end{aligned}$$

Un enrichissement η détermine un ensemble F_η de $\mathcal{P}(E)$:

$$F_\eta := \eta \cap \mathcal{P}(E) \ \subset \mathcal{P}(E)$$

donc un ensemble partitionné G_η inclus dans E. Sept cas sont possibles:

- cas un: $G_\eta = \emptyset$ (η ne détermine aucun doublet)
- cas deux: G_η est un singleton (η détermine un doublet)
- cas trois: G_η contient deux éléments et la partition est grossière (η détermine deux doublets inordonnés)
- cas quatre: G_η contient deux éléments et la partition divise G_η en deux singletons (η détermine deux doublets ordonnés)
- cas cinq: G_η contient trois éléments et la partition est grossière
- cas six: G_η contient trois éléments et la partition divise G_η en une paire et un singleton
- cas sept: G_η contient trois éléments et la partition divise G_η en trois singletons

En examinant les η cas par cas, nous allons maintenant montrer que, à l'action du groupe près, tout enrichissement admissible η est identifiable à un enrichissement θ_i. Remarquons qu'un enrichissement η s'écrit

$$\eta = F_\eta \cup \{\sigma_{123}\} \cup E_\eta$$

où E_η est un sous-ensemble de $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Cas un: F_η est vide donc, à permutation près des indices, η est l'un des enrichissements suivants:

$$\eta_{123}, \eta_{1,123}, \eta_{1,2,123}, \eta_{1,2,3,123}$$

Les deux premiers enrichissements font partie des dix enrichissements modèles θ_i proposés .

Le troisième enrichissement n'est pas admissible car le point

$$(p_1, p_1, p_1 \cup p_2 \cup p_3) \in H_1(X) \times H_2(X) \times H_{123}(X)$$

est un point de $R_{1,2,123}(X)$ qui n'est pas dans $f_{\eta_{1,2,123}}(F(X,3))$ (cf corollaire 64).

Nous allons montrer que le dernier enrichissement n'est pas admissible. Soit X une surface lisse. On veut montrer que les schémas

$$\overline{f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X,3))} \subset H_1(X) \times H_2(X) \times H_3(X) \times H_{123}(X)$$

et

$$R_{1,2,3,123}(X) \subset H_1(X) \times H_2(X) \times H_3(X) \times H_{123}(X)$$

sont différents. Pour cela, on les projette sur $H_1(X) \times H_2(X) \times H_{123}(X)$:

$$p : \overline{f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X,3))} \to H_1(X) \times H_2(X) \times H_{123}(X)$$

$$q : R_{1,2,3,123}(X) \to H_1(X) \times H_2(X) \times H_{123}(X)$$

On considére un point

$$\hat{t} = (x, x, t) \in H_1(X) \times H_2(X) \times H_{123}(X)$$

où $[t]$ est un deux gros point et $x \subset [t]$. On va montrer que la fibre $p^{-1}(\hat{t})$ est réduite à un point et que ce n'est pas le cas de $q^{-1}(\hat{t})$.
Pour la deuxième affirmation, la fibre $q^{-1}(\hat{t})$ est le lieu de $H_3(X) = X$ formé par les x' tels que:

- $[t] \subset x.x.x'$
- $x' \subset [t]$

La première condition est vérifiée car on a déjà $[t] \subset x.x$ La deuxième condition dit alors que $q^{-1}(\hat{t}) = [t]$, qui n'est pas réduit à un point.

Notons W l'image du morphisme p. Pour montrer la première affirmation, il nous suffit de construire un morphisme

$$W \to H_3(X) = X$$

qui envoie un point général $(p_1, p_2, p_1 \cup p_2 \cup p_3)$ de W sur p_3. A l'aide de l'inclusion

$$W \subset H_1(X) \times H_2(X) \times H_{123}(X)$$

on récolte alors un morphisme

$$\varphi : W \to H_1(X) \times H_2(X) \times H_3(X) \times H_{123}(X)$$

qui envoie un point général $(p_1, p_2, p_1 \cup p_2 \cup p_3)$ sur $(p_1, p_2, p_3, p_1 \cup p_2 \cup p_3)$. Donc

$$\varphi(W) \supset f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X,3))$$

et par suite,

$$\varphi(W) \supset \overline{f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X,3))}$$

Les fibres du morphisme

$$\overline{f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X,3))} \to W$$

sont incluses dans les fibres du morphisme

$$\varphi(W) \to W$$

qui sont réduites à un point.
Il nous reste à construire ce morphisme $W \to X$. Soit U l'ouvert $f_{\eta_{1,2,123}}(F(X,3))$ de W. Le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & W \times Hilb^2(X) \\ (p_1, p_2, p_{123}) & \mapsto & (p_1, p_2, p_{123}, p_1 \cup p_2) \end{array}$$

définit une sous-variété

$$\overline{\varphi(U)} \subset W \times Hilb^2(X)$$

Un point $\underline{(p_1, p_2}, p_{123}, p_{12})$ de $\varphi(U)$ vérifie $[p_{12}] \subset [p_{123}]$. Cette condition reste vraie sur $\overline{\varphi(U)}$ et on peut définir

$$\begin{array}{rcl} \psi : \overline{\varphi(U)} & \to & X \\ (p_1, p_2, p_{123}, p_{12}) & \mapsto & Res([p_{12}], [p_{123}]) \end{array}$$

Pour montrer que ψ induit un morphisme $W \to X$, il suffit de vérifier que ψ est constant sur les fibres de la projection

$$\overline{\varphi(U)} \to W$$

Vérifions le sur un point spécial de W. Un tel point est de la forme (p, p, t) où $[t]$ est un deux-gros point de support p. Un point de la fibre est de la forme (p, p, t, d) avec $[d] \subset [t]$ et donc $Res([d], [t]) = p$. Le morphisme ψ est constant sur les fibres.

Cas deux: on a à l'action du groupe près $F_\eta = \{\sigma_{12}\}$ et d'après la proposition 52, on peut supposer que $\eta \supset \sigma_3$ car η et $\eta \cup \sigma_3$ sont identifiables. On a alors deux cas.
Si η ne contient ni σ_1, ni σ_2, alors $\eta = \eta_{3,12,123}$ qui est un des enrichissements modèles. Si η contient σ_1 ou σ_2, par exemple σ_1 par symétrie. Alors η est identifiable à $\eta \cup \sigma_2 = \eta_{1,2,3,12,123}$ qui est l'un des enrichissements modèles.

Cas trois:
on a à permutation près $F_\eta = \sigma^1$. On a deux cas.
Soit $\eta = \eta^1_{123}$ qui est l'un des enrichissements modèles. Soit η contient l'une des structures $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et dans ce cas, η n'est pas admissible. En effet, on peut supposer à symétrie près que $\eta \supset \sigma_1$ ou $\eta \supset \sigma_2$. Considérons alors le point

$$p = (p_2, p_1, p_3, p^1, p_{123})$$

de

$$H_1(X) \times H_2(X) \times H_3(X) \times H^1(X) \times H_{123}(X)$$

avec

$$[p_{ij}] = p_i \cup p_j \quad [p^1] = p_{12} \cup p_{13} \quad [p_{123}] = p_1 \cup p_2 \cup p_3$$

La projection de p sur $H_\eta(X)$ est un point de $R_\eta(X)$ qui n'est pas de la forme $f_\eta(F(X,3))$. On conclut avec le corollaire 64.

Cas quatre: A permutation près, les seules possibilités pour F_η sont

$$(F_\eta \supset \{\sigma_{12}, \sigma^1\} \quad ou \quad F_\eta \supset \{\sigma_{12}, \sigma_{13}\})$$

et

$$F_\eta \subset \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma^1\}$$

Mais par les lemmes d'identification, on peut supposer dans le premier cas que $\eta \ni \sigma_{13}$ et dans le deuxième cas que $\eta \ni \sigma^1$. On s'est donc ramené à $F_\eta = \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma^1\}$ et dans ce cas η est identifiable à $\eta^1_{1,2,3,12,13,123}$ qui est l'un des enrichissements modèles.

Cas cinq:
on a $F_\eta = \{\sigma^{123}\}$ et, à symétrie près, η est l'un des enrichissements suivants:

$$\eta^{123}_{123}, \eta^{123}_{1,123}, \eta^{123}_{1,2,123}, \eta^{123}_{1,2,3,123}$$

Les enrichissements η^{123}_{123} et $\eta^{123}_{1,123}$ font partie des enrichissements modèles. On démontre comme dans le cas un que $\eta^{123}_{1,2,123}$ et $\eta^{123}_{1,2,3,123}$ ne sont pas admissibles.

Cas six:

on peut supposer que le doublet déterminé par la partition est σ_{12} et que le doublet de doublets est σ^3. On a alors $F_\eta \subset \{\sigma_{12}, \sigma^3, \sigma^{123}\}$ et en outre l'une des trois situations suivantes:

- $\eta \supset \{\sigma_{12}, \sigma^3\}$
- $\eta \supset \{\sigma_{12}, \sigma^{123}\}$
- $\eta \supset \{\sigma^{123}, \sigma^3\}$

Dans chacune des situations, on peut trouver un enrichissement η' identifiable à η avec $F_{\eta'} = \{\sigma_{12}, \sigma^{123}, \sigma^3\}$ et $\eta' \ni \sigma_3$.
Si η' ne contient ni σ_1, ni σ_2 alors η' est l'enrichissement modèle $\eta^{3,123}_{3,12,123}$.
Dans le cas contraire, on peut supposer par symétrie que η' contient σ_1 et η' est alors identifiable à l'enrichissement modèle $\eta^{3,123}_{1,2,3,12,123}$.

Cas sept:

- Si η ne contient aucun doublet de doublets, ie. si $F_\eta \cap \{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\} = \emptyset$, alors η contient au moins deux doublets, par exemple σ_{12}, σ_{13}. Il est donc identifiable à un enrichissement contenant $\sigma^1(*)$. On peut donc supposer que η contient σ^1. Maintenant, soit $\eta \supset \sigma_{23}$, soit $\eta \supset \sigma^{123}$. Mais dans le deuxième cas cela impose également σ_{23}. Donc η est identifiable à un enrichissement contenant σ_{12}, σ_{13} et σ_{23}. Mais tous les enrichissements admissibles contenant les trois doublets sont identifiables à η_{max}.

- Si η contient exactement un doublet de doublets, par exemple si $F_\eta = \{\sigma^1\}$. A symétrie près, on peut supposer que η contient σ_{12} et alors σ_{13} est un résiduel. On s'est donc ramené à la situation $(*)$ de ci-dessus.

- Si η contient au moins deux doublets de doublets, par exemple σ^1 et σ^2. Alors η contient au moins une structure σ parmi $\{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$. Sinon, considérons le point

  $$\hat{t} = (p_1, p_2, p_3, p^1, p^1, p^3, p^{123}, p_1 \cup p_2 \cup p_3)$$

  de

  $$H_1(X) \times H_2(X) \times H_3(X) \times H^1(X) \times H^2(X) \times H^3(X) \times H^{123}(X) \times H_{123}(X)$$

  Le point

  $$p_{\eta^{1,2,3,123}_{1,2,3,123}, \eta}(\hat{t})$$

est un point de $R_\eta(X)$ qui n'est pas dans $f_\eta(F(X,3))$ alors que le triplet associé est formé de trois points distincts. Contradiction. Par résiduel, on retrouve alors les deux autres doublets à partir de σ^1, σ^2 et σ. Donc on peut supposer que η contient les trois doublets: il est identifiable à η_{max}. La démonstration du théorème est terminée.

■

4.5 Comparaison aux constructions classiques

Nous allons dans cette section comparer nos variétés de doublets et triplets enrichis aux compactifications de l'espace des configurations dues à Schubert-Semple-Le Barz, Kleiman et Fulton-MacPherson.

4.5.1 La variété de Schubert-Semple

Cette compactification W_6^* de $F(\mathbb{P}^2,3)$ a été introduite par Schubert en 1880 ([Sch]) et la construction a été modernisée bien plus tard par Semple ([Se]-1954). Le Barz a étendu la définition de cette variété de $\mathbb{P}^2$ à toute variété lisse X ([LB]-1988).

La variété W_6^* de Schubert-Semple est la sous-variété de

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{G}(2, \mathbb{P}^5)$$

formée par les

$$(p_1, p_2, p_3, D_{12}, D_{13}, D_{23}, \Sigma)$$

tels que

- la droite D_{ij} contient les points p_i et p_j
- Σ est un réseau de coniques de $\mathbb{P}^2$ contenant les coniques d'idéal $I(D_{ij}).I(D_{jk})$.

Pour résoudre des problèmes de géométrie énumérative, Schubert voulait (même s'il ne le disait pas avec ce langage) une variété universelle lisse paramétrant les triangles du plan, éventuellement dégénérés. Autrement dit, il voulait une variété paramétrant les ensembles de trois points et de trois droites satisfaisant les conditions d'incidence énoncées ci-dessus. Mais une construction de cette variété dans:

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{P}^{2\,*}$$

donnerait une variété singulière. L'introduction du réseau de coniques est un moyen géométrique de désingulariser cette variété.

Le Barz a montré, avec un vocabulaire différent du notre, que l'enrichissement $\eta_{1,2,3,12,13,23,123}$ est admissible et que la variété $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$ (qu'il a notée $\widehat{H^3}(X)$) est lisse. Dans le cas où $X = I\!P^2$, sa construction coïncide avec la construction de Semple. Décrivons, au niveau ensembliste, comment un point de la variété de Le Barz

$$(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123})$$

de

$$X \times X \times X \times Hilb^2(X) \times Hilb^2(X) \times Hilb^2(X) \times Hilb^3(X)$$

définit un point de La variété de Semple. Les droites D_{ij} sont les droites qui contiennent le schéma $[p_{ij}]$. Le réseau de coniques est formé par les coniques qui contiennent $[p_{123}]$.

D'après notre théorème de classification, on sait qu'on a l'isomorphisme

$$R_{1,2,3,12,13,23,123}(X) \simeq R_{max}(X)$$

Donc notre variété de triplets enrichis $R_{max}(X)$ coïncide avec la variété de Semple dans le cas où $X = I\!P^2$, et avec la variété $\widehat{H^3}(X)$ de Le Barz dans le cas général.

4.5.2 Les variétés de Kleiman

Ces compactifications X_r de $F(X, r)$ ont été introduites dans [K] et elles ont été abondamment étudiées depuis ([R],[DO],[W],[Hb] par exemple).

Leur définition est donnée par récurrence sur r. On pose $X_0 = Spec\ k$ et $X_1 = X$. On construit par récurrence des variétés X_r munies d'un morphisme dans X_{r-1}. La variété X_{r+1} est par définition l'éclaté

$$Bl_\Delta\ (X_r \times_{X_{r-1}} X_r)$$

du produit $X_r \times_{X_{r-1}} X_r$ le long de sa diagonale Δ.

Quand X est une surface S, on peut exprimer avec un vocabulaire classique l'information encodée par cette variété universelle. Un point p de S_r définit un r-uplet ordonné $(p_1, \ldots, p_r)$. Chaque p_i est soit un point de S, soit un point infiniment voisin d'un point de S, ie. un point situé sur une surface $\tilde{S}$ obtenue par éclatement successifs de points à partir de S.

Pour $r = 2$, les variétés $X_2 = Bl_\Delta(X \times X)$ et $R_{1,12}(X)$ sont isomorphes.

Keel a montré dans [Kee] que dans le cas où $r = 3$, l'enrichissement

$$\eta_{1,2,3,12,13,123}$$

est admissible et que $R_{1,2,3,12,13,123}(X)$ est isomorphe à la variété de Kleiman X_3.

D'après notre théorème de classification, on sait qu'on a l'isomorphisme

$$R_{1,2,3,12,13,123}(X) \simeq R^1_{1,2,3,12,13,123}(X)$$

Donc notre variété de triplets enrichis $R^1_{1,2,3,12,13,123}(X)$ coïncide avec la variété de Kleiman X_3.

Remarque: Quand X est une surface S, nous noterons cette variété $K_3(S)$ pour éviter toute confusion avec le groupe symétrique S_3.

4.5.3 Les variétés de Fulton-MacPherson

Les compactifications $X[r]$ de $F(X,r)$ construites par Fulton et MacPherson admettent plusieurs définitions, par adhérence, par éclatement, ou encore par propriété universelle. Nous ne comptons pas ici expliquer en détail ces différentes définitions, mais juste expliquer l'information encodée par la variété universelle $X[r]$ ce qui nous suffira.

Fulton et MacPherson définissent un écran en un point x de X comme un ensemble ordonné $p_1, p_2, \ldots, p_s$ de points de l'espace tangent T_xX, non tous égaux, modulo translation et homothétie. La variété $X[r]$ admet un morphisme dans X^r. Un point de $X[r]$ dont l'image dans X^r est le point $(x, x, \ldots, x)$ est définie par un ensemble ordonné d'écrans en x.
Supposons X lisse de dimension m. Considérons un morphisme

$$Spec\ k[[t]] \to X^r$$

envoyant le point générique dans $F(X,r)$ et le point spécial sur $(x, x, \ldots, x)$. Ce morphisme définit un point p de $X[r]$ dont l'image dans X^r est $(x, x, \ldots, x)$, donc un ensemble d'écrans en x. Ces écrans peuvent être définis à partir des trajectoires des r points. Ecrivons dans un système de coordonnées locales en x le trajet de chaque point p_i:

$$p_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_i(j) t^j$$

où les $v_i(j)$ sont des vecteurs de k^m. Soit l le plus petit entier tel que les vecteurs $v_i(l)$ ne soient pas tous égaux. Ces vecteurs, vus comme points de l'espace tangent T_xX définissent un écran en x. C'est le premier écran.

Si tous les vecteurs $v_i(l)$ sont distincts, alors cet écran est l'unique écran associé au point p. Sinon, pour chaque vecteur v pour lequel il existe au moins deux indices i_1 et i_2 pour lesquels $v_{i_1}(l) = v_{i_2}(l) = v$, on redéfinit un ensemble d'écrans E_v. L'ensemble d'écrans associé à p est la réunion du premier écran et des ensembles E_v. Ces ensembles d'écrans E_v sont définis de la façon suivante. On considère l'ensemble I_v des indices i pour lesquels $v_i(l) = v$. Les trajectoires des points

$$p_i \quad (i \in I_v)$$

définissent comme précédemment un écran en x. Si tous les points de cet écran sont distincts, alors cet écran est l'unique écran de E_v. Sinon, on recommence la procédure pour séparer les points qui sont encore confondus dans cet écran. Bien sûr, ce procédé récursif s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes puisque le nombre de points dans les écrans successifs diminue strictement.

Pour $r = 2$, la variété $X[2]$ est isomorphe à $R_{1,12}(X) = Bl_\Delta(X \times X)$. En revanche, pour $r = 3$, la variété $X[3]$ n'est dominée par aucune de nos variétés de triplets.

Proposition 84. *Soit X une variété lisse. Soit η un enrichissement admissible de $\{1, 2, 3\}$ de niveau au plus deux tel que $R_\eta(X)$ soit une compactification de $F(X, 3)$. Il n'existe pas de morphisme*

$$\varphi : R_\eta(X) \to X[3]$$

valant l'identité sur l'ouvert $F(X, 3)$.

Démonstration: puisque $R_{max}(X) = R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$ domine tous les schémas de triplets enrichis de niveau au plus deux, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de morphisme

$$\varphi : R_{1,2,3,12,13,23,123}(X) \to X[3]$$

Considérons deux morphismes φ_1 et φ_2

$$\varphi_i : Spec\ k[[t]] \to X^3$$

envoyant le point générique dans $F(X, 3)$. Ces morphismes induisent des morphismes

$$f_i : Spec\ k[[t]] \to R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$$

$$g_i : Spec\, k[[t]] \to X[3]$$

S'il existe un morphisme φ, alors

$$g_i(0) = \varphi(f_i(0))$$

Choisissons un point x de X et un voisinage formel $Spec\, k[[x_1, \ldots, x_n]]$ de x. Considérons les morphismes:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : Spec\, k[[t]] & \to & X^3 \\ t & \mapsto & ((t,0,0,\ldots,0)\ ,\ (2t,0,0,\ldots,0)\ ,\ (3t,0,0.\ldots,0)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : Spec\, k[[t]] & \to & X^3 \\ t & \mapsto & ((t,0,0,\ldots,0)\ ,\ (t+t^2,0,0,\ldots,0)\ ,\ (3t,0,0.\ldots,0)) \end{array}$$

On a

$$f_1(0) = f_2(0)$$

car, dans les deux cas, la limite de chaque point est $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la limite de chaque doublet est $V(x_1^2, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ et la limite du triplet est $V(x_1^3, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. En revanche,

$$g_1(0) \neq g_2(0)$$

car un seul écran suffit à définir $g_1(0)$ alors qu'il faut deux écrans pour définir $g_2(0)$. Donc un morphisme

$$\varphi : R_{1,2,3,12,13,23,123}(X) \to X[3]$$

prolongeant l'identité n'existe pas.

∎

4.6 Quotients des schémas de triplets enrichis

On a vu à la section 4.6 que chaque variété $R_\eta(X)$ est naturellement munie d'une action de groupe. Dans cette section nous déterminons les quotients des schémas $R_\eta(X)$ par ces actions quand η est l'un des enrichissements mis en évidence par le théorème de classification. La proposition suivante explique que les schémas de triplets enrichis de niveau inférieur ou égal à deux forment une classe stable par quotient par les groupes agissant naturellement. Elle inclut également un quotient partiel dont nous aurons besoin lors de l'étude des variétés de collisions.

On note S_2 et S_3 les groupes de permutation de deux et trois éléments.

Proposition 85. *Supposons le corps k de caractéristique différente de deux et trois. Les groupes agissant sur*

$$R_{123}(X),\ R_{1,123}(X),\ R_{1,2,3,12,123}(X),\ R_{3,12,123}(X)$$

$$R^1_{123}(X),\ R^1_{1,2,3,12,13,123}(X),\ R^{123}_{123}(X),\ R^{123}_{1,123}(X)$$

$$R^{3,123}_{3,12,123}(X),\ R^{3,123}_{1,2,3,12,123}(X),\ R_{max}(X)$$

sont

$$S_3,\ S_2,\ S_2,\ S_2$$

$$S_2,\ S_2,\ S_3,\ S_2$$

$$S_2,\ S_2\ S_3$$

et les quotients respectifs sont

$$R_{123}(X),\ R_{1,123}(X),\ R_{3,12,123}(X),\ R_{3,12,123}(X)$$

$$R^1_{123},\ R^1_{123},\ R^{123}_{123}(X),\ R^{123}_{1,123}(X)$$

$$R^{3,123}_{3,12,123}(X),\ R^{3,123}_{3,12,123}(X),\ R^{123}_{123}(X)$$

Le quotient partiel de $R_{max}(X)$ par S_2 est $R^{3,123}_{3,12,123}(X)$. En outre dans tous les cas, le morphisme quotient est un morphisme d'oubli.

Démonstration: dans les cas 1,2,4,5,7,8,9, le morphisme $G \to Aut(X)$ définissant l'action envoie G sur l'identité donc les groupes sont leur propre quotient.

L'idée pour calculer les autres quotients $R_\eta(X)/G$ est de trouver un enrichissement η' identifiable à η tel que l'action du groupe sur $R_\eta(X)$ soit plus facilement maîtrisable. Toutes les démonstrations étant identiques, nous n'en faisons qu'une. Montrons par exemple $R^1_{1,2,3,12,13,123}(X)/S_2 = R^1_{123}(X)$.

Nous avons vu lors de la classification que $R^1_{1,2,3,12,13,123}(X)$ était identifiable à

$$R^1_{12,13,123}(X) \subset H_{12}(X) \times H_{13}(X) \times H^1(X) \times H_{123}(X)$$

et l'action de S_2 sur cette variété est:

$$\varepsilon.(p_{12}, p_{13}, p^1, p_{123}) = (p_{13}, p_{12}, p^1, p_{123})$$

où ε est l'élément de S_2 différent de l'identité.
Quand la caractéristique du corps est première au cardinal d'un groupe G, quand ce groupe G agit sur un schéma projectif Y en laissant un sous-schéma

Z invariant, le schéma quotient Z/G est naturellement un sous-schéma de Y/G. Dans notre cas, cela veut dire qu'on a:

$$R^1_{12,13,123}(X)/S_2 \hookrightarrow (H_{12}(X) \times H_{13}(X) \times H^1(X) \times H_{123}(X))/S_2$$

Le quotient de droite est isomorphe à

$$(H_{12}(X) \times H_{13}(X))/S_2 \times H^1(X) \times H_{123}(X)$$

car S_2 n'agit pas sur les deux derniers facteurs.
Il existe un morphisme naturel

$$\varphi : H^1(X) = Hilb^{2,2}(X) \to (Hilb^2(X) \times Hilb^2(X))/S_2 = (H_{12}(X) \times H_{13}(X))/S_2$$

Ce morphisme φ définit une sous-variété

$$V \hookrightarrow (H_{12}(X) \times H_{13}(X))/S_2 \times H^1(X) \times H_{123}(X)$$

formée par les (p, q, r) tels que $p = \varphi(q)$. La projection

$$V \to H^1(X) \times H_{123}(X)$$

est un isomorphisme. Le quotient $R^1_{12,13,123}(X)/S_2$ est une sous-variété de V comme on le vérifie en un point général. On peut donc le projeter par un isomorphisme sur $H^1(X) \times H_{123}(X)$. En résumé le morphisme quotient

$$R^1_{1,2,3,12,13,123}(X) \to H^1(X) \times H_{123}(X)$$

s'écrit comme composée:

$$\begin{array}{rcl}
R^1_{1,2,3,12,13,123}(X) \to R^1_{12,13,123}(X) \subset H_{12}(X) \times H_{13}(X) & \times & H^1(X) \times H_{123}(X) \\
 & \downarrow & \\
(H_{12}(X) \times H_{13}(X))/S_2 & \times & H^1(X) \times H_{123}(X) \\
 & \downarrow & \\
H^1(X) & \times & H_{123}(X)
\end{array}$$

C'est donc simplement un morphisme d'oubli et l'image de $R^1_{1,2,3,12,13,123}(X)$ par ce morphisme d'oubli est $R^1_{123}(X)$.

■

Chapitre 5

Classification des variétés de collisions

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant, quand le corps de base est de caractéristique nulle.

Théorème 86. *Pour tout triplet $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$ et toute surface algébrique lisse S, la variété $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ s'identifie à une variété de doublets ou de triplets enrichis de S. L'identification précise est donnée par le tableau de la page suivante.*

Nous commençons par exposer la méthode dans la section 5.1. On y explique la signification des calculs faits ultérieurement. Puis nous démontrons le théorème dans la section 5.2.
Dans ce chapitre, il nous arrivera fréquemment d'identifier p et $[p]$ pour un point p de $Hilb(S)$.

5.1 Explication de la méthode

La méthode se décline de deux manières différentes.

Dans le premier cas, les multiplicités n_1, n_2, n_3 sont distinctes. Considérons l'exemple $n_1 > n_2 > n_3$ et $n_1 + 1 < n_2 + n_3$. On veut montrer

$$Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \simeq R_{max}(S)$$

On va en fait montrer

$$Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \simeq R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$$

ce qui est équivalent d'après notre théorème de classification.

Soit C un point de $Coll(n_1,n_2,n_3)(S)$, non nécéssairement une collision. Le schéma $[C]$ est la fibre spéciale d'un fermé Z de $B\times S$, plat sur une base B irréductible, dont la fibre générale est réunion de trois gros points de taille n_1,n_2 et n_3 et dont une fibre spéciale est $[C]$. Supposons pour simplifier que $B=\mathbb{A}^1$ et que $[C]$ soit la fibre au dessus de 0. Supposons en outre qu'il existe trois morphismes

$$p_i:\mathbb{A}^1\to S\quad(i\leq 3)$$

Conditions numériques	Modèle pour $Coll(n_1,n_2,n_3)(S)$	Variété classique isomorphe au modèle
$n_1=n_2>n_3=0$	$R_{12}(S)$	$Hilb^2(S)$
$n_1>n_2>n_3=0$	$R_{1,12}(S)$	$Bl_\Delta(S\times S)$
$n_1>n_2>n_3>0$ $n_1+1<n_2+n_3$	$R_{max}(S)$	variété de Le Barz $\widehat{H_3}(S)$ variété de Semple W_6^* si $S=I\!\!P^2$
$n_1>n_2>n_3>0$ $n_1+1\geq n_2+n_3$	$R^1_{1,2,3,12,13,123}(S)$	variété de Kleiman $K_3(S)$
$n_1=n_2>n_3=1$	$R_{3,12,123}(S)$	
$n_1=n_2>n_3>1$	$R^{1,123}_{1,23,123}(S)$	quotient $\widehat{H_3}(S)/S_2$ quotient W_6^*/S_2 si $S=I\!\!P^2$
$n_1>n_2=n_3>0$ $n_1+1<n_2+n_3$	$R^{1,123}_{1,23,123}(S)$	quotient $\widehat{H_3}(S)/S_2$ quotient W_6^*/S_2 si $S=I\!\!P^2$
$n_1>n_2=n_3>0$ $n_1+1\geq n_2+n_3$	$R^1_{123}(S)$	quotient $K_3(S)/S_2$
$n_1=n_2=n_3=1$	$R_{123}(S)$	$Hilb^3(S)$
$n_1=n_2=n_3\geq 2$	$R^{123}_{123}(S)$	quotient $\widehat{H_3}(S)/S_3$ quotient W_6^*/S_3 si $S=I\!\!P^2$

tels que la fibre Z_t soit $p_1(t)^{n_1}\cup p_2(t)^{n_2}\cup p_3(t)^{n_3}$ pour $t\neq 0$.

A ce fermé Z, on peut associer trois points p_i de S, trois points p_{ij} de $Hilb^2(S)$ et un point p_{123} de $Hilb^3(S)$:

$$p_i=\lim_{t\to 0}\,p_i(t)$$

$$[p_{ij}] = \lim_{t\to 0} \ p_i(t) \cup p_j(t)$$

$$[p_{123}] = \lim_{t\to 0} \ p_1(t) \cup p_2(t) \cup p_3(t)$$

L'espace qui paramètre ces données p_i, p_{ij}, p_{123}, munies de leurs relations d'incidence naturelles est $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$. Il se trouve que C est entièrement déterminé par ces données, et, en pratique, nous allons construire un morphisme

$$C_{n_1n_2n_3} : \ R_{1,2,3,12,13,23,123}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$$

qui à $\hat{t} = (p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123})$ associe le point C déterminé par $\hat{t}$.

Pour construire le morphisme inverse, nous allons "reconstruire le paramétrage" à partir de C. La reconstruction des points p_1, p_{12}, ... correspond à la construction de morphismes

$$P_1 : Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to S$$

$$D_{12} : Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to Hilb^2(S)$$

$$\ldots$$

Le morphisme

$$(P_1, P_2, P_3, D_{12}, D_{13}, D_{23}, P_{123}) =: \varphi$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi : Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to S^3 \times Hilb^2(S)^3 & \times & Hilb^3(S) \\ & || & \\ H_1(S) \times H_2(S) \times H_3(S) \times H_{12}(S) & \times & H_{13}(S) \times H_{23}(S) \times H_{123}(S) \end{array}$$

se factorise par $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$. C'est le morphisme inverse cherché.

Dans le deuxième cas, certaines multiplicités sont égales. Considérons le cas extrême $n_1 = n_2 = n_3 \geq 2$.
On peut comme précédemment construire un morphisme

$$C_{n_1n_1n_1} : \ R_{1,2,3,12,13,23,123}(S) \to Coll(n_1, n_1, n_1)(S)$$

L'action du groupe symétrique S_3 sur $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$ respecte ce morphisme et on obtient un morphisme quotient

$$R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)/S_3 \to Coll(n_1, n_1, n_1)(S)$$

On peut, étant donnée une collision, reconstruire un triplet et un triplet de doublets, ce qui correspond à un morphisme

$$Coll(n_1, n_1, n_1)(S) \to R_{123}^{123}(S)$$

Notre étude des quotients (section 4.6) nous dit que

$$R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)/S_3 \simeq R_{123}^{123}(S)$$

et on vérifie qu'on a un triangle d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)/S_3 & \rightarrow & Coll(n_1, n_1, n_1)(S) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & R_{123}^{123}(S) & \end{array}$$

5.2 Démonstration du théorème

Dans tout ce chapitre, l'ordre monômial considéré sur $k[x, y]$ est l'ordre homogène avec $y > x$ et le corps est de caractéristique nulle.

5.2.1 Construction des morphismes $C_{n_1 n_2 n_3}$

Proposition 87. *Si $n_1 + 1 \leq n_2 + n_3$, il existe un morphisme*

$$C_{n_1,n_2,n_3} : R_{1,2,3,12,13,23,123}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$$

dont l'image d'un point général $f_{\eta_{1,2,3,12,13,23,123}}(p_1, p_2, p_3)$ est $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$.

Démonstration: puisqu'on a l'inclusion

$$\begin{array}{rcl} R_{1,2,3,12,13,23,123}(S) \subset S^3 \times Hilb^2(S)^3 & \times & Hilb^3(S) \\ & || & \\ H_1(S) \times H_2(S) \times H_3(S) \times H_{12}(S) & \times & H_{13}(S) \times H_{23}(S) \times H_{123}(S) \end{array}$$

on dispose de fermés universels U_i, U_{ij}, U_{123} dans

$$R_{1,2,3,12,13,23,123}(S) \times S$$

dont les fibres au dessus d'un point

$$(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123})$$

sont les schémas $p_i, [p_{ij}]$ et $[p_{123}]$ de S.
Notons I_i, I_{ij} et I_{123} les idéaux de U_i,U_{ij} et U_{123}. Définissons I par:

$$I = \sum_{\alpha_i+\beta_{ij}+\beta_{ik}+\gamma\geq n_i}^{i,j,k\ distincts} I_1^{\alpha_1} I_2^{\alpha_2} I_3^{\alpha_3} I_{12}^{\beta_{12}} I_{13}^{\beta_{13}} I_{23}^{\beta_{23}} I_{123}^{\gamma}$$

Vérifions que I définit une famille plate sur $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$ qui donne le morphisme voulu. Pour un point général $\hat{t}$ de $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$, les fibres des idéaux I_{ij} et I_{123} sont

$$(I_{ij})_{|\hat{t}} = I_{i|\hat{t}} I_{j|\hat{t}}$$
$$I_{123|\hat{t}} = I_{1|\hat{t}} I_{2|\hat{t}} I_{3|\hat{t}}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} I_{|\hat{t}} &= \sum_{a\geq n_1\ \ b\geq n_2\ \ c\geq n_3} I_{1|\hat{t}}^a I_{2|\hat{t}}^b I_{3|\hat{t}}^c \\ &= I_{1|\hat{t}}^{n_1} I_{2|\hat{t}}^{n_2} I_{3|\hat{t}}^{n_3} \end{aligned}$$

La fibre au dessus d'un point général est la réunion de trois gros points de taille n_1, n_2, n_3.
Par semi-continuité, il nous suffit de montrer que la fibre au dessus d'un point spécial de $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$ est ponctuelle de longueur au plus

$$\frac{n_1(n_1+1) + n_2(n_2+1) + n_3(n_3+1)}{2}$$

Pour un point spécial $\hat{t} = q(p, d, t)$, on peut trouver un voisinage formel $Spec\ k[[x, y]]$ de p tel qu'on ait les égalités:

- $I_{1|\hat{t}} = I_{2|\hat{t}} = I_{3|\hat{t}} = (x, y)$
- $I_{12|\hat{t}} = I_{23|\hat{t}} = I_{13|\hat{t}} = (x^2, y)$
- $I_{123|\hat{t}} = (x^2, xy, y^2)$

<u>Le cas $n_1 + n_2 + n_3$ pair</u>
Pour $0 \leq k \leq \frac{-n_1+n_2+n_3}{2}$, $1 \leq l \leq n_1 - n_2$, $0 \leq m \leq n_2 - n_3$, l'idéal $I_{|\hat{t}}$ contient les fonctions:

$$y^{\frac{n_1+n_2-n_3}{2}-k} y^{\frac{n_1-n_2+n_3}{2}-k} y^{\frac{-n_1+n_2+n_3}{2}-k} x^{4k}$$

$$y^{\frac{n_1+n_2-n_3}{2}-k} y^{\frac{n_1-n_2+n_3}{2}-k} y^{\frac{-n_1+n_2+n_3}{2}-k} (x^{4k-1} y)$$

$$y^{\frac{n_1+n_2-n_3}{2}-k} y^{\frac{n_1-n_2+n_3}{2}-k} y^{\frac{-n_1+n_2+n_3}{2}-k} (x^{4k-2} y^2)$$

de

$$I_{12}^{\frac{n_1+n_2-n_3}{2}-k} I_{13}^{\frac{n_1-n_2+n_3}{2}-k} I_{23}^{\frac{-n_1+n_2+n_3}{2}-k} I_{123}^{2k}$$

les fonctions

$$y^{n_1-n_3-l} y^{n_1-n_2-l} (x^2)^{-n_1+n_2+n_3+l} x^l$$
$$y^{n_1-n_3-l} y^{n_1-n_2-l} (x^2)^{-n_1+n_2+n_3+l} (x^{l-1} y)$$

de

$$I_{12}^{n_1-n_3-l} I_{13}^{n_1-n_2-l} I_{123}^{-n_1+n_2+n_3+l} I_1^l$$

et les fonctions

$$x^{n_1-n_2+m} x^m y^{n_2-n_3-m} (x^2)^{n_3}$$

de

$$I_1^{n_1-n_2+m} I_2^m I_{12}^{n_2-n_3-m} I_{123}^{n_3}$$

qui sont représentées dans le graphique qui suit.

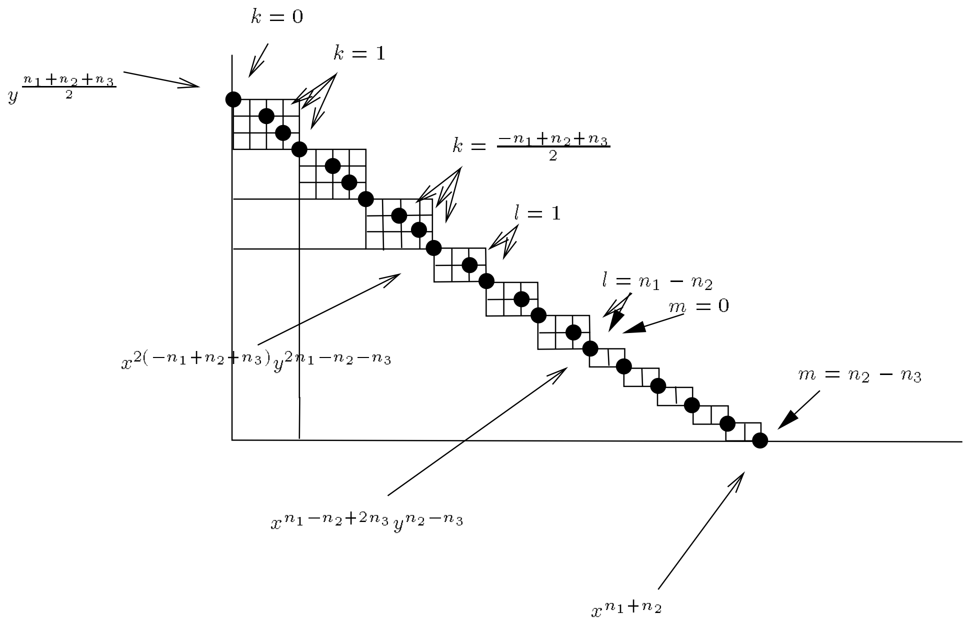
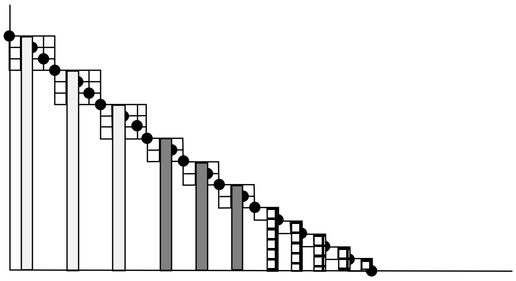


Figure 5.1: Cas $1 + n_1 \leq n_2 + n_3$ et $n_1 + n_2 + n_3$ pair.

La fibre spéciale est un schéma ponctuel de longueur majorée par le cardinal de l'escalier. Donc la famille est plate si l'escalier est de cardinal au plus:

$$\frac{n_1(n_1+1)}{2} + \frac{n_2(n_2+1)}{2} + \frac{n_3(n_3+1)}{2}$$

Pour le voir, on découpe l'escalier comme indiqué sur le dessin suivant. Les



hauteurs des colonnes portant la même hachure forment une suite arithmétique et on peut facilement calculer le nombre de points entiers dans ces colonnes. Les hauteurs des colonnes non hachurées forment également une suite arithmétique. Le calcul mené à son terme montre que l'escalier est de cardinal

$$\frac{n_1(n_1+1)}{2}+\frac{n_2(n_2+1)}{2}+\frac{n_3(n_3+1)}{2}$$

<u>Le cas $n_1+n_2+n_3$ impair:</u>
Pour $0 \leq k \leq \frac{-n_1+n_2+n_3-1}{2}$, $1 \leq l \leq n_1-n_2$, $0 \leq m \leq n_2-n_3$, l'idéal $I_{|\hat{t}}$ contient les fonctions:

$$y^{\frac{n_1+n_2-n_3-1}{2}-k} y^{\frac{n_1-n_2+n_3-1}{2}-k} y^{\frac{-n_1+n_2+n_3-1}{2}-k} x^{4k+2}$$

$$y^{\frac{n_1+n_2-n_3-1}{2}-k} y^{\frac{n_1-n_2+n_3-1}{2}-k} y^{\frac{-n_1+n_2+n_3-1}{2}-k} (x^{4k+1}y)$$

$$y^{\frac{n_1+n_2-n_3-1}{2}-k} y^{\frac{n_1-n_2+n_3-1}{2}-k} y^{\frac{-n_1+n_2+n_3-1}{2}-k} (x^{4k}y^2)$$

de

$$I_{12}^{\frac{n_1+n_2-n_3-1}{2}-k} I_{13}^{\frac{n_1-n_2+n_3-1}{2}-k} I_{23}^{\frac{-n_1+n_2+n_3-1}{2}-k} I_{123}^{2k+1}$$

les fonctions

$$y^{n_1-n_3-l} y^{n_1-n_2-l} (x^2)^{-n_1+n_2+n_3+l} x^l$$

$$y^{n_1-n_3-l} y^{n_1-n_2-l} (x^2)^{-n_1+n_2+n_3+l} (x^{l-1}y)$$

de

$$I_{12}^{n_1-n_3-l} I_{13}^{n_1-n_2-l} I_{123}^{-n_1+n_2+n_3+l} I_1^l$$

et les fonctions

$$x^{n_1-n_2}(x^{2m}y^{n_2-n_3-m})(x^2)^{n_3}$$

de

$$I_1^{n_1-n_2} I_{12}^{n_2-n_3} I_{123}^{n_3}$$

Tous ces monômes peuvent être représentés dans le graphique qui suit.

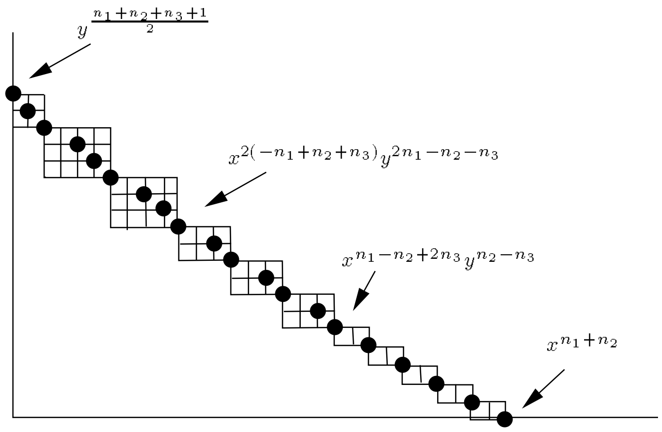


Figure 5.2: Cas $1+n_1 \leq n_2+n_3$ et $n_1+n_2+n_3$ impair.

Un découpage de l'escalier nous montre comme dans le cas pair que l'escalier est de cardinal $\frac{n_1(n_1+1)}{2}+\frac{n_2(n_2+1)}{2}+\frac{n_3(n_3+1)}{2}$.

La famille est donc plate.

∎

Proposition 88. *Si* $n_1+1=n_2+n_3$, *il existe un morphisme*

$$C_{n_1,n_2,n_3} : R_{1,2,3,12,13,123}(S) \to Coll(n_1,n_2,n_3)(S)$$

dont l'image d'un point général $f_{\eta_{1,2,3,12,13,123}}(p_1,p_2,p_3)$ *est* $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$.

Si $n_1=n_2>n_3=1$, *il existe un morphisme*

$$C_{n_1,n_1,1} : R_{12,123}(S) \to Coll(n_1,n_1,1)(S)$$

dont l'image d'un point général $f_{\eta_{12,123}}(p_1,p_2,p_3)$ *est* $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1} \cup p_3$.

Démonstration: puisqu' on a l'inclusion

$$R_{1,2,3,12,13,123}(S) \subset H_1(S)\times H_2(S)\times H_3(S)\times H_{12}(S)\times H_{13}(S)\times H_{123}(S)$$

on dispose comme précédemment des idéaux universels

$$I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{13}, I_{123}$$

mais pas de l'idéal I_{23}. Si on regarde attentivement la démonstration précédente en se limitant au cas $n_1+1=n_2+n_3$, on s'aperçoit que les monômes sont construits sans utiliser l'idéal I_{23}. Cela signifie qu'il existe un morphisme

$$R_{1,2,3,12,13,123}(S) \to Coll(n_1,n_2,n_3)(S)$$

Dans le cas $n_1 = n_2 > n_3 = 1$, on s'aperçoit qu'on n'utilise que les idéaux I_{12} et I_{123} d'où l'existence du morphisme

$$R_{12,123}(S) \to Coll(n_1, n_1, 1)(S)$$

■

Proposition 89. *Si $n_1 + 1 \geq n_2 + n_3$, il existe un morphisme*

$$C_{n_1,n_2,n_3} : R_{1,2,3,12,13,123}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$$

dont l'image d'un point général $f_{\eta_{1,2,3,12,13,123}}(p_1, p_2, p_3)$ est $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$.

Démonstration: le cas $n_1 + 1 = n_2 + n_3$ a été traité dans la proposition précédente. Intéressons nous au cas $n_1 + 1 > n_2 + n_3$. Vérifions que le fermé de $R_{1,2,3,12,13,123}(S) \times S$ d'idéal

$$I = \sum_{\alpha_i+\beta_{ij}+\beta_{ik}+\gamma \geq n_i}^{i,j,k \text{ distincts}} I_1^{\alpha_1} I_2^{\alpha_2} I_3^{\alpha_3} I_{12}^{\beta_{12}} I_{13}^{\beta_{13}} I_{23}^{\beta_{23}} I_{123}^{\gamma}$$

définit une famille plate sur $R_{1,2,3,12,13,123}(S)$ et que le morphisme associé $R_{1,2,3,12,13,123}(S) \to Hilb(S)$ est le morphisme voulu.
Le même raisonnement que dans la proposition 87 montre que la fibre au dessus d'un point général est de la forme $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$.
En un point spécial $\hat{t} = (p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{123})$ de $R_{1,2,3,12,13,123}(S)$, les fibres des idéaux universels sont:

- $I_{1|\hat{t}} = I_{2|\hat{t}} = I_{3|\hat{t}} = (x, y)$
- $I_{12|\hat{t}} = I_{13|\hat{t}} = (x^2, y)$
- $I_{123|\hat{t}} = (x^2, xy, y^2)$

Pour $k \leq n_1 - n_2 - n_3$, $l \leq n_3$, $m \leq n_2 - n_3$, l'idéal $I_{|\hat{t}}$ contient les fonctions:

$$y^{n_2} y^{n_3} (x^k y^{n_1-n_2-n_3-k}) \quad de \quad I_{12}^{n_2} I_{13}^{n_3} I_1^{n_1-n_2-n_3}$$

$$y^{n_2-l} y^{n_3-l} \; x^{n_1-n_2-n_3+l} \; x^{2l} \quad de \quad I_{12}^{n_2-l} I_{13}^{n_3-l} I_1^{n_1-n_2-n_3+l} I_{123}^{l}$$

$$y^{n_2-l} y^{n_3-l} \; x^{n_1-n_2-n_3+l} \; (x^{2l-1} y) \quad de \quad I_{12}^{n_2-l} I_{13}^{n_3-l} I_1^{n_1-n_2-n_3+l} I_{123}^{l}$$

$$(x^{2m} y^{n_2-n_3-m}) \; x^{n_1-n_2} \; (x^2)^{n_3} \quad de \quad I_{12}^{n_2-n_3} I_1^{n_1-n_2} I_{123}^{n_3}$$

La colongueur de la fibre $V(I_{|\hat{t}})$ est majorée par le cardinal de l'escalier. Pour calculer ce cardinal, on découpe l'escalier comme indiqué sur la figure.

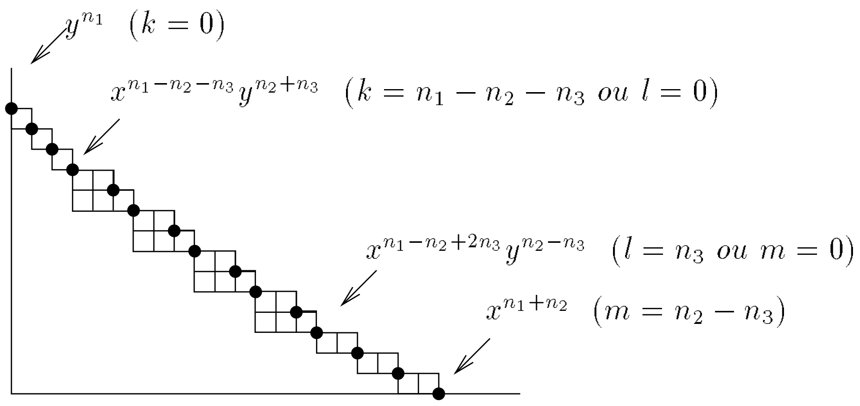
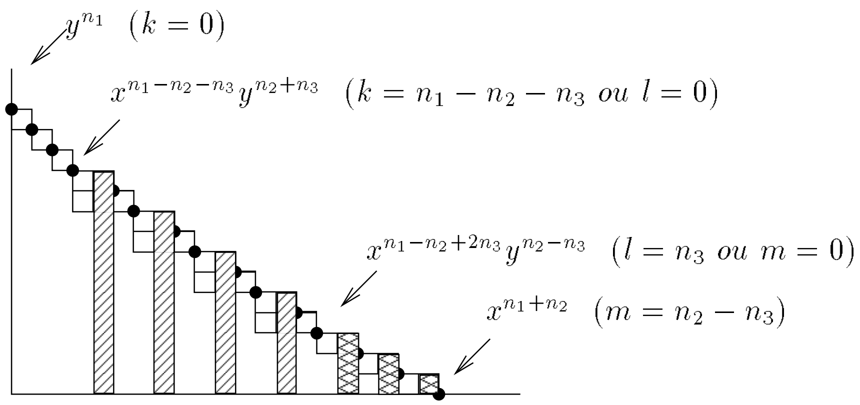


Figure 5.3: Cas $n_1+1>n_2+n_3$.



Les hauteurs des colonnes portant la même hachure forment une suite arithmétique et il est facile de compter le nombre d'élements de l'escalier situés dans ces colonnes. Les hauteurs des colonnes non hachurées forment également une suite arithmétique et on peut calculer le nombre d'éléments de l'escalier situés dans ces colonnes. On vérifie ainsi que le cardinal de l'escalier est $\frac{n_1(n_1+1)}{2}+\frac{n_2(n_2+1)}{2}+\frac{n_3(n_3+1)}{2}$, ce qui nous assure la platitude voulue.

∎

Proposition 90. *Si $n_1>n_2>n_3=0$, il existe un morphisme*

$$C_{n_1,n_2}:R_{1,12}(S)\rightarrow Coll(n_1,n_2)(S)$$

dont l'image d'un point général $f_{\eta_{1,12}}(p_1,p_2)$ est $p_1^{n_1}\cup p_2^{n_2}$.

Si $n_1=n_2>n_3=0$, il existe un morphisme

$$C_{n_1,n_1}:R_{12}(S)=Hilb^2(S)\rightarrow Coll(n_1,n_1)(S)$$

dont l'image d'un point général $p_1 \cup p_2$ *est* $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1}$.

Démonstration: il suffit de remarquer que dans la proposition précédente, sous les conditions numériques ci-dessus, on n'utilise que des monômes de $I_{12}^{n_2} I_1^{n_1-n_2}$ dans le premier cas, et uniquement des monômes de $I_{12}^{n_1}$ dans le deuxième cas.

■

5.2.2 Passages aux quotients

Proposition 91. *Si* $n_1 = n_2 = n_3 = n \geq 2$*, l'action du groupe symétrique* S_3 *sur* $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$ *respecte le morphisme* C_{nnn} *construit à la section précédente.*

Démonstration: il suffit de vérifier que pour un point général

$$\hat{t} \in R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$$

et pour un élément quelconque g de S_3, on a

$$C_{nnn}(g.\hat{t}) = C_{nnn}(\hat{t})$$

Un point $\hat{t}$ général est de la forme $f_{\eta_{1,2,3,12,13,23,123}}(p_1, p_2, p_3)$ et son image est $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$. La permutation des p_i ne modifie pas l'image quand les multiplicités sont égales.

■

Proposition 92. *Si deux des multiplicités* n_1, n_2, n_3 *sont égales, il existe une action du groupe symétrique* S_2 *sur* $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$ *et sur* $R_{1,2,3,12,13,123}(S)$ *qui respecte les morphismes* $C_{n_1 n_2 n_3}$

- $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ *(cas* $n_1 + 1 < n_2 + n_3$*)*
- $R_{1,2,3,12,13,123}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ *(cas* $n_1 + 1 \geq n_2 + n_3$*)*

Démonstration: elle est identique à la précédente.

■

5.2.3 Construction des morphismes inverses

Pour chaque triplet (n_1, n_2, n_3), nous avons mis en évidence un morphisme $R_\eta(S) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ pour un certain enrichissement η. Comme il existe toujours un morphisme d'oubli

$$R_{max}(S) \to R_\eta(S)$$

il existe toujours par composition un morphisme

$$\varphi : R_{max}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$$

Ce morphisme est surjectif car les points généraux

$$p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3} \in Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$$

sont atteints. On en déduit que les $\varphi(T_i)$, où les T_i sont les strates de $R_{max}(S)$, recouvrent $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$. En outre les relations d'incidence existant entre les T_i sont conservées i.e.

$$\overline{T_i} \supset T_j \Rightarrow \overline{\varphi(T_i)} \supset \varphi(T_j)$$

En particulier pour toute strate T_i, la relation d'incidence

$$\overline{\varphi(T_i)} \supset \varphi(S_{g,1})$$

est satisfaite, où $S_{g,1}$ est la strate spéciale de $R_{max}(S)$.

Définition 93. *On dira d'un point de $\varphi(S_{g,1})$ que c'est un point spécial de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$.*

Reconstruction du premier doublet

Proposition 94. *Soient $n_1 > n_2 > n_3$ trois entiers. Il existe un morphisme $\hat{D}_{12} : Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to R_{1,12}(S)$ qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$ sur le point $f_{\eta_{1,12}}(p_1, p_2) = (p_1, p_1 \cup p_2)$.*

Démonstration: notons Z le lieu schématique de

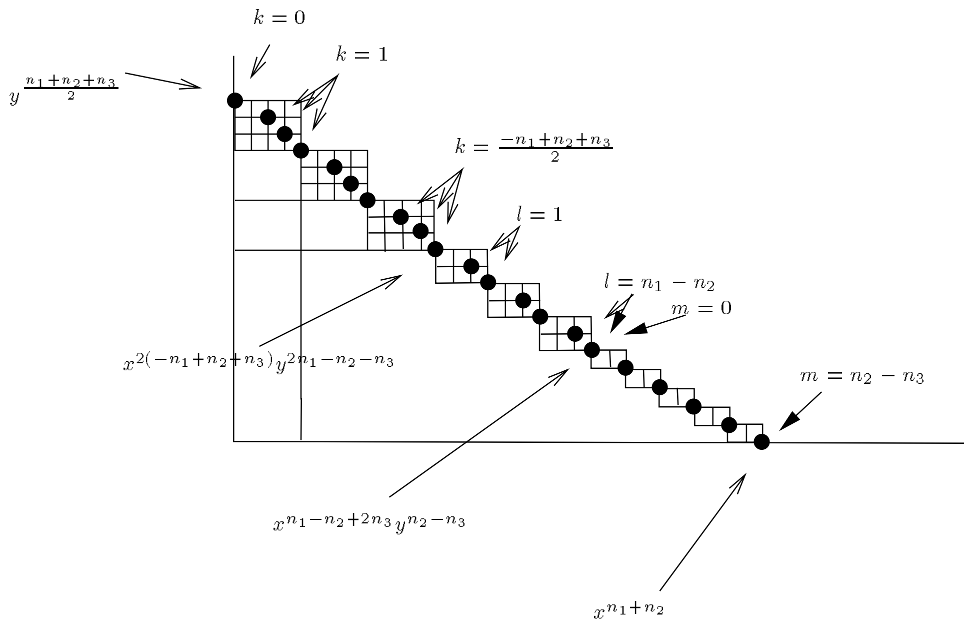
$$Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \times R_{1,12}(S)$$

formé par les couples $(C, \hat{d})$ vérifiant $[C_{n_1,n_2}(\hat{d})] \subset [C]$. Vérifions que la fibre de Z au dessus de tout point C est schématiquement réduite à un point, ce qui donnera le morphisme voulu.

La fibre au dessus d'un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$ est non vide puisqu'elle contient le point $(p_1, p_1 \cup p_2)$.

Soient deux points C_1 et C_2 de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$. S'il existe une strate T_i de $R_{max}(S)$ telle que $\varphi(T_i)$ contienne C_1 et C_2, alors les deux schémas $[C_1]$ et $[C_2]$ sont analytiquement isomorphes. En particulier les fibres Z_{C_1} et Z_{C_2} sont identiques. Par semi-continuité, il nous suffit alors de vérifier que la fibre Z_C est incluse dans un point quand C est un point spécial de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$.

Le schéma $[C]$ correspondant est ponctuel. On peut choisir un voisinage formel $Spec\, k[[x, y]]$ de son support dans lequel $[C]$ est un schéma monômial dont l'idéal $I([C])$ est engendré par les monômes hors de l'un des trois escaliers suivants (suivant les conditions numériques n_2, n_2, n_3).



Un doublet $\hat{d}_0$ qui vérifie $(C, \hat{d}_0) \in Z_C$ est de la forme $\hat{d}_0 = (p, d)$ avec $[d]$ ponctuel différent de $V(x, y^2)$. L'idéal de $[d]$ dans $Spec\, k[[x, y]]$ est alors de la forme:

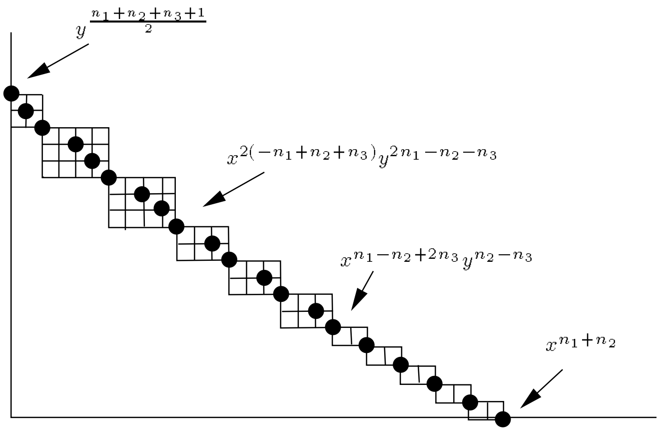
$$I([d]) = (x^2, y + c_0 x)$$

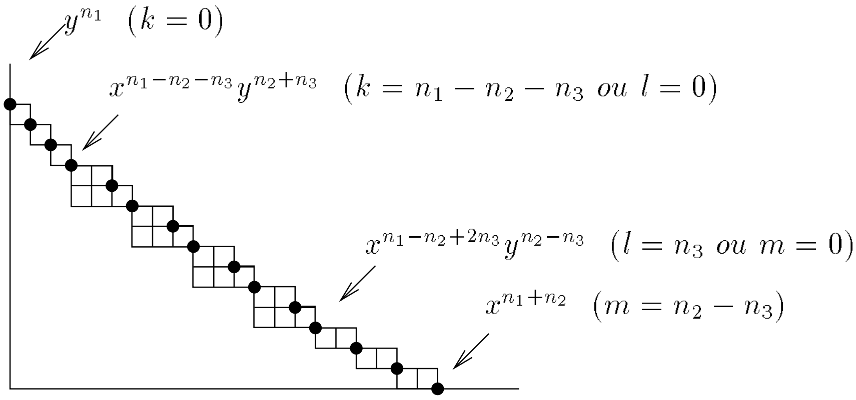
Le voisinage formel de $\hat{d}_0$ dans $R_{1,12}(S)$ est isomorphe à $Spec\, k[[a, b, c, e]]$ et, d'après la proposition 60, les idéaux universels de

$$R_{1,12}(S) \times S \subset (H_1(S) \times H_{12}(S)) \times S$$

sont:

$$I_1 = (x + a, y + (c + c_0)x + e)$$





$$et$$

$$I_{12}=((x+a)(x+b),y+(c+c_0)x+e)$$

D'après la proposition 90, l'idéal $I_{n_1n_2}$ définissant $C_{n_1n_2}(\hat{d})$ au dessus de $Spec\ k[[a,b,c,e]]$ est $I_{12}^{n_2}I_1^{n_1-n_2}$. En particulier, $I_{n_1n_2}$ contient les éléments suivants ($0\leq l\leq n_1-n_2,\ 0\leq m\leq n_2$):

$$(y+(c+c_0)x+e)^{n_2}\ .\ ((y+(c+c_0)x+e)^l.(x+a)^{n_1-n_2-l})$$

$$((y+(c+c_0)x+e)^m.((x+a)(x+b))^{n_2-m})\ .\ (x+a)^{n_1-n_2}$$

Notons J l'idéal engendré par ces éléments. L'idéal J peut s'écrire sous la forme compacte:

$$J=(\ (y+(c+c_0)x+e)^q(x+a)^{e_1(q)}(x+b)^{e_2(q)})$$

$$avec\ \ 0\leq q\leq n_1\quad e_1(q)=n_1-q\quad e_2(q)=sup(0,n_2-q)$$

On a par construction $J \subset I_{n_1n_2}$. Puisque la fibre de $V(I_{n_1n_2})$ au dessus de tout point de $Spec\ k[[a,b,c,e]]$ est ponctuelle de degré $\frac{n_1(n_1+1)}{2}+\frac{n_2(n_2+1)}{2}$, il suffit pour démontrer l'égalité $I=J$ de vérifier que la fibre de $V(J)$ au dessus de tout point de $Spec\ k[[a,b,c,e]]$ est de degré inférieure ou égal à $\frac{n_1(n_1+1)}{2}+\frac{n_2(n_2+1)}{2}$.

Les termes initiaux des générateurs de J pour l'ordre lexicographique homogène avec $y>x$ sont représentés dans le diagramme ci-après.

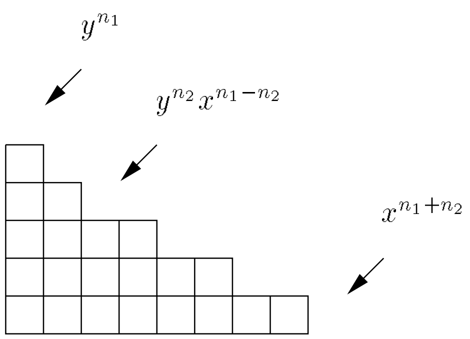


Figure 5.4: Termes initiaux des générateurs de J

Le cardinal de l'escalier ainsi défini est $\frac{n_1(n_1+1)}{2}+\frac{n_2(n_2+1)}{2}$, ce qui assure que $J=I_{n_1n_2}$ et que les générateurs de $J=I_{n_1n_2}$ mis en évidence forment une base de Gröbner unitaire (proposition 21). On contrôle le lieu au dessus duquel $I([C])\subset I_{n_1n_2}$ par divisions.

$$\begin{aligned} x^{n_1+n_2-2}y &= (y+(c+c_0)x+e)(x+a)^{n_1-1}(x+b)^{n_2-1} \\ &\quad \underbrace{-(c+c_0)x^{n_1+n_2-1}+\ autres\ termes\ du\ reste}_{reste} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$c=c_0=0 \text{ sur } Z_C$$

$$\begin{aligned} x^{n_1+n_2} &= (x+a)^{n_1}(x+b)^{n_2} \\ &\quad -\underbrace{(n_1a+n_2b)x^{n_1+n_2-1}+\ autres\ termes}_{reste} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$n_1a+n_2b=0 \text{ sur } Z_C$$

$$x^{n_1+n_2-2} \qquad \begin{aligned} y &= (y+e).(x+a)^{n_1-1}(x+b)^{n_2-1} \\ &\underbrace{-((n_1-1)a+(n_2-1)b)x^{n_1+n_2-3}y + \ autres\ termes}_{reste} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$(n_1-1)a+(n_2-1)b = 0 \text{ sur } Z_C$$

Les entiers n_1 et n_2 étant distincts, les deux dernières équations ne sont pas proportionnelles et on en déduit $a=b=0$ sur Z_C.

$$x^{n_1+n_2-2}y = (y+e)x^{n_1-1}x^{n_2-1} - \underbrace{ex^{n_1-1}x^{n_2-1}}_{reste}$$

$$\Downarrow$$

$$e = 0 \text{ sur } Z_C$$

Puisque $a=b=c=e=c_0=0$, Z_C est le point $\hat{d}_0=(p,d)$ de $R_{1,12}(S)$ vérifiant $I(p)=(x,y)$ et $I([d])=(x^2,y)$. La construction de $\widehat{D}_{12}$ est terminée.

■

Corollaire 95. *Sous les conditions numériques $n_1>n_2>n_3$, il existe des morphismes*

$$D_{12} : Coll(n_1,n_2,n_3)(S) \to Hilb^2(S)$$
$$P_1 : Coll(n_1,n_2,n_3)(S) \to S$$
$$P_2 : Coll(n_1,n_2,n_3)(S) \to S$$

qui envoient un point général $p_1^{n_1}\cup p_2^{n_2}\cup p_3^{n_3}$ sur les points $p_1\cup p_2,\ p_1,\ p_2$.

Démonstration: il suffit de composer le morphisme $\hat{D}_{12}$ précédent avec la projection de

$$R_{1,12}(S) = R_{1,2,12}(S) \subset H_1(S)\times H_2(S)\times H_{12}(S)$$

sur chacun des facteurs.

■

Corollaire 96. *Si $n_1>n_2>0$, les variétés $Coll(n_1,n_2)(S)$ et $R_{1,12}(S)$ sont isomorphes.*

Démonstration: les morphismes $C_{n_1n_2}$ et $\hat{D}_{12}$ sont inverses l'un de l'autre comme on le vérifie en un point général.

■

Proposition 97. *Soient $n_1 = n_2 > n_3 \geq 0$ trois entiers. Il existe un morphisme*

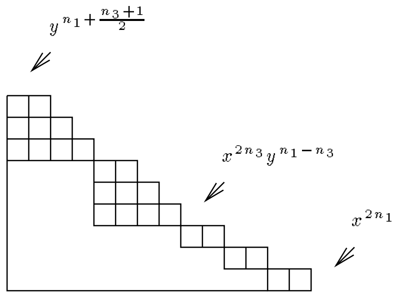
$$D_{12} : Coll(n_1, n_1, n_3)(S) \to Hilb^2(S)$$

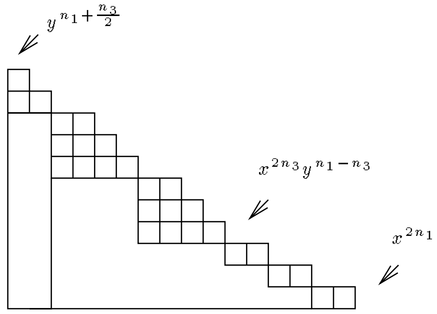
qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1} \cup p_3^{n_3}$ sur le point $(p_1 \cup p_2)$.

Démonstration: soit Z le fermé de $Coll(n_1, n_1, n_3)(S) \times Hilb^2(S)$ formé par les (C, d) tels que $[C_{n_1 n_1}(d)] \subset [C]$. Vérifions que pour tout C de $Coll(n_1, n_1, n_3)(S)$, la fibre Z_C est un point, ce qui donnera le morphisme voulu.

La fibre au dessus d'un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1} \cup p_3^{n_3}$ est non vide: elle contient le doublet $p_1 \cup p_2$.

Soit C un point spécial de $Coll(n_1, n_1, n_3)(S)$. Le schéma $[C]$ est ponctuel de support un point p, et on peut choisir un voisinage formel de p dans lequel $I([C])$ soit engendré par les monômes hors de l'un des escaliers suivants (selon la parité de n_3).





Soit d_0 un point de $Hilb^2(S)$ appartenant à la fibre Z_C. L'idéal de $[d_0]$ est de la forme

$$I([d_0]) = (x^2, y + c_0 x)$$

car $[d_0]$ est ponctuel différent de $V(x, y^2)$. Le voisinage formel de d_0 dans $Hilb^2(S)$ est isomorphe à $Spec\ k[[a, b, c, e]]$. L'idéal I_{12} définissant la famille universelle de

$$Hilb^2(S) \times S$$

est

$$I_{12} = (x^2 + ax + b, y + (c + c_0)x + e)$$

L'idéal $I_{n_1 n_1}$ définissant $[C_{n_1 n_1}(d)]$ au dessus de $Spec\ k[[a, b, c, e]]$ est $I_{12}^{n_1}$

$$I_{n_1 n_1} = (\ (x^2 + ax + b)^p\ (y + (c_0 + c)x + e)^q\ )\ \ avec\ p + q = n_1$$

et les générateurs de $I_{n_1 n_1}$ forment une base de Gröbner unitaire par la proposition 21. On contrôle le lieu d'incidence par divisions.

$$x^{2n_1} = (x^2 + ax + b)^{n_1} \underbrace{-n_1 a x^{2n_1 - 1} + \ autres\ termes}_{reste}$$

$$\Downarrow$$

$$a = 0 \text{ sur } Z_C$$

$$x^{2n_1} = (x^2 + b)^{n_1} \underbrace{-n_1 b x^{2n_1 - 2} + \ autres\ termes}_{reste}$$

$$\Downarrow$$

$$b = 0 \text{ sur } Z_C$$

$$x^{2n_1 - 2} y = (y + (c + c_0)x + e)\ (x^2)^{n_1 - 1} \underbrace{-(c + c_0) x^{2n_1 - 1} - e x^{2n_1 - 2}}_{reste}$$

$$\Downarrow$$

$$c = c_0 = e = 0 \text{ sur } Z_C$$

La fibre Z_C est donc le point de $Hilb^2(S)$ paramétrant le schéma d'équation (x^2, y).

■

Corollaire 98. *Si $n_1 = n_2 > 0$, les variétés $Coll(n_1, n_1)(S)$ et $Hilb^2(S)$ sont isomorphes.*

Démonstration: on vérifie en un point général que les morphismes $C_{n_1 n_1}$ et D_{12} sont inverses l'un de l'autre.

■

Proposition 99. *Si $n_1 = n_2 = n_3 \geq 2$, il existe un morphisme*

$$D^{123} : Coll(n_1, n_1, n_1)(S) \to Hilb^3(Hilb^2(S))$$

qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1} \cup p_3^{n_1}$ sur $p_{12} \cup p_{13} \cup p_{23}$ où p_{ij} est le point de $Hilb^2(S)$ défini par $[p_{ij}] = p_i \cup p_j$.

Démonstration: notons Z le fermé de $Hilb^2(S) \times Coll(n_1, n_1, n_1)(S)$ formé par les (d, C) tels que $[d]^{n_1} \subset [C]$. Les fibres générales Z_C contiennent les trois points p_{ij} distincts. Les fibres spéciales sont incluses dans un schéma ponctuel de longueur trois d'après la proposition 39. Donc Z est plat sur $Coll(n_1, n_1, n_1)(S)$ et D^{123} est le morphisme associé.

■

Reconstruction du deuxième doublet

Proposition 100. *Soient $n_1 > n_2 > n_3 > 0$ trois entiers. Il existe un morphisme $\hat{D}_{13} : Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to R_{1,12}(S)$ qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$ sur le point $f_{\eta_{1,12}}(p_1, p_3) = (p_1, p_1 \cup p_3)$.*

Démonstration: la proposition découle du lemme suivant.

Lemme 101. *Soit Z le lieu de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \times R_{1,12}(S)$ formé par les*

$$(C, \hat{d}) = (C, (p, d))$$

tels que $[C_{n_1 n_3}(\hat{d})] \subset [C]$ et $p = P_1(C)$. La fibre de Z au dessus d'un point C de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ est un schéma Z_C de dimension zéro et de degré

$$(n_2 - n_3 + 1)(n_2 - n_3 + 2)/2 + 1$$

Soit X_C l'intersection de Z_C avec le gros point $\widehat{D}_{12}(C)^{n_2 - n_3 + 1}$. Le schéma X_C est ponctuel de degré $(n_2 - n_3 + 1)(n_2 - n_3 + 2)/2$. On notera $\widehat{D}_{13}$ le morphisme

$$Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to R_{1,12}(S)$$

défini par

$$\widehat{D}_{13}(C) = res(X_C, Z_C)$$

En outre, si C est de la forme $[C] = p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$ alors $\widehat{D}_{13}(C) = \hat{d} = (p, d)$ avec $p = p_1$ et $[d] = p_1 \cup p_3$.

Démonstration du lemme: il suffit de s'intéresser aux fibres générales et spéciales de Z.
Pour un point C général de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$, $[C]$ est de la forme $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$. Un doublet ordonné $\hat{d} = (p, d)$ de Z_C est nécessairement l'un des deux suivants:

- le doublet $\hat{d}_{12}$ défini par $p = p_1$ et $[d] = p_1 \cup p_2$
- le doublet $\hat{d}_{13}$ défini par $p = p_1$ et $[d] = p_1 \cup p_3$

Le schéma Z_C est donc biponctuel inclus dans l'ouvert $f_{\eta_{1,12}}(F(S, 2))$ de $R_{1,12}(S)$. Cet ouvert est isomorphe à l'ouvert $F(S, 2)$, complémentaire de la diagonale dans $S \times S$, l'isomorphisme étant $f_{\eta_{1,12}}$:

$$\begin{array}{rcl} F(S,2) & \to & R_{1,12}(S) \subset S \times Hilb^2(S) \\ (p,q) & \to & (p, p \cup q) \end{array}$$

En utilisant cet isomorphisme, Z_C s'interprète comme le plus grand sous-schéma de $F(S,2)$ sur lequel les relations suivantes sont vérifiées:

$$p^{n_1} \cup q^{n_3} \subset p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$$

$$p = P_1(C) = p_1$$

Le fermé de $F(S,2)$ defini par le lieu où $p = p_1$ est isomorphe à l'ouvert $V = S - p_1$ de S. Le schéma Z_C peut donc être réalisé comme un sous-schéma de V et, moyennant cette identification, Z_C est le plus grand sous-schéma fermé de V formé par les q de V pour lesquels on a la relation

$$q^{n_3} \subset p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$$

Les solutions ensemblistes sont $q = p_2$ et $q = p_3$. Le schéma Z_C ne supporte pas de structure non réduite au point p_3. Analysons la structure non réduite au point p_2. Soient $Spec\ k[[x,y]]$ et $Spec\ k[[a,b]]$ deux voisinages formels de p_2 dans S ($x = -a, y = -b$). La famille universelle définissant q^{n_3} au dessus des points $q \in Spec\ k[[a,b]]$ est $(x+a, y+b)^{n_3}$ et celle définissant $p_2^{n_2}$ est $(x,y)^{n_2}$. La relation $q^{n_3} \subset p_2^{n_2}$ se traduit au niveau des idéaux par l'inclusion

$$(x,y)^{n_2} \subset (x+a, y+b)^{n_3}$$

ou encore par

$$(x-a, y-b)^{n_2} \subset (x,y)^{n_3}$$

Nous allons vérifier que le lieu Y de $Spec\ k[[a,b]]$ au dessus duquel cette inclusion est réalisée admet pour idéal

$$I(Y) = (a^i b^j)\ (i + j = n_2 - n_3 + 1)$$

ce qui montrera que Z_C a la colongueur attendue quand $[C] = p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$.
Pour vérifier le "$\subset$", il suffit de développer les produits $(x-a)^i(y-b)^j$ qui engendrent $(x-a, y-b)^{n_2}$.
Pour vérifier le "$\supset$", nous allons montrer par récurrence sur j variant de 0 à $n_2 - n_3 + 1$ que $a^{n_2-n_3+1-j}b^j = 0$ sur Y. La division

$$(x-a)^{n_2} = \sum_{i=0}^{n_2-n_3} C_{n_2}^i x^{n_2-i}(-a)^i + \underbrace{C_{n_2}^{n_2-n_3+1} x^{n_3-1}(-a)^{n_2-n_3+1} + \ autres\ termes}_{reste}$$

donne $a^{n_2-n_3+1} = 0$
Supposons $a^{n_2-n_3+1-J}b^J = 0$ pour $J \leq j-1$. Développons $(x-a)^{n_2-j}(y-b)^j$.
On obtient

$$\sum_{k=0,l=0}^{k=n_2-j,l=j} C_{n_2-j}^k C_j^l x^k y^l (-a)^{n_2-j-k}(-b)^{j-l}$$

Un terme donné par (k,l) avec $k+l \geq n_3$ est dans $(x,y)^{n_3}$. Si $k+l<n_3$ et $l>0$, la somme des exposants de a et b est au moins égale à n_2-n_3+1 donc le terme est nul. En définitive,$(x-a)^{n_2-j}(y-b)^j$ est dans l'idéal $(x,y)^{n_3}$ ssi

$$\sum_{k<n_3} C^k_{n_2-j} x^k (-a)^{n_2-j-k}(-b)^j$$

est dans $(x,y)^{n_3}$, ce qui ne se produit que si $a^{n_2-n_3+1-j}b^j=0$.

Puisque Z_C a été réalisé comme un sous-schéma de $V=S-p_1$, l'intersection X_C de Z_C avec le gros point $\widehat{D}_{12}(C)^{n_2-n_3+1}$ peut également être réalisée comme un sous-schéma de V. Dans notre cas, $\widehat{D}_{12}(C)$ est le doublet complet $\hat{d}=(p,d)$ avec $p=p_1$ et $[d]=p_1\cup p_2$. Vu comme sous-schéma de V, on a $\hat{D}_{12}(C)=p_2$ et $X_C=p_2^{n_2-n_3+1}$. Par suite X_C est bien de degré $\frac{(n_2-n_3+1)(n_2-n_3+2)}{2}$. Le résiduel de X_C dans Z_C est le point p_3 si on pense à X_C comme un sous-schéma de V, et ce point correspond par les identifications au doublet complet $\hat{d}=(p,d)$ avec $p=p_1$ et $[d]=p_1\cup p_3$. La démonstration du lemme quand C est un point général est terminée.

Soit C un point spécial de $Coll(n_1,n_2,n_3)(S)$. Le schéma $[C]$ est ponctuel et, d'après la démonstration des propositions 87 et 89, il existe un voisinage formel $Spec\, k[[x,y]]$ dans lequel $I([C])$ admet pour générateurs les monômes hors de l'un des escaliers des pages 94 , 96 ou 98. Soit $\hat{d}_0=(p_0,d_0)$ un point de Z_C. Le schéma $[d_0]$ est ponctuel et, puisque $[d_0]$ ne peut être le schéma $V(x^2,y)$, on a

$$I([d_0])=(x^2,y+c_0x)$$

Le voisinage formel de $\hat{d}_0$ dans $R_{1,12}(S)$ est isomorphe à $Spec\ k[[a,b,c,e]]$. Les idéaux universels de $k[[a,b,c,e]]\otimes k[[x,y]]$ définissant les fermés universels de $R_{1,12}(S)\times S$ sont:

$$I_1=(x+a,y+(c+c_0)x+e)$$

$$I_{12}=((x+a)(x+b),y+(c+c_0)x+e)$$

Les fermés de $Spec\ k[[a,b,c,e]]\times Spec\ k[[x,y]]$ dont les fibres au dessus d'un point $\hat{d}=(p,d)$ sont

$$[C_{n_1,n_3}(\hat{d})], P_1(C)$$

ont pour idéaux

$$I_{n_1n_3}=((x+a)^{e_1(k)}(x+b)^{e_2(k)}(y+(c+c_0)x+e)^k)$$

$$avec\ k\leq n_1\quad e_1(k)=n_1-k\quad et\quad e_2(k)=sup(0,n_3-k)$$

$$I(P_1(C))=(x,y)$$

La condition $P_1(C) \subset p$ se traduit au niveau des équations par

$$(x+a, y+(c_0+c)x+e) \subset (x,y)$$

c'est à dire

$$a = e = 0$$

Montrons par récurrence sur $j \leq n_2 - n_3$ que les fonctions

$$(c+c_0)^j b^{n_2-n_3-j+1}$$

s'annulent sur Z_C. La condition $C_{n_1 n_3}(\hat{d}) \subset C$ implique

$$x^{n_1+n_2} \in ((y+(c+c_0)x)^k x^{e_1(k)}(x+b)^{e_2(k)})$$

condition qui peut se réécrire sous la forme

$$(x-b)^{n_1+n_2} \in ((y+(c+c_0)(x-b))^k \ (x-b)^{e_1(k)} \ x^{e_2(k)})$$

Les termes de droite forment une base de Gröbner unitaire de l'idéal qu'ils engendrent. La division

$$\begin{aligned}
(x-b)^{n_1+n_2} &= (x-b)^{n_1} \ (x-b)^{n_2} \\
&= (x-b)^{n_1} x^{n_2} \ + \ C^1_{n_2}(x-b)^{n_1}(-b)x^{n_2-1} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + C^{n_2-n_3}_{n_2}(x-b)^{n_1}(-b)^{n_2-n_3} x^{n_3} \\
&\quad + \underbrace{C^{n_2-n_3+1}_{n_2}(-b)^{n_2-n_3+1}(x-b)^{n_1} x^{n_3-1} + \ autres\ termes}_{reste}
\end{aligned}$$

implique $b^{n_2-n_3+1} = 0$.
Supposons maintenant que pour $J \leq j-1$, $(c+c_0)^J b^{n_2-n_3-J+1} \in I(Z_C)$. On doit avoir

$$y^j x^{n_1+n_2-2j} \in ((y+(c+c_0)x)^k x^{e_1(k)}(x+b)^{e_2(k)})$$

ce qui s'écrit encore

$$(y-(c+c_0)x)^j x^{n_1+n_2-2j} \in (y^k x^{e_1(k)}(x+b)^{e_2(k)})$$

On a la suite d'égalités suivantes concernant le terme de gauche

$$\begin{aligned}
(y-(c+c_0)x)^j x^{n_1+n_2-2j} &= \sum_{k=0}^{j} C^k_j y^k (-c-c_0)^{j-k} x^{j-k} x^{n_1+n_2-2j} \\
&= \sum C^k_j y^k (-c-c_0)^{j-k} x^{n_1+n_2-j-k}
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $x \mapsto x - b$, ce terme est transformé en

$$\begin{aligned} &\sum C_j^k \; y^k (x-b)^{n_1-k} (-c-c_0)^{j-k} (x-b)^{n_2-j} \\ = &\sum_{k=0}^{j} \sum_{i=0}^{n_2-j} C_j^k C_{n_2-j}^i y^k (x-b)^{n_1-k} (-c-c_0)^{j-k} x^i \, (-b)^{n_2-i-j} \end{aligned}$$

et ce doit être un terme de l'idéal

$$(y^k (x-b)^{e_1(k)} x^{e_2(k)}) \quad (0 \leq k \leq n_1)$$

Pour

$$i \geq n_3 - k$$

le terme donné par (i, k) est dans $(y^k \; (x-b)^{e_1(k)} \; x^{e_2(k)})$. Pour

$$i < n_3 - k$$

la somme des exposants de b et $(c + c_0)$ est plus grande que $n_2 - n_3$ donc ce terme est nul par hypothèse de récurrence sauf si $k = 0$. Si

$$k = 0 \text{ et } i < n_3 - 1$$

le terme correspondant au couple (i, k) est un multiple de

$$(c + c_0)^{j-1} b^{n_2-n_3-j+2}$$

donc est nul par hypothèse de récurrence. Tous les termes sont donc dans $I_{n_1 n_3}$ sauf éventuellement le multiple de

$$(x-b)^{n_1} (c+c_0)^j b^{n_2-n_3-j+1} x^{n_3-1}$$

qui correspond à $k = 0$ et $i = n_3 - 1$ Celui-ci n'est dans l'idéal

$$(y^k \; (x-b)^{e_1(k)} \; x^{e_2(k)})$$

que si

$$(c+c_0)^j b^{n_2-j-n_3+1} = 0$$

La récurrence est achevée.

Montrons pour finir $c_0 = 0$ et l'inclusion $Z_C \subset V(c^{n_2-n_3+2})$. L'inclusion $C_{n_1 n_3}(\hat{d}) \subset C$ implique les propositions équivalentes suivantes.

$$x^{n_1-n_2+2n_3-3} y^{n_2-n_3+2} \in ((y + (c+c_0)x)^k x^{e_1(k)} (x-b)^{e_2(k)})$$

$$\Updownarrow$$

$$(y-(c+c_0)x)^{n_2-n_3+2}x^{n_1-n_2+2n_3-3} \in (y^k x^{e_1(k)}(x-b)^{e_2(k)})$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n_2-n_3+2} C^k_{n_2-n_3+2} y^k(-c-c_0)^{n_2-n_3+2-k}x^{n_1+n_3-1-k} \in (y^k x^{e_1(k)}(x-b)^{e_2(k)})$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n_2-n_3+2} C^k_{n_2-n_3+2} y^k(-c-c_0)^{n_2-n_3+2-k}(x-b)^{n_1-k}(x-b)^{n_3-1} \in (y^k(x-b)^{e_1(k)}x^{e_2(k)})$$

Les termes de la somme correspondant à un $k \neq 0$ sont dans l'idéal. Le terme correspondant à $k = 0$ est dans l'idéal ssi $(c+c_0)^{n_2-n_3+2} = 0$ ce qui implique $c_0 = 0$ et $c^{n_2-n_3+2} = 0$.

La fibre Z_C est incluse dans le sous-schéma

$$V(a, e, b^i c^j, c^{n_2-n_3+2}) \ (i+j \geq n_2 - n_3 + 1, i \geq 1)$$

de $Spec\ k[[a, b, c, e]]$ qui est ponctuel de degré

$$\frac{(n_2-n_3+1)(n_2-n_3+2)}{2} + 1$$

Par comparaison avec la fibre générale, on en déduit

$$Z_C = V(a, e, b^i c^j, c^{n_2-n_3+2})$$

Le gros point $\widehat{D}_{12}(C)^{n_2-n_3+1}$ est le sous-schéma de $Spec\ k[[a, b, c, e]]$ d'idéal $(a, b, c, e)^{n_2-n_3+1}$ donc $X_C = Z_C \cap \widehat{D}_{12}(C)^{n_2-n_3+1}$ admet pour idéal

$$I(X_C) = (a, e) + (b, c)^{n_2-n_3+1}$$

Ces équations montrent que $deg(Z_C) = deg(X_C) + 1$. La construction du morphisme $\widehat{D}_{13}$ est terminée.

∎

Corollaire 102. *Par composition avec les projections de*

$$R_{1,12}(S) = R_{1,2,12}(S) \subset S \times S \times Hilb^2(S)$$

sur les deuxième et troisième facteurs, on obtient des morphismes

$$P_3 : Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to S$$

$$D_{13} \to Hilb^2(S)$$

qui envoient un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$ *sur* p_3 *et* $p_1 \cup p_3$.

Proposition 103. *Si $n_1 > n_2 = n_3 > 0$, il existe des morphismes*

$$D^1 : Coll(n_1, n_2, n_2)(S) \to Hilb^2(Hilb^2(S))$$

$$P_1 : Coll(n_1, n_2, n_2)(S) \to S$$

qui envoient un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_2}$ sur $p_{12} \cup p_{13}$ et p_1 (où $[p_{ij}] = p_i \cup p_j$).

Démonstration: avec quelques petites modifications, la construction du lieu Z effectuée dans le lemme précédent reste valable (on supprime la condition $p = P_1(C)$; les divisions à effectuer dans le cas spécial sont différentes mais sont bien plus simples car il n'y a pas de récurrence à gérer). On dispose donc d'un fermé Z de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \times R_{1,12}(S)$ dont la fibre au dessus de tout point C de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ est de dimension zéro et de degré $(n_2 - n_3 + 1)(n_2 - n_3 + 2)/2 + 1 = 2$. Mais si on regarde plus précisément les fibres Z_C, on s'aperçoit qu'elles sont incluses dans un schéma de la forme

$$P_1(C) \times Hilb^2(S) \subset S \times Hilb^2(S)$$

La fibre détermine donc un point $P_1(C)$ et un schéma de degré deux $[D^1(C)]$ de $Hilb^2(S)$, ce qui nous définit les morphismes P_1 et D^1.
La description des morphismes en les points généraux vient de la description de Z effectuée précédemment.

∎

La projection p de $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$ sur

$$H_{12}(S) \times H_{13}(S) \times H_{23}(S) \times H_{123}(S)$$

est un isomorphisme sur l'image. L'isomorphisme inverse se construit à l'aide de morphismes résiduels (un point

$$(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123}) \in R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$$

vérifie les relations $p_i = Res([p_{jk}], [p_{123}])$). En particulier, on peut définir un morphisme

$$C_{n_1 n_2 n_3} : p(R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$$

Proposition 104. *Soient $n_1 = n_2 > n_3 > 1$ trois entiers. Soit Z le lieu de*

$$Coll(n_1, n_1, n_3)(S) \times p(R_{1,2,3,12,13,23,123}(S))$$

formé par les

$$(C, \hat{t} = (p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123}))$$

tels que $p_{12} = D_{12}(C)$ et $[C_{n_1 n_1 n_3}(\hat{t})] \supset [C]$. La fibre de Z au dessus de tout point C est de dimension zéro et de degré deux.

Démonstration: la fibre au dessus d'un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1} \cup p_3^{n_3}$ contient les deux points

$$(p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123}) \ \ et \ \ (p_{12}, p_{23}, p_{13}, p_{123})$$

Soit C un point spécial de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$. Il est monômial et son idéal est engendré par les monômes hors d'un des escaliers des pages 94 ou 96. Pour un point $(p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123})$ de la fibre spéciale, l'idéal de $[p_{12}] = [D_{12}(C)]$ est (x^2, y), les doublets $[p_{13}]$ et $[p_{23}]$ sont différents de (y^2, x) et l'idéal du triplet $[p_{123}]$ ne contient pas de forme linéaire.

Les équations de $[p_{13}], [p_{23}]$ et $[p_{123}]$ sont donc de la forme

$$\begin{gathered}(y + a_0 x, x^2)\\(y + f_0 x, x^2)\\(x^2 + u_0 x + v_0 y + w_0, xy + u_0' x + v_0' y + w_0', y^2 + u_0'' x + v_0'' y + w_0'')\end{gathered}$$

Le voisinage formel de p_{13} dans $Hilb^2(S)$ est isomorphe à $Spec\ k[[a, b, c, e]]$ et l'idéal universel I_{13} de $Hilb^2(S) \times S$ correspondant est

$$I_{13} = (y + (a + a_0)x + b, x^2 + cx + e)$$

Le voisinage formel de p_{23} dans $Hilb^2(S)$ est isomorphe à $Spec\ k[[f, g, h, l]]$ et l'idéal universel I_{23} de $Hilb^2(S) \times S$ correspondant est

$$I_{23} = (y + (f + f_0)x + g, x^2 + hx + l)$$

Le voisinage formel de p_{123} dans $Hilb^3(S)$ est isomorphe à

$$Spec\ k[[u, v, u', v', u'', v'']]$$

et l'idéal universel I_{123} de $Hilb^3(S) \times S$ correspondant est

$$\begin{aligned}I_{123} = (x^2 + (u + u_0)x + (v + v_0)y + w, xy + (u' + u_0')x + (v' + v_0')y + w',\\ y^2 + (u'' + u_0'')x + (v'' + v_0'')y + w'')\end{aligned}$$

où w, w', w'' sont des fonctions algébriques de

$$u_0, u_0', u_0'', u, u', u'', v_0, v_0', v_0'', v, v', v''$$

La condition $[D_{12}(C)] \subset [p_{123}]$ donne

$$u = u' = u'' = u_0 = u_0' = u_0'' = 0$$

L'idéal qui définit $C_{n_1 n_1 n_3}(\hat{t})$ est

$$I = \sum_{\alpha_i+\beta_{ij}+\beta_{ik}+\gamma \geq n_i} I_1^{\alpha_1} I_2^{\alpha_2} I_3^{\alpha_3} I_{12}^{\beta_{12}} I_{13}^{\beta_{13}} I_{23}^{\beta_{23}} I_{123}^{\gamma}$$

En particulier les fonctions

$$y^{n_1-n_3}(x^2+(v+v_0)y+w)^{n_3}$$

$$y^{n_1-n_3}(x^2+(v+v_0)y+w)^{n_3-1}(xy+(v'+v'_0)y+w')$$
$$y^{n_1-n_3}(x^2+(v+v_0)y+w)^{n_3-1}(y^2+(v''+v''_0)y+w))$$

de

$$I_{12}^{n_1-n_3} I_{123}^{n_3}$$

sont dans $I([C_{n_1 n_2 n_3}(\hat{t})]) \subset I([C])$. Divisons ces éléments par les générateurs de $I([C])$.

$$\begin{aligned} y^{n_1-n_3}(x^2 \quad &+ \quad (v+v_0)y+w)^{n_3} = y^{n_1-n_3}x^{2n_3} \\ &+ \quad \underbrace{n_3 x^{2n_3-2}(v_0+v)y^{n_1-n_3+1} \; + \; n_3 x^{2n_3-2} w y^{n_1-n_3} + \; \text{autres termes}}_{reste} \end{aligned}$$

Donc $v = v_0 = w = 0$ sur Z_C.

$$\begin{aligned} y^{n_1-n_3}(x^2)^{n_3-1}(xy \quad &+ \quad (v'+v'_0)y+w') = y^{n_1-n_3+1}x^{2n_3-1} \\ &+ \quad \underbrace{(v'+v'_0)y^{n_1-n_3+1}x^{2n_3-2} + w' y^{n_1-n_3} x^{2n_3-2}}_{reste} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{n_1-n_3}(x^2)^{n_3-1}(y^2 \quad &+ \quad (v''+v''_0)y+w'') = y^{n_1-n_3+2}x^{2n_3-2} \\ &+ \quad \underbrace{(v''+v''_0)y^{n_1-n_3+1}x^{2n_3-2} + w'' y^{n_1-n_3} x^{2n_3-2}}_{reste} \end{aligned}$$

donc $w' = w'' = v' = v'_0 = v'' = v''_0 = 0$ sur Z_C. Par suite, le triplet $[p_{123}]$ a pour équations (x^2, xy, y^2). Les conditions $[p_{13}] \subset [p_{123}]$ et $[p_{23}] \subset [p_{123}]$ donnent

$$b = g = c = e = h = l = 0$$

L'idéal I contient également la fonction

$$(y+(a+a_0)x)(y+(f+f_0)x)y^{n_1-n_3+1}(x^2)^{n_3-2}$$

de

$$I_{13} I_{23} I_{12}^{n_1-n_3+1} I_{123}^{n_3-2}$$

$$\begin{aligned}(y \quad + \quad & (a+a_0)x)(y+(f+f_0)x)y^{n_1-n_3+1}(x^2)^{n_3-2} = y^{n_1-n_3+3}x^{2n_3-4} \\ + \quad & \underbrace{((a+a_0)+(f+f_0))y^{n_1-n_3+2}x^{2n_3-3}+(a+a_0)(f+f_0)y^{n_1-n_3+1}x^{2n_3-2}}_{reste}\end{aligned}$$

donc $a_0 + a + f + f_0 = 0$ et $(a+a_0)(f+f_0) = 0$ sur Z_C, ce qui implique $a_0 = f_0 = 0$ et $a + f = a^2 = f^2 = 0$. La fibre spéciale Z_C est de degré au plus deux.

■

Corollaire 105. *Soient $n_1 = n_2 > n_3 > 1$ trois entiers. Il existe quatre morphismes*

$$D^3 : Coll(n_1, n_1, n_3)(S) \to Hilb^2(Hilb^2(S))$$

$$P_{123} : Coll(n_1, n_1, n_3)(S) \to Hilb^3(S)$$

$$D^{123} : Coll(n_1, n_1, n_3)(S) \to Hilb^3(Hilb^2(S))$$

$$P_3 : Coll(n_1, n_1, n_3)(S) \to S$$

qui envoient un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1} \cup p_3^{n_3}$ sur les points

$$f_{\eta^3}(p_1, p_2, p_3), \;\; p_1 \cup p_2 \cup p_3, \;\; f_{\eta^{123}}(p_1, p_2, p_3), \;\; p_3$$

Démonstration: en regardant de plus près les équations des fibres Z_C dans la démonstration précédente, on s'aperçoit qu'il existe schématiquement un seul point $P_{123}(C)$ de $Hilb^3(S)$ tel que

$$Hilb^2(S) \times Hilb^2(S) \times Hilb^2(S) \times [P_{123}(C)] \supset Z_C$$

ce qui définit P_{123}. On voit également qu'il existe un unique point $D^3(C)$ vérifiant

$$[D_{12}(C)] \times [D^3(C)] \times [D^3(C)] \times Hilb^3(S) \supset Z_C$$

ce qui définit D^3. Le morphisme D^{123} s'obtient à partir des morphismes D_{12}, D^3 et P_{123} comme dans le lemme 77. Le morphisme P_3 est le résiduel de D_{12} dans P_{123}.

■

Corollaire 106. *Soient $n_1 = n_2 > n_3 > 1$ trois entiers. Les variétés $R^{3,123}_{3,12,123}(S)$ et $Coll(n_1, n_1, n_3)(S)$ sont isomorphes.*

Démonstration: on a construit un morphisme

$$C_{n_1n_1n_3}/S_2 : R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)/S_2 \to Coll(n_1, n_1, n_3)(S)$$

Réciproquement, on dispose du morphisme

$$\varphi : (P_3, D_{12}, D^3, D^{123}, P_{123})$$

$$\varphi : Coll(n_1, n_1, n_3)(S) \to S \times Hilb^2(S) \times Hilb^{2,2}(S) \times Hilb^{3,2}(S) \times Hilb^3(S)$$

Ce morphisme φ peut être décrit entièrement sur les points généraux de $Coll(n_1, n_1, n_3)(S)$ puisqu'on a décrit les morphismes $P_3, \ldots, P_{123}$ sur les points généraux. On voit ainsi que φ se factorise par

$$\begin{array}{rcl} R^{3,123}_{3,12,123}(S) \subset H_3(S) \times H_{12}(S) & \times & H_{123}(S) \times H^3(S) \times H^{123}(S) \\ & || & \\ S \times Hilb^2(S) & \times & Hilb^3(S) \times Hilb^{2,2}(S) \times Hilb^{3,2}(S) \end{array}$$

L'étude des quotients effectuée au chapitre précédent nous donne un isomorphisme

$$R^{3,123}_{3,12,123}(S) \simeq R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)/S_2$$

Moyennant cet isomorphisme, les morphismes φ et $C_{n_1n_1n_3}$ sont inverses l'un de l'autre comme on le vérifie en un point général.

∎

Reconstitution du triplet

Proposition 107. *Si $n_1 = n_2 > n_3 = 1$, il existe un morphisme*

$$P_{123} : Coll(n_1, n_1, 1)(S) \to Hilb^3(S)$$

qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1} \cup p_3$ sur $p_1 \cup p_2 \cup p_3$.

Démonstration: soit

$$Z \subset Coll(n_1, n_1, 1)(S) \times Hilb^3(S)$$

le sous-schéma fermé formé par les (C, t) tels que

$$[t] \supset [D_{12}(C)] \quad et \quad [C_{n_1n_11}(D_{12}(C), t)] \supset [C]$$

La fibre de Z au dessus d'un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1} \cup p_3$ contient le triplet $p_1 \cup p_2 \cup p_3$.

Soit C un point spécial de $Coll(n_1, n_1, 1)(S)$. L'idéal de $[C]$ correspond à l'escalier de la page 96 et $I([D_{12}(C)]) = (x^2, y)$. Un point t de la fibre Z_C est tel que $I([t])$ ne contient pas de forme linéaire, donc un tel $[t]$ a pour équations

$$(x^2 + u_0 x + v_0 y + w, xy + u_0' x + v_0' y + w', y^2 + u_0'' x + v_0'' y + w'')$$

La condition

$$[t] \supset [D_{12}(C)]$$

donne

$$u_0 = u_0' = u_0'' = w = w' = w'' = 0$$

Le voisinage formel de t dans le lieu W de $Hilb^3(S)$ formé par les triplets contenant $[D_{12}(C)]$ est isomorphe à

$$Spec\, k[[v, v', v'']]$$

et l'idéal universel de $Hilb^3(S)$ au dessus de ce voisinage formel est

$$(x^2 + (v + v_0)y, xy + (v' + v_0')y, y^2 + (v'' + v_0'')y)$$

L'idéal $I_{n_1 n_1 1}$ définissant $C_{n_1 n_1 1}(D_{12}(C), t)$ contient les fonctions

$$y^{n_1 - 1}(x^2 + (v + v_0)y)$$

$$y^{n_1 - 1}(xy + (v' + v_0')y)$$

$$y^{n_1 - 1}(y^2 + (v'' + v_0'')y)$$

de

$$I_{12}^{n_1 - 1} I_{123}$$

Ces fonctions ne sont dans l'idéal $I([C])$ que si

$$v = v' = v'' = v_0 = v_0' = v_0'' = 0$$

Donc la fibre spéciale est réduite à un point.

■

Corollaire 108. *Si $n_1 = n_2 > n_3 = 1$, les variétés $Coll(n_1, n_1, 1)(S)$ et $R_{3,12,123}(S)$ sont isomorphes.*

Démonstration: on définit le morphisme

$$P_3 : Coll(n_1, n_1, 1) \to S$$

par

$$P_3(C) = Res(D_{12}(C), P_{123}(C))$$

Les morphismes

$$C_{n_1 n_1 1} : R_{3,12,123}(S) \to Coll(n_1, n_1, 1)(S)$$

et

$$(P_3, D_{12}, P_{123}) : Coll(n_1, n_1, 1)(S) \to R_{3,12,123}(S)$$

sont des morphismes inverses.

■

Proposition 109. *Si $n_1 > n_2 > n_3 > 0$, il existe un morphisme*

$$P_{123} : Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to Hilb^3(S)$$

qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$ sur $(p_1 \cup p_2 \cup p_3)$.

Démonstration: définissons le fermé

$$U \subset (Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \times Hilb^3(S)) \times S$$

dont la fibre au dessus d'un point (C, t) de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \times Hilb^3(S)$ est le sous-schéma $U(C, t)$ d'idéal J

$$J = \sum_{\alpha_i + \beta_{ij} + \beta_{ik} + \gamma \geq n_i} I(P_1(C))^{\alpha_1} I(P_2(C))^{\alpha_2} I(P_3(C))^{\alpha_3} I([D_{12}(C)])^{\beta_{12}} I([D_{13}(C)])^{\beta_{13}} I([t])^{\gamma}$$

Soit Z le lieu de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \times Hilb^3(S)$ formé par les (C, t) tels que

$$[t] \supset [D_{12}(C)] \ , \ [t] \subset [D_{12}(C).P_3(C)] \ , \ U(C, t) \supset [C]$$

La fibre de Z au dessus d'un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$ est non vide puisqu'elle contient le triplet $[t] = p_1 \cup p_2 \cup p_3$.
Quand C est un point spécial de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$, $[C]$ est monômial et on peut choisir un voisinage formel $Spec\ k[[x, y]]$ de son support dans lequel ses équations sont données par l'un des escaliers des pages 94, 96 ou 98. Les équations des schémas

$$P_1(C), \quad P_2(C), \quad P_3(C), \quad [D_{12}(C)], \quad [D_{13}(C)], \quad [P_3(C)].[D_{12}(C)]$$

sont
$$(x,y),\quad (x,y),\quad (x,y),\quad (x^2,y),\quad (x^2,y)\quad (x^3,xy,y^2)$$
Un point $[t]$ de Z_C a le même escalier qu'un deux gros point et une base de Gröbner de $I([t])$ s'écrit:
$$(x^2+u_0x+v_0y+w_0, y^2+u_0'x+v_0'y+w_0', xy+u_0''x+v_0''y+w_0'')$$
Le voisinage formel de t dans $Hilb^3(S)$ est isomorphe à
$$Spec\ k[[u,v,u',v',u'',v'']]$$
La famille universelle de $Hilb^3(S)$ au dessus de ce voisinage formel a un idéal engendré par des éléments de la forme:
$$\begin{array}{c}(x^2+(u_0+u)x+(v_0+v)y+(w_0+w)\quad ,\\ y^2+(u_0'+u')x+(v_0'+v')y+(w_0'+w')\quad ,\\ xy+(u_0''+u'')x+(v_0''+v'')y+(w_0''+w''))\end{array}$$
On montre par division que les conditions $[D_{12}(C)]\subset[t]$ et $P_3(C)[D_{12}(C)]\supset[t]$ donnent:
$$u_0=u=w_0=w=u_0'=u'=v_0'=v'=w_0'=w'=$$
$$=u_0''=u''=v_0''=v''=w_0''=w''=0$$
La fonction
$$x^{n_1-n_2}\ y^{n_2-n_3}\ (x^2+(v+v_0)y)^{n_3}$$
de
$$I(P_1(C))^{n_1-n_2}\ I([D_{12}(C)])^{n_2-n_3}\ I([t])^{n_3}$$
doit être une fonction de $I([C])$, donc $v=v_0=0$ sur Z_C qui est un point.

∎

Corollaire 110. *Si $n_1>n_2>n_3\geq 1$ et $1+n_1\geq n_2+n_3$, les variétés $Coll(n_1,n_2,n_3)(S)$ et $R^1_{1,2,3,12,13,123}(S)$ sont isomorphes.*

Démonstration: les morphismes
$$C_{n_1n_2n_3}:R_{1,2,3,12,13,123}(S)\to Coll(n_1,n_2,n_3)(S)$$
et
$$(P_1,P_2,P_3,D_{12},D_{13},P_{123}):Coll(n_1,n_2,n_3)(S)\to R_{1,2,3,12,13,123}(S)$$
sont inverses l'un de l'autre comme on le vérifie en un point général. D'autre part, la classification des variétés de triplets enrichis assure que
$$R_{1,2,3,12,13,123}(S)\simeq R^1_{1,2,3,12,13,123}(S)$$

■

Proposition 111. *Si $n_1 > n_2 = n_3 > 0$, il existe un morphisme P_{123} : $Coll(n_1, n_2, n_2)(S) \to Hilb^3(S)$ qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_2}$ sur $(p_1 \cup p_2 \cup p_3)$.*

Démonstration: soit Z le lieu de $Coll(n_1, n_2, n_2)(S) \times Hilb^3(S)$ formé par les (t, C) tels que $[D^1(C)] \subset [t]$. Si $[C]$ est de la forme $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_2}$, la fibre Z_C contient le triplet $[t] = p_1 \cup p_2 \cup p_3$. Il faut vérifier que les fibres spéciales Z_C sont réduites à un point, mais cela découle du corollaire 73.

■

Corollaire 112. *Si $n_1 > n_2 = n_3 > 0$ et $n_3 + n_2 \leq n_1 + 1$, les variétés $Coll(n_1, n_2, n_2)(S)$ et $R^1_{123}(S)$ sont isomorphes.*

Démonstration: on vérifie en un point général que les morphismes

$$C_{n_1 n_2 n_2}/S_2 : R_{1,2,3,12,13,123}(S)/S_2 = R^1_{123}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_2)(S)$$

et

$$(D^1, P_{123}) : Coll(n_1, n_2, n_2)(S) \to R^1_{123}(S)$$

sont des morphismes inverses.

■

Proposition 113. *Si $n_1 = n_2 = n_3 \geq 2$, il existe un morphisme P_{123} : $Coll(n_1, n_1, n_1)(S) \to Hilb^3(S)$ qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_1} \cup p_3^{n_1}$ sur $(p_1 \cup p_2 \cup p_3)$.*

Démonstration: soit Z le lieu de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \times Hilb^3(S)$ formé par les (C, t) tels que $[D^{123}(C)] \subset [t]$. Il faut vérifier que les fibres spéciales Z_C sont réduites à un point mais cela découle du corollaire 73.

■

Corollaire 114. *Si $n_1 = n_2 = n_3 \geq 2$, les variétés $Coll(n_1, n_1, n_1)(S)$ et $R^{123}_{123}(S)$ sont isomorphes.*

Démonstration: on vérifie en un point général que les morphismes

$$C_{n_1 n_1 n_1}/S_3 : R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)/S_3 = R^{123}_{123}(S) \to Coll(n_1, n_1, n_1)(S)$$

et

$$(D^{123}, P_{123}) : Coll(n_1, n_1, n_1)(S) \to R^{123}_{123}(S)$$

sont des morphismes inverses.

■

Reconstruction du troisième doublet

Proposition 115. *Si $n_1 > n_2 > n_3 \geq 1$ et $n_2 + n_3 > n_1 + 1$, il existe un morphisme $D_{23} : Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to Hilb^2(S)$ qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$ sur $(p_2 \cup p_3)$.*

Démonstration: soit Z le lieu de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \times Hilb^2(S)$ formé par les (C, d) tels que

$$\hat{t} = (P_1(C), P_2(C), P_3(C), D_{12}(C), D_{13}(C), d, P_{123}(C)) \in R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$$

et

$$[C_{n_1 n_2 n_3}(\hat{t})] \supset [C]$$

Vérifions que les fibres Z_C sont ponctuelles de degré un, ce qui définit D_{23}. La fibre au dessus d'un point $C = p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_3}$ contient le doublet $p_2 \cup p_3$.

Quand C est un point spécial de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$, son idéal est monômial dans un certain voisinage formel de son support. Cet idéal est défini par les monômes de l'un des escaliers des pages 94 ou 96. Un doublet d_0 de la fibre spéciale admet pour idéal $(y + a_0 x + b_0, x^2 + c_0 x + e_0)$. Puisque $[P_{123}(C)]$ a pour équations (x^2, xy, y^2), la condition $[d_0] \subset [P_{123}(C)]$ donne $c_0 = e_0 = b_0 = 0$. Le voisinage formel de d_0 dans le lieu W de $Hilb^2(S)$ formé par les doublets inclus dans $[P_{123}(C)]$ est isomorphe à $Spec\ k[[a]]$. L'idéal universel I_{23} de $Hilb^2(S) \times S$ au dessus de $Spec\ k[[a]]$ est

$$I_{23} = (y + (a + a_0)x, x^2)$$

Toute fonction de

$$I([D_{12}(C)])^{n_1 - n_3 + 1} I([D_{13}(C)])^{n_1 - n_2 + 1} I_{23} I([P_{123}(C)])^{n_2 + n_3 - n_1 - 2}$$

doit s'annuler sur $[C]$, en particulier la fonction

$$y^{n_1 - n_3 + 1} y^{n_1 - n_2 + 1} (y + (a + a_0)x)(x^2)^{n_2 + n_3 - n_1 - 2}$$

ce qui donne $a = a_0 = 0$. La fibre spéciale est incluse dans un point.

■

Corollaire 116. *Si $n_1 > n_2 > n_3 \geq 1$ et $n_2 + n_3 > n_1 + 1$, les variétés $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ et $R_{max}(S)$ sont isomorphes.*

Démonstration: on vérifie en un point général que les morphismes

$$C_{n_1,n_2,n_3} : R_{1,2,3,12,13,23,123}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$$

et

$$(P_1, P_2, P_3, D_{12}, D_{13}, D_{23}, P_{123}) : Coll(n_1, n_2, n_3)(S) \to R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$$

sont des morphismes inverses. Et on sait par notre classification que les variétés $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$ et $R_{max}(S)$ sont isomorphes.

■

Avec quelques modifications mineures par rapport à la démonstration de la proposition 115, on peut montrer:

Proposition 117. *Si $n_1 > n_2 = n_3 \geq 1$ et $n_2 + n_3 > n_1 + 1$, il existe un morphisme $D_{23} : Coll(n_1, n_2, n_2)(S) \to Hilb^2(S)$ qui envoie un point général $p_1^{n_1} \cup p_2^{n_2} \cup p_3^{n_2}$ sur $(p_2 \cup p_3)$.*

Corollaire 118. *Si $n_1 > n_2 = n_3 \geq 1$ et $n_2 + n_3 > n_1 + 1$, les variétés $Coll(n_1, n_2, n_2)(S)$ et $R^{1,123}_{1,23,123}(S)$ sont isomorphes.*

Démonstration: on peut définir comme dans le lemme 77 un morphisme

$$D^{123} : Coll(n_1, n_2, n_2)(S) \to Hilb^{3,2}(S)$$

à partir des morphismes

$$D_{23}, D^1 \text{ et } P_{123}$$

et on définit le morphisme

$$P_1 : Coll(n_1, n_2, n_2)(S) \to S$$

par

$$P_1(C) = Res([D_{23}(C)], [P_{123}(C)])$$

On vérifie en un point général que les morphismes

$$C_{n_1 n_2 n_2}/S_2 : R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)/S_2 = R^{1,123}_{1,23,123}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_2)(S)$$

et

$$(P_1, D_{23}, D^1, D^{123}, P_{123}) : Coll(n_1, n_2, n_2)(S) \to R^{1,123}_{1,23,123}(S)$$

sont des morphismes inverses.

■

Dans le tableau du théorème, il ne reste à vérifier que

$$Coll(1, 1, 1)(S) \simeq Hilb^3(S)$$

mais c'est équivalent à l'irréductibilité du schéma de Hilbert de trois points, qui est bien connue. La démonstration du théorème est terminée.

■

Chapitre 6

Collisions et idéaux complets

Dans ce chapitre, nous décrivons les collisions de trois gros points en termes d'idéaux complets. La théorie des idéaux complets dans les anneaux réguliers de dimension deux est bien comprise, mais il n'existe pas de référence canonique sur le sujet. Les références existantes sont nombreuses ([C], [Hb1], [Lip], [LJ], [W], [ZS] ...) et le vocabulaire employé est souvent très différent d'une référence à l'autre: algébrique, géométrique local ou encore géométrique employant la théorie des faisceaux. Pour cette raison, nous commençons dans la section 6.1 par des rappels (sans démonstration), avant de décrire les collisions en termes d'idéaux complets dans la section 6.2. Les rappels ne cherchent pas à être exhaustifs. On se contente au contraire de donner les définitions et résultats nécessaires pour la section suivante.

6.1 Théorie des idéaux complets

Définition 119. *Soit I un idéal d'un anneau A. Un élément f de A est dit entier sur I s'il vérifie une relation*

$$f^s + g_1 f^{s-1} + \cdots + g_s = 0, \ g_j \in I^j, \quad 1 \leq j \leq s$$

L'ensemble $\overline{I}$ des éléments de A entiers sur I est un idéal de A appelé clôture intégrale de I dans A. Un idéal I d'un anneau A est dit intégralement clos ou complet si $I = \overline{I}$

Proposition 120. *Soit S une surface lisse et I un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_S$. Il existe un unique faisceau d'idéaux $\overline{I}$ de $\mathcal{O}_S$ dont le germe $\overline{I}_s$ en tout point s de S est la clôture intégrale de I_s dans le germe $\mathcal{O}_{s,S}$.*

Définition 121. *Un faisceau d'idéaux I de $\mathcal{O}_S$ est dit complet si $I = \overline{I}$. Un sous-schéma X de S est complet si $I(X)$ est complet. Le schéma d'idéal $\overline{I(X)}$ sera appelé le complété de X.*

Soit s un point de S. Notons $\mathfrak{m}_s$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{s,S}$.

Proposition 122. *Soit I_s un idéal complet de $\mathcal{O}_{s,S}$. Alors $I_s = fJ_s$ pour un élément f de $\mathcal{O}_{s,S}$ et un idéal J_s de $\mathcal{O}_{s,S}$, complet et $\mathfrak{m}_s$ primaire.*

Cette dernière proposition nous incite à nous concentrer sur les schémas complets de dimension zéro. Pour pouvoir en donner une bonne description géométrique, il nous faut introduire de nouvelles définitions.

Suivant [W], on dit qu'une suite de points $(p_0, p_1, \ldots, p_{r-1})$ est une préconstellation de S si:

- $p_0 \in S_0 := S$
- $p_{i+1} \in S_{i+1} := Bl_{p_i}(S_i)$

On appelle préamas une préconstellation $(p_0, \ldots, p_{r-1})$ dans laquelle chaque point p_i est affecté d'une certaine multiplicité m_i. On notera ce préamas $(p_0^{m_0}, \ldots, p_{r-1}^{m_{r-1}})$.
Une préconstellation définit donc une suite d'éclatements:

$$S_0 \overset{\pi_1}{\leftarrow} S_1 \overset{\pi_2}{\leftarrow} S_2 \ldots S_{r-1} \overset{\pi_r}{\leftarrow} S_r$$

et, pour $j > i$, on note $\pi_{j,i}$ la composée

$$\pi_{j,i} = \pi_j \circ \pi_{j-1} \circ \cdots \circ \pi_{i+1} : S_j \to S_i$$

On parlera de constellation et d'amas au lieu de préconstellation et de préamas si, pour tout $i > 0$, $\pi_{i,0}(p_i) = p_0$.
Chaque point p_i définit un diviseur exceptionnel $Q_i^{i+1} := \pi_{i+1,i}^{-1}(p_i)$ de S_{i+1}. Pour $s > i+1$, on note Q_i^s la transformée stricte de Q_i^{i+1} par l'éclatement

$$\pi_{s,i+1} : S_s \to S_{i+1}$$

On définit $E_i^{i+1} := Q_i^{i+1}$ et, pour $s > i+1$, E_i^s est la transformée totale de E_i^{i+1} par $\pi_{s,i+1}$.

Définition 123. *Soient $i > j$ deux entiers. On dira que p_i est proche de p_j si $p_i \in Q_j^i$.*

Proposition 124. *Un point p_i est proche d'au plus deux points p_j et p_k.*

Définition 125. *Si p_i est proche de deux points p_j et p_k, on dira qu'il est satellite. Dans le cas contraire, on dira que c'est un point libre.*

Proposition 126. *Notons $Div(S_r)$ le groupe abélien libre formé par les diviseurs de S_r. Le sous-groupe abélien de $Div(S_r)$ engendré par les E_i^r $(i < r)$ coïncide avec le sous-groupe abélien engendré par les Q_i^r, et les formules de changement de base sont:*

$$Q_i^r = E_i^r - \sum_{p_j \text{ proche de } p_i} E_j^r$$

Etant donnée une préconstellation $(p_0, \ldots, p_{r-1})$ de S, il est équivalent de se donner:

- des multiplicités $m_0, \ldots, m_{r-1}$
- un préamas $(p_0^{m_0}, \ldots, p_{r-1}^{m_{r-1}})$
- un diviseur exceptionnel $\sum m_i E_i^r$ de S_r
- un diviseur exceptionnel $\sum m_i' Q_i^r$ de S_r grâce aux formules de changement de base.

Proposition 127. *Soit $D = \sum m_i E_i^r$ un diviseur exceptionnel de S_r. Notons $D_1.D_2$ l'intersection de deux diviseurs D_1 et D_2 de S_r. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- $\forall i, D.Q_i^r \leq 0$
- $\forall i,\ m_i \geq \sum_{p_j \text{ proche de } p_i} m_j$

On dira dans ce cas que D est déchargé.

Proposition 128. *Soit X un sous-schéma complet de S de dimension zéro. Il existe une suite d'éclatements de points*

$$S_0 \leftarrow S_1 \leftarrow \ldots \leftarrow S_r$$

et un diviseur exceptionnel effectif D de S_r tel que

$$I(X) = (\pi_{r,0})_* \mathcal{O}(-D)$$

Si on impose à D d'être déchargé, alors D est unique. En notant ce diviseur

$$D = \sum m_i E_i^r$$

la colongueur de X est $\sum \frac{m_i(m_i+1)}{2}$.

Nous allons maintenant décrire un algorithme permettant de déterminer si un schéma de dimension zéro est complet, et quel est le diviseur déchargé définissant ce schéma. On utilisera cet algorithme pour montrer que les collisions de trois gros points sont des schémas complets.

Description de l'algorithme

Soit X un sous-schéma de S de dimension zéro. Nous allons définir une suite finie de surfaces S_i et sur chaque surface un schéma X_i de dimension zéro. On commence avec la surface $S_0 := S$ et le schéma $X_0 := X$. Supposons que l'on ait défini S_i et X_i. On choisit un point p_i quelconque du support de X_i. La surface S_{i+1} est l'eclatée de S_i en p_i. Notons m_i la multiplicité de X_i en p_i. On dispose du diviseur exceptionnel E_i^{i+1} de S_{i+1}. Le faisceau produit

$$\pi^*_{i+1,i}(I(X_i)).\mathcal{O}_{S_{i+1}}(m_i E_i^{i+1})$$

est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{S_{i+1}}$. Il définit un schéma de dimension zéro de S_{i+1} qu'on note X_{i+1}.

Proposition 129. *La colongueur de X_i est strictement décroissante donc l'algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini r d'étapes quand le schéma X_r de S_r est vide.*

Notation 130. *On notera D_X le diviseur $\sum m_i E_i^r$ de S_r.*

Remarque: dans les étapes successives de l'algorithme, il faut choisir le point p_i qu'on éclate. Cependant on a unicité de l'éclatement $S_r \to S$. Plus précisément, pour deux choix d'éclatements

$$\pi : S_r \to S$$

$$\pi' : S'_r \to S$$

définissant deux diviseurs D_X et D'_X de S_r et S'_r, il existe un isomorphisme

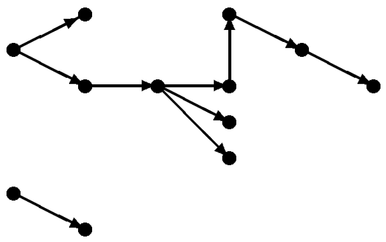
$$\varphi : S_r \to S'_r$$

qui envoie D_X sur D'_X et tel que $\pi' \circ \varphi = \pi$.

Proposition 131. *Le diviseur $D_X = \sum m_i E_i^r$ est déchargé. Le sous-schéma de S d'idéal $(\pi_{r,0})_*\mathcal{O}(-D_X)$ est le complété de X, et il est de colongueur $\sum \frac{m_i(m_i+1)}{2}$. En particulier X est complet ssi $\sum \frac{m_i(m_i+1)}{2} = col(X)$.*

Nous allons nous donner un moyen graphique de décrire les points libres et les points satellites. On trouvera de plus amples informations sur cette approche dans [SK]. Nous allons associer à une préconstellation un graphe plan qui vérifiera les propriétés suivantes:

- tout point p_i de la préconstellation correspond à un point P_i du graphe
- les segments reliant les points du graphe sont des segments orientés



- il existe au plus un segment arrivant à chaque point du graphe
- on distingue trois types de segments dans le graphe: horizontaux, verticaux et obliques

Définition 132. *On dira que deux points P et Q du graphe sont consécutifs s'il existe un segment de P vers Q.*

On appelle coude horizontal (resp. vertical) d'extrémités P_1 et P_r une suite de points consécutifs $P_1, P_2, \dots, P_r$ tels que le segment joignant P_1 à P_2 ne soit pas horizontal (resp. vertical) et, pour $i \geq 2$, tous les segments de P_i vers P_{i+1} sont horizontaux (resp. verticaux). Un coude est un coude horizontal ou vertical. Un coude maximal est un coude $P_1, P_2, \dots, P_r$ qui ne peut pas être prolongé en un coude $P_1, \dots, P_r, P_{r+1}$.

Nous allons définir par récurrence sur $r \geq 1$ le graphe d'une préconstellation $(p_0, \dots, p_{r-1})$. Outre les conditions ci-dessus, ce graphe vérifiera la condition suivante. Si pour deux entiers $j > i$, les diviseurs Q_i^r et Q_j^r de S_r se rencontrent, alors

- soit les points P_i et P_j du graphe sont deux points consécutifs et, pour tout point P du graphe, la suite (P_i, P_j, P) n'est pas un coude
- soit il existe un coude maximal d'extrémités P_i et P_j

Si $r = 1$, le graphe associé à la préconstellation $(p_0, \dots, p_{r-1}) = (p_0)$ est réduit à un point et il n'y a pas de segment.

Le graphe G_r associé à la préconstellation $(p_0, \dots, p_r)$ s'obtient à partir du graphe G_{r-1} de $(p_0, \dots, p_{r-1})$ en ajoutant exactement un point P_r et, au plus, un segment arrivant à ce point.

Si le point p_r n'est pas sur un diviseur exceptionnel Q_i^r de S_r, on ajoute P_r mais aucun segment.

Si le point p_r est sur un unique diviseur exceptionnel Q_i^r, on ajoute un point P_r et un segment oblique de P_i vers P_r.

Si le point p_r est à l'intersection de deux diviseurs exceptionnels Q_i^r et Q_j^r $(j > i)$, et s'il existe un coude maximal

$$(R_0 := P_i, R_1, \ldots, R_l := P_j)$$

on ajoute un point P_r et un segment de P_j vers P_r de sorte que

$$(R_0 = P_i, R_1, \ldots, R_l = P_j, P_r)$$

soit encore un coude.

Si le point p_r est à l'intersection de deux diviseurs exceptionnels Q_i^r et Q_j^r $(j > i)$, et si P_i et P_j sont deux points consécutifs de G_{r-1}, on ajoute un point P_r et un segment de P_j vers P_r de sorte que (P_i, P_j, P_r) soit un coude (si P_i et P_j sont reliés par un segment oblique, le segment reliant P_j et P_r est indifféremment horizontal ou vertical).

Les relations de proximité se lisent facilement sur le graphe:

Proposition 133. *Pour qu'un point p_j d'une constellation $(p_0, \ldots, p_{r-1})$ soit proche d'un point p_i $(j > i)$, il faut et il suffit qu'une des deux conditions suivantes soit vérifiée:*

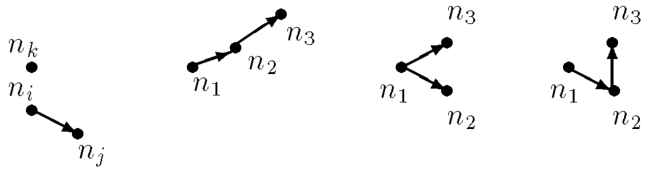
- *les points P_i et P_j du graphe G_r sont consécutifs*
- *il existe un coude (non nécessairement maximal) d'extrémités P_i et P_j.*

Définition 134. *On appelle type combinatoire un graphe comme ci-dessus dans lequel chaque point est muni d'une multiplicité.*

A une préconstellation $(p_0, \ldots, p_{r-1})$, on peut associer un graphe G_{r-1} muni de points $P_0, \ldots, P_{r-1}$. Donc à un préamas $(p_0^{m_0}, \ldots, p_{r-1}^{m_{r-1}})$, on peut associer un type combinatoire en attribuant la multiplicité m_i à chaque point P_i du graphe. Puisqu'il est équivalent de se donner un préamas ou un diviseur exceptionnel, on peut parler du type combinatoire d'un diviseur exceptionnel et, puisqu'un schéma X de dimension zéro de S définit un éclatement et un diviseur exceptionnel D_X, on peut parler du type combinatoire d'un schéma de dimension zéro.

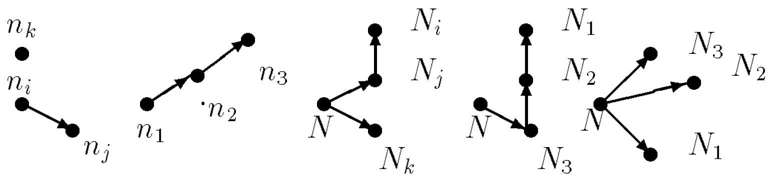
6.2 Application aux collisions

Dans [W], Walter a montré les deux théorèmes suivants:



Théorème 135. *Soient n_1, n_2, n_3 trois entiers vérifiant $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ et $n_1 \geq n_2 + n_3$. Un sous-schéma C de S est collision de trois gros points de taille n_1, n_2, n_3 ssi il est complet et si son type combinatoire est l'un des suivants (i, j, k distincts, $i > j$).*

Théorème 136. *Soient $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ trois entiers tels que $n_1 < n_2 + n_3$. Un sous-schéma complet de S dont le type combinatoire est l'un des suivants est une collision de trois gros points de taille n_1, n_2, n_3 (N_i est la partie entière de $\frac{n_1+n_2+n_3}{2} - n_i$, N la partie supérieure de $\frac{n_1+n_2+n_3}{2}$, i, j, k sont distincts, $i > j$).*



T_{ij} T_{cur} $T_{g,ij}$ $T_{g,1}$ $T_{g,3}$

Nous allons maintenant utiliser l'étude du chapitre précédent pour montrer le résultat suivant.

Théorème 137. *Soient $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ trois entiers tels que $n_1 < n_2 + n_3$. Un sous-schéma C de S est collision de trois gros points de taille n_1, n_2, n_3 ssi son type combinatoire est l'un de ceux exhibés par Walter.*

Démonstration: dans le cas $n_1 < n_2 + n_3$, on a construit un morphisme surjectif

$$C_{n_1 n_2 n_3} : R_{1,2,3,12,13,23,123}(S) \to Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$$

Un sous-schéma C de S est une collision de trois gros points de taille n_1, n_2, n_3 ssi il est de la forme $[C_{n_1 n_2 n_3}(\hat{t})]$ pour un point $\hat{t}$ d'une des strates

$$S_{g,3},\ S_{g,1},\ S_{cur},\ S_{g,ij},\ S_{ij}$$

de $R_{1,2,3,12,13,23,123}(S)$ (voir page 61 la définition des strates).
Si $\hat{t}$ est un point de $S_{g,3}$, le schéma $C = [C_{n_1 n_2 n_3}(\hat{t})]$ s'obtient comme une collision de trois gros points

$$C = \lim_{t \to 0} p_1(t)^{n_1} \cup p_2(t)^{n_2} \cup p_3(t)^{n_3}$$

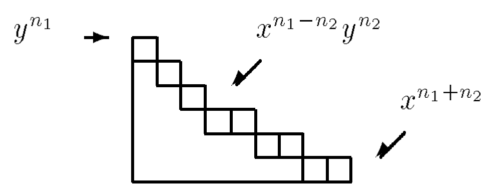
où les trois points p_{ij} de $Hilb^2(S)$ définis par

$$[p_{ij}] = \lim_{t \to 0} \; p_i(t) \cup p_j(t)$$

sont trois points distincts. Dans ce cas, Walter a montré que C est un schéma complet de type combinatoire $T_{g,3}$.

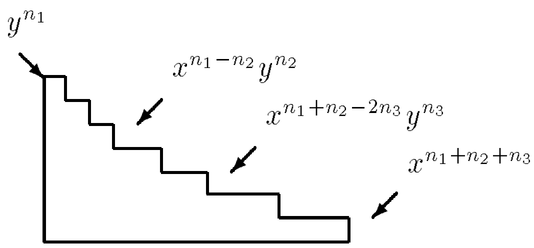
Pour un point $\hat{t}$ de l'une des autres strates, l'idéal du schéma $[C_{n_1n_2n_3}(\hat{t})]$ est monômial.
On a déja vu que si $\hat{t}$ est dans $S_{g,1}$, son idéal est défini par l'un des escaliers des pages 94 ou 96 suivant la parité de $n_1 + n_2 + n_3$.
En utilisant les même techniques, on montre que

- si $\hat{t}$ est dans S_{12}, $[C_{n_1n_2n_3}(\hat{t})]$ est la réunion d'un gros point de taille n_3 et d'un schéma dont l'idéal est monômial défini par l'escalier suivant

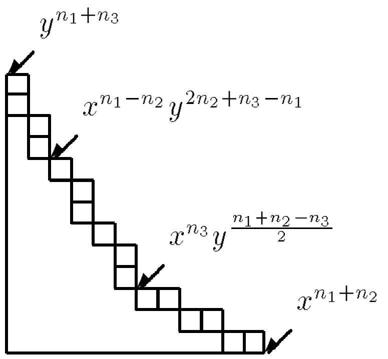


- si $\hat{t}$ est dans S_{13} ou S_{23}, l'idéal de $[C_{n_1n_2n_3}(\hat{t})]$ s'obtient par permutation des indices 1,2 et 3 à partir de l'idéal précédent

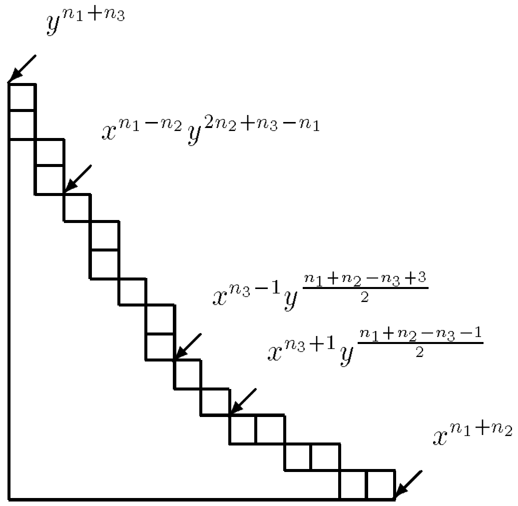
- si $\hat{t}$ est dans S_{cur}, l'idéal du schéma $[C_{n_1n_2n_3}(\hat{t})]$ est monômial défini par l'escalier suivant



- si $\hat{t}$ est dans $S_{g,12}$ et $n_1 + n_2 + n_3$ pair, l'idéal du schéma $[C_{n_1n_2n_3}(\hat{t})]$ est monômial défini par l'escalier suivant



- si $\hat{t}$ est dans $S_{g,12}$ et $n_1+n_2+n_3$ impair, l'idéal du schéma $[C_{n_1n_2n_3}(\hat{t})]$ est monômial défini par l'escalier suivant



- si $\hat{t}$ est dans $S_{g,13}$ ou $S_{g,23}$, l'idéal de $[C_{n_1n_2n_3}(\hat{t})]$ s'obtient par permutation des indices 1,2 et 3 à partir des deux idéaux précédents

Il nous reste à montrer que ces schémas ont les types combinatoires voulus. Pour cela, il suffit d'appliquer l'algorithme décrit dans la section précédente qui explique comment trouver le diviseur D_X associé à un schéma de dimension zéro X. Faisons le par exemple dans le cas où $\hat{t}$ est dans $S_{g,1}$ et $n_1+n_2+n_3$ pair. Les autres cas se traitent de la même façon.
Dans ce cas, l'idéal de la collision est défini par l'escalier de la page 94. A l'aide d'un morphisme $Spec\ k[[x,y]] \to Spec\ k[x,y]$, on peut voir ce schéma comme un sous-schéma de $\mathbb{A}^2$, ce qui ne change pas son type combinatoire. L'éclaté de $\mathbb{A}^2$ en $(0,0)$ est recouvert par deux cartes isomorphes à $\mathbb{A}^2$, et on

dispose de deux éclatements affines

$$E_i : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$$

Au niveau des fonctions, le premier éclatement correspond à

$$\varphi_1 : (x, y) \mapsto (x, xy)$$

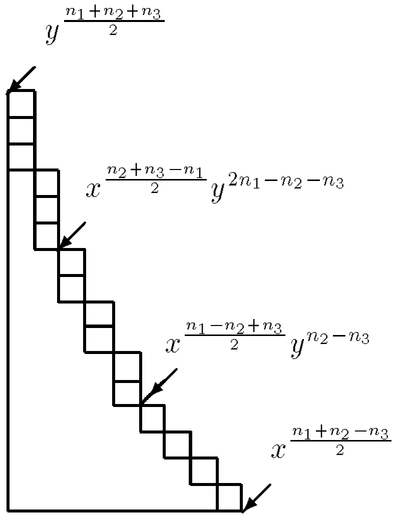
et le deuxième à

$$\varphi_2 : (x, y) \mapsto (xy, y)$$

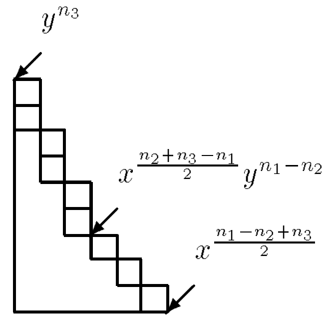
Pour reprendre les notations de l'algorithme, notons X_0 la collision et $S_0 := \mathbb{A}^2$. Puisque X_0 est de multiplicité $\frac{n_1+n_2+n_3}{2}$ en $(0, 0)$, la trace de X_1 sur la première carte affine est un schéma dont l'idéal est

$$I_1 = \varphi_1(I(X_0)).x^{-\frac{n_1+n_2+n_3}{2}}$$

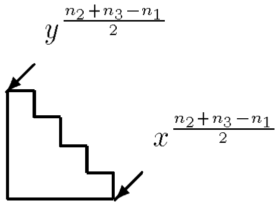
C'est un idéal monômial qu'on peut représenter par l'escalier suivant:



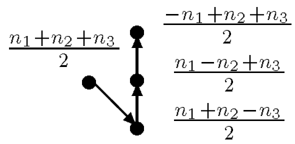
La même opération pour le deuxième éclatement affine donne un schéma vide, ce qui montre que le schéma X_1 est inclus dans la première carte affine. On peut donc se restreindre à cette carte, qu'on note S_1.
Le diviseur exceptionnel Q_0^1 a pour équation $x = 0$. On éclate maintenant S_1 en $(0, 0)$. Le schéma X_2 est inclus dans la deuxième carte affine, qu'on note S_2. Les équations de X_2 dans S_2 sont monômiales et définies par l'escalier suivant.



On dispose sur S_2 des deux diviseurs exceptionnels Q_0^2 et Q_1^2 d'équations respectives $x=0$ et $y=0$.
On éclate S_2 en $(0,0)$ et le schéma X_3 est inclus dans la deuxième carte affine, qu'on note S_3. Les équations de X_3 dans S_3 sont monômiales définies par l'escalier suivant.



Donc X_3 est le $\frac{n_2+n_3-n_1}{2}$-gros point de support $(0,0)$. Il est à l'intersection des diviseurs Q_0^3 et Q_2^3. Un nouvel éclatement montre que X_4 est le schéma vide. En résumé, on a montré que le type combinatoire de la collision est:



Donc X_0 est complet d'après la proposition 131, de type combinatoire $T_{g,1}$. En appliquant cet algorithme à tous les schémas monômiaux, on voit que les types combinatoires sur les strates

$$S_{g,1},\ S_{cur},\ S_{g,ij},\ S_{ij}$$

sont respectivement les types

$$T_{g,1},\ T_{cur},\ T_{g,ij},\ T_{ij}$$

$\blacksquare$

Bibliographie

[B]: Briançon J., Description de $Hilb^n\mathbb{C}\{x,y\}$, Invent .Math. 41, (1977)

[BGS]: Bayer D., Galligo A., Stillmann M., Gröbner bases and extensions of scalars, Proc. Comput. Algebraic Geom. and Commut. Algebra, Cortona, Italy, 1991, D. Eisenbud and L. Robbiano editors, (1992).

[Bos]: Bossini S., Thèse, Nice, (1994)

[C]: Casas-Alvero E., Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves, Math. Ann., 287, (1990)

[CF]: Collino A., Fulton W., Intersection rings of spaces of triangles, preprint

[CGL]: Campillo A., Gonzalez-Sprinberg G., Lejeune-Jalabert M., Clusters of infinitely near points, Math. Ann., 306, 169-194, (1996).

[DO]: Dolgachev I., Ortland D., Points sets in projective spaces and theta functions, Astérisque, 165, (1988)

[E]: Eisenbud D., Commutative Algebra with a view towards algebraic geometry, Springer

[Ea]: Eastwood A., Collision de biais et Application à l'interpolation, Manuscripta math. 67, 227-249, (1990)

[EH]: Eastwood A., Hirschowitz A., Tricollisions de n-gros points sur une surface algébrique, CRAS, 318, (1994)

[Ev]: Evain L., Singularités et collisions, preprint en préparation

[FMP]: Fulton W., MacPherson R., A compactification of configuration of spaces, Annals of Math., 139 (1994)

[G]: Granger M., Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels, Mém. Soc. Math..France, 712, (1982-83)

[Gal]: Galligo A., Théorème de division et stabilité en géométrie analytique locale, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29, 2 (1979)

[Hb]: Harbourne B., Iterated blow-ups and moduli for rational surfaces, Lecture Notes, 1311, (1988)

[Hb1]: Harbourne B., Free Resolutions and fat points, Preprint (1995)

[Ho]: Hoskin M.A., Zero-dimensional valuation ideals associated with plane curve branches, Proc. London Math. Soc., (3) 6, (1956)

[K]: Kleiman S., Multiple point formulas I: Iteration, Acta. Math., 147,(1981)

[Kee]: Keel S., Functorial construction of Le Barz's triangle space with applications, Transactions of the A.M.S., 335, (1993)

[LB]: Le Barz P., La variété des triplets complets, Duke Math., 57, (1988)

[Lip]: Lipman J., Proximity inequalities for complete ideals in two-dimensional local rings, Contemporary Mathematics, 159, (1994)

[Lip]: Lipman J., Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization, Publ. IHES 36, (1969), 195-279

[LJ]: Lejeune-Jalabert M., On complete ideals in 2-dimensional regular local rings, ICTP College on Singularity theory, Trieste, (1991)

[M]: Matsumura H., Commutative algebra, Benjamin, (1970)

[Mi]: Mignon T., Thèse en préparation

[N]: Nagata M., On the fourteenth problem of Hilbert

[R]: Ran Z., Curvilinear enumerative geometry, Acta. Math., 155, (1985)

[Sch]: Schubert H., Anzahlgeometrische Behandlung des Dreieckes, Math. Ann. 17 (1880)

[S]: Semple J.G., The triangle as a geometric variable, Mathematika 1, (1954)

[SK]: Semple J.G., Kneebone G., Algebraic curves, Oxford University press, London, (1959)

[W]: Walter C., Collisions of clusters of infinitely near points, preprint en préparation

[Z]: Zariski O., Polynomial ideals defined by infinitely-near points, American J. of Math., 60, (1938)

[ZS]: Zariski O., Samuel P., Commutative Algebra, Volume II, Springer-Verlag, (1960)

Résumé:
Un gros point de taille n sur une surface projective lisse S est un sous-schéma ponctuel défini par la puissance n-ème du faisceau d'idéaux d'un point simple. Les réunions disjointes de r gros points de taille $n_1, n_2, \ldots, n_r$ s'organisent en une sous-variété localement fermée $U(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S)$ du schéma de Hilbert de S, dont la fermeture est notée $Coll(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S)$. Une collision de r gros points de taille $n_1, n_2, \ldots, n_r$ est un sous-schéma de S paramétré par un point de la frontière $Coll(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S) - U(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S)$.
Dans cette thèse, nous étudions les variétés $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$. Nous construisons un nombre fini de variétés à l'aide de relations d'incidence, parmi lesquelles nous retrouvons des variétés de triplets dues à Schubert-Semple et Kleiman. Pour chaque triplet (n_1, n_2, n_3), nous établissons un isomorphisme entre la variété de collisions $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ et l'une des variétés d'incidence. On donne également une description des collisions en termes d'idéaux complets.

Mots clés: gros point, collision, schéma ponctuel, schéma d'incidence, schéma de Hilbert, compactification, espace de configurations,idéal complet.

Abstract:
A fat point of order n on a smooth projective surface S is a punctual subscheme defined by the n-th power of the sheaf of ideals of a simple point. Disjoint unions of r fat points of order $n_1, n_2, \ldots, n_r$ are parametrized by the closed points of a locally closed subvariety $U(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S)$ of the Hilbert scheme of S. The closure of $U(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S)$ in the Hilbert scheme of S is denoted by $Coll(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S)$. A collision of r fat points of order $n_1, \ldots, n_r$ is a subscheme of S parametrized by a point of the boundary $Coll(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S) - U(n_1, n_2, \ldots, n_r)(S)$.
In this thesis, we study the varieties $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$. We construct a finite number of varieties using incidence relations, among them the varieties of triples of Schubert-Semple and Kleiman. For each triple (n_1, n_2, n_3), we establish an isomorphism between the variety $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ and one of the incidence varieties. A description of the collisions in terms of complete ideals is also given.

Key words: fat point, collision, punctual scheme, scheme of incidence, Hilbert scheme, compactification, configuration space, complete ideal.