Résumé: Quelle est la dimension de l'espace des courbes projectives planes de degré d passant par des points $p_1, \ldots, p_r$ en position générale avec multiplicité $m_1, \ldots, m_r$? Dans cette note, nous introduisons la notion de collision de gros points et nous expliquons en quel sens il est équivalent de comprendre les collisions de gros points ou de calculer cette dimension.

Abstract: What is the dimension of the linear system of plane curves of degree d going through points $p_1, \ldots, p_r$ in general position with multiplicity $m_1, \ldots, m_r$? In this note, we introduce the notion of collision of fat points, and we explain that, in some sense, it is equivalent to understand collisions of fat points or to calculate this dimension.

1 Introduction

Les techniques de spécialisation sont très classiques pour calculer la dimension $l(d, m_1, m_2, \ldots, m_r)$ du système linéaire des courbes de degré d passant par des points $p_1, p_2, \ldots, p_r$ du plan $\mathbb{P}^2$ en position générale avec multiplicité $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Le principe en est le suivant. Ce système linéaire a une dimension attendue $e(d, m_1, m_2, \ldots, m_r) = max(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum \frac{m_i(m_i+1)}{2}, 0)$ et l'inégalité $l(d, m_1, m_2, \ldots, m_r) \geq e(d, m_1, m_2, \ldots, m_r)$ est toujours vérifiée. On met les points dans une position spéciale judicieusement choisie. La géométrie qui apparait alors permet de calculer la dimension $l'(d, m_1, m_2, \ldots, m_r)$ du système linéaire dans cette position spéciale et de vérifier l'égalité $l'(d, m_1, \ldots, m_r) = e(d, m_1, \ldots, m_r)$. On obtient finalement les égalités $l(d, m_1, \ldots, m_r) = e(d, m_1, \ldots, m_r) = l'(d, m_1, \ldots, m_r)$ puisque la semi-continuité impose $l'(d, m_1, \ldots, m_r) \geq l(d, m_1, \ldots, m_r)$. La difficulté de la méthode consiste à trouver une "bonne" position spéciale.
Parmi les méthodes de spécialisation déja utilisées, citons la méthode d'Horace ([1], [2], [7]) qui consiste à mettre les points sur des courbes adéquates, ou encore la méthode de [4], qui consiste à faire dégénérer le plan projectif $\mathbb{P}^2$ en une surface réductible, et à faire courir les points jusque cette surface.
Les collisions de gros points sont d'autres spécialisations naturelles; un gros point de taille m est un sous-schéma de $\mathbb{P}^2$ défini par la puissance $m^{\text{ème}}$ I_p^m d'un faisceau d'idéaux I_p définissant un point simple p. Un sous-schéma ponctuel C de $\mathbb{P}^2$ est une collision totale de gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$ si C peut être obtenu comme limite plate d'une réunion disjointe de gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$ quand les gros points approchent les uns des autres. En d'autres termes, C est la fibre spéciale d'une famille plate de sous-schémas de $\mathbb{P}^2$ dont la fibre générale est une réunion de r gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$. Si on note X la réunion générique de r gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$, l'inégalité $l(d, m_1, m_2, \ldots, m_r) = h^0 I_X(d) \leq h^0 I_C(d) = l'(d, m_1, m_2, \ldots, m_r)$ est satisfaite pour toute collision C. Pour pouvoir appliquer la méthode de spécialisation, il faut trouver une collision pour laquelle on a égalité.

Cette note traite de la "faisabilité" de la méthode. Dans quelle mesure cette méthode de spécialisation peut elle fonctionner; peut on toujours trouver des collisions pour lesquelles la cohomologie ne saute pas? Comment sont obtenues de telles collisions (i.e. comment les gros points approchent-ils les uns des autres)?

Travaillons dans un plan affine de $\mathbb{P}^2$ qui contient une réunion X de gros points. Dans ce plan affine, on peut faire une homothétie de centre $(0,0)$ et de rapport t. Quand t tend vers 0, les gros points approchent les uns des autres et la collision homothétique C est par définition la limite plate. Cette collision vérifie pour tout d, $h^0 I_X(d) = h^0 I_C(d)$. La réponse est donc qu'il est toujours possible de trouver une collision qui respecte la cohomologie: la collision homothétique.
Appelons multiplicité d'un schéma ponctuel C supporté par un point p la plus petite multiplicité en p d'une courbe contenant C. En regardant plus précisément les équations de la collision homothétique, on montre que sa multiplicité $m(C)$ est le plus petit des degrés d vérifiant $h^0 I_X(d) \neq 0$ (proposition 4). En particulier, puisque les notions de collision et de multiplicité sont des notions locales, le problème de décider si $l(d, m_1, m_2, \ldots, m_r)$ est nul ou pas peut être ramené à un problème local via les collisions, alors que c'est à priori un problème concernant les sections globales d'un fibré de $\mathbb{P}^2$.
En corollaire de l'étude des collisions homothétiques, on obtient la proposition 5 qui résume les liens existant entre les collisions de gros points et les dimensions cherchées des systèmes linéaires.

Les preuves de ces propositions sont très simples moyennant la théorie des idéaux initiaux apparaissant dans les bases de Gröbner. La clé est que les invariants de la collision homothétique qu'on cherche à comprendre (à savoir $h^0 I_C(d)$ et $m(C)$) se déduisent des idéaux initiaux de I_C pour des ordres monômiaux adéquats, et qu'on contrôle bien la façon dont les idéaux initiaux se spécialisent pour les collisions homothétiques.

Le plan adopté est le suivant. La section 2 regroupe quelques résultats utiles sur la notion d'idéal initial et sur les escaliers associés. On utilise ces résultats dans la section 3 pour étudier la collision homothétique et en déduire la proposition 5 liant les collisions aux dimensions des systèmes linéaires.

Signalons enfin que des applications de cette méthode de spécialisation se trouvent dans [6]: on y montre que le degré d'une courbe de $\mathbb{P}^2$ contenant r points en position générale avec multiplicité m est strictement plus grand que $\sqrt{r}m$ sous l'une des deux conditions suivantes: r est un carré parfait supérieur ou égal à dix (résultat déjà prouvé par Nagata), ou r est plus grand que $(\frac{8m}{4m-1}.(m+1))^2$ (ce qui constitue une partie d'une conjecture de Nagata).

2 Idéaux initiaux dans $k[x,y]$ et $k[[x,y]]$

Dans toute la suite k sera un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque. Ordonnons les monômes de $k[x,y]$ de la façon suivante:

$$x^a y^b < x^{a'} y^{b'} \text{ si } (a+b < a'+b') \text{ ou } (a+b = a'+b' \text{ et } a' < a)$$

On dira que cet ordre est un ordre homogène sur $k[x,y]$. Cet ordre vérifie l'inégalité $x < y$. Il existe par symétrie un ordre homogène vérifiant $x > y$. Dans la suite de cette section, on suppose choisi une fois pour toutes l'un des deux ordres homogènes. Pour un élément p non nul de $k[x,y]$, on notera $in(p)$ le plus grand monôme de p affecté d'un coefficient non nul.

Si on travaille avec l'algèbre $k[[x,y]]$ plutôt que $k[x,y]$, on a la même notion d'ordre homogène. En revanche, $in(p)$ désignera le plus petit monôme de p affecté d'un coefficient non nul.

Soit I un idéal de $k[x,y]$ (resp. de $k[[x,y]]$). On note $in(I)$ l'idéal de $k[x,y]$ (resp. de $k[[x,y]]$) engendré par les $in(f)$ quand f parcourt $I-\{0\}$. On l'appellera l'idéal initial de I.
On appelle escalier une partie E de $\mathbb{N}^2$ dont le complémentaire C vérifie $C+\mathbb{N}^2 \subset C$. Pour un escalier E, on notera

- $c(E)$ son cardinal (éventuellement infini)
- $o(E)$ son ordre, qui est le plus petit entier d pour lequel il existe un couple (a,b) dans $\mathbb{N}^2-E$ avec $a+b=d$
- $N(E,d)$ le nombre de couples (a,b) vérifiant $a+b\leq d$ et $(a,b)\notin E$.

Proposition 1. *Soit I un idéal de $k[x,y]$ (resp. $k[[x,y]]$). Les couples (a,b) tels que x^ay^b ne soit pas de la forme $in(f)$ avec f dans I forment un escalier. On notera cet escalier $E(I)$.*

Démonstration: Soit (a,b) un élément de $\mathbb{N}^2$ tel que x^ay^b soit de la forme $in(f)$ pour un élément f de I. Soit (m,n) un élément quelconque de $\mathbb{N}^2$. L'égalité $(a+m,b+n)=in(x^my^nf)$ montre que le complémentaire de $E(I)$ est stable par addition de $\mathbb{N}^2$. ■

La donnée de l'escalier $E(I)$ est équivalente à la donnée de $in(I)$. Le rapport avec des invariants plus classiques est donné par la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit I un idéal de $k[x,y]$ de colongueur finie et X le sous-schéma de $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$ associé.*

- $c(E(I)) = dim_k k[x,y]/I$
- $N(E(I),d) = h^0 I_X(d)$

Soit I un idéal de $k[[x,y]]$ de colongueur finie et X le sous-schéma de Spec $k[[x,y]]$ associé.

- $c(E(I)) = dim_k k[[x,y]]/I$
- $o(E(I))=m(X)$

Démonstration: Le point 3 est démontré dans [3], corollaire I.1.12. Le point 1 se démontre par un argument similaire: si $(f_1,\dots,f_s)$ est une base de Gröbner de I, l'algorithme de division par les f_i [5, p.330] montre que les classes des monômes $x^{a_i}y^{b_i}$ où (a_i,b_i) est dans $E(I)$, forment une base de $k[x,y]/I$. Et cette base est de cardinal $c(E(I))$.
Point 4: toute fonction s'annulant sur X est de valuation au moins $o(E(I))$ car son terme initial x^ay^b vérifie $a+b\geq o(E(I))$. Donc $m(X)\geq o(E(I))$. Réciproquement, soit (a,b) un élément hors de $E(I)$ vérifiant $a+b=o(E(I))$. L'élément f de I vérifiant $in(f)=x^ay^b$

montre que $m(X) \leq o(E(I))$. Finalement, $m(X) = o(E(I))$.
Point 2: pour tout couple (a_i, b_i) vérifiant $a_i + b_i \leq d$ et $(a_i, b_i) \notin E$, choisissons un élément $f_{a_i b_i}$ de I de terme initial $x^{a_i} y^{b_i}$. Montrons que les $f_{a_i b_i}$ ainsi construits forment une base de l'espace vectoriel I_d des polynômes de I de degré au plus d, ce qui démontrera le point 2. Ces éléments forment une famille libre car leurs termes initiaux sont distincts. D'autre part, un élément f de I_d s'écrit $f = \sum \lambda_{a_i b_i} f_{a_i b_i} + R$ où les $\lambda_{a_i b_i}$ sont dans k et R est une combinaison linéaire de monômes $x^a y^b$, avec (a, b) dans $E(I)$. Donc $R = 0$ puisque $R = f - \sum \lambda_{a_i b_i} f_{a_i b_i}$ est dans I. Les $f_{a_i b_i}$ forment bien une famille génératrice de I_d.$\blacksquare$

3 Collisions homothétiques. Application aux singularités

Définition 3. *Soit X un sous-schéma de dimension zéro du plan affine $\mathbb{A}^2 = Spec\ k[x, y]$ et φ_t l'automorphisme de $\mathbb{A}^2$ défini par le changement de variable $x \mapsto x/t$ et $y \mapsto y/t$. Notons X_t le schéma $\varphi_t(X)$. On appelle collision homothétique de X le schéma C défini par la limite plate $C = lim_{t \to 0} X_t$.*

Proposition 4. *Soit $X \subset \mathbb{A}^2 \subset I\!P^2$ un schéma ponctuel et C sa collision homothétique.*

1. *$\forall d,\ h^0 I_X(d) = h^0 I_C(d)$*
2. *$h^0 I_X(d) = 0 \Leftrightarrow m(C) > d$*

Démonstration: puisque $h^0 I_X(d)$ et $h^0 I_C(d)$ se lisent sur les escaliers de I_X et I_C pour l'ordre homogène avec $y > x$, il suffit pour vérifier le premier point de montrer l'égalité $E(I_X) = E(I_C)$ pour cet ordre.

La famille des X_t pour $t \neq 0$ est une famille de sous schémas de $\mathbb{A}^2$ paramétrée par $\mathbb{A}^1 - \{0\}$, et elle est donc définie par un idéal $I(t)$ de $k[x, y][t, t^{-1}]$. La collision C est définie par l'idéal

$$I_C := \{f \in k[x, y]\ t.q. \exists f(t) \in I(t) \cap k[x, y][t] \text{ avec } f(0) = f\}$$

Considérons l'escalier $E(I_X)$. Pour chaque élément (a, b) hors de cet escalier, il existe un polynôme P de I_X qui admet $x^a y^b$ pour monôme initial. Ecrivons P sous la forme $P = \Sigma_1^n P_i$ où chaque P_i est de degré i. Le polynôme $Q(x, y, t) = t^n P(x/t, y/t) = P_n + tP_{n-1} + \cdots + t^n P_0$ est dans $I(t)$ donc $Q(x, y, 0) = P_n$ est dans l'idéal I_C. De l'égalité $in(P_n) = x^a y^b$ on déduit $E(I_C) \subset E(I_X)$. Ces deux escaliers ont même cardinal (car la colongueur des schémas est conservée par limite plate), donc $E(I_C) = E(I_X)$
Puisque C est supporté par le point $(0, 0)$ de $\mathbb{A}^2$, il peut être vu comme sous-schéma de $Spec\ k[[x, y]]$ (moyennant l'injection canonique $k[x, y] \to k[[x, y]]$) dans lequel il est défini par l'idéal $J_C = I_C\ k[[x, y]]$. Cherchons l'escalier de J_C pour l'ordre homogène avec $y < x$. Si on regarde P_n comme un élément de $k[[x, y]]$, on a toujours $in(P_n) = x^a y^b$. D'où $E(J_C) \subset E(I_X)$, et, par cardinalité, on a l'égalité. En particulier, $m(C) = o(E(J_C)) = o(E(I_X)) = inf\{d\ t.q.\ h^0 I_X(d) \neq 0\}$, ce qui démontre le point deux. $\blacksquare$

En corollaire de cette proposition, on obtient la proposition suivante, qui dit en quel sens il suffit de connaître les collisions pour calculer la dimension des systèmes linéaires étudiés.

Proposition 5. *Soit X la réunion générique dans $\mathbb{P}^2$ de r gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$ et $\mathfrak{C}$ l'ensemble des collisions totales de r gros points de taille $m_1, \ldots, m_r$.*

1. $h^0 I_X(d) = min\{h^0 I_C(d),\ C \in \mathfrak{C}\}$
2. $h^0 I_X(d) \neq 0 \Leftrightarrow \forall C \in \mathfrak{C},\ m(C) \leq d$

Démonstration: par semi-continuité, on sait qu'on a pour toute collision C des r gros points, $h^0 I_X(d) \leq h^0 I_C(d)$. Il nous suffit donc pour montrer le premier point d'exhiber une collision C vérifiant $h^0 I_X(d) = h^0 I_C(d)$. Et la collision homothétique fait l'affaire d'après la proposition 4.
D'autre part, pour toute collision C des r gros points,

$$h^0 I_X(d) \neq 0 \Rightarrow h^0 I_C(d) \neq 0 \Rightarrow m(C) \leq d$$

Pour montrer le deuxième point, il reste à voir que si $h^0 I_X(d) = 0$, il existe une collision C avec $m(C) > d$. La collision homothétique convient encore d'après la proposition 4. ■

Bibliographie:

[1]: Alexander J. et Hirschowitz A., 1997, An asymptotic vanishing theorem for generic unions of multiple points, duke e-print 9703037, p. 1-25

[2]: Alexander J. et Hirschowitz A., 1992, La méthode d'Horace éclatée: application à l'interpolation en degré quatre, Invent. Math., 107, p. 586-602

[3]: Briançon J., Description de $Hilb^n\mathbb{C}\{x, y\}$, 1977, Invent .Math. 41, p. 45-89

[4]: Ciliberto C. et Miranda R., 1997, On the dimension of linear systems of plane curves with general multiple base points, duke e-print 9702015, p. 1-30

[5]: Eisenbud D., 1995, Commutative Algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, p. 317-348

[6]: Evain L., 1997, Une minoration du degré de courbes planes à singularités imposées, prépublication de l'ENS Lyon, 212, p. 1-17

[7]: Hirschowitz A., 1995, La méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables, Manuscripta math, vol. 50, p. 337-388