

UNIVERSITÉ D'ANGERS
Habilitation à Diriger des Recherches

Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels et applications

Laurent EVAIN

Document de synthèse
présenté le
08 décembre 2005

Composition du jury

Jim ALEXANDER
Michel BRION (Rapporteur)
Ciro CILIBERTO (Rapporteur)
Manfred LEHN (Rapporteur)
Christoph SORGER

Remerciements

Nombreux sont les soutiens que j'ai reçus durant les années dont ce mémoire est l'aboutissement. Soutien amical, soutien professionnel, souvent les deux.

Je suis évidemment redevable envers les compagnons du quotidien, Daniel, Jean-Philippe et François, qui partagent projets et bonne humeur, et envers Jean-Jacques, Jim et Adam pour leur curiosité mathématique et les discussions enrichissantes. Je voudrais également remercier les collègues, notamment ceux de l'équipe de géométrie de Nantes, qui animent avec succès le groupe de travail commun Nantes-Angers ou la vie du laboratoire.

Les trois rapporteurs, Michel Brion, Ciro Ciliberto et Manfred Lehn, et les deux membres du jury, Jim Alexander et Christoph Sorger ont accepté sans hésitation la tâche qui leur était proposée. Le texte de ce mémoire illustre combien leurs travaux ont été pour moi source d'inspiration. Je les remercie bien sûr pour leur participation à ce jury, pour les encouragements qu'ils m'ont adressés, mais aussi pour leur simplicité et l'enthousiasme avec lequel ils parlent de mathématiques.

Enfin, je ne saurais oublier ceux et celles, amis et amies en dehors du monde professionnel, athlètes ou non, qui ont contribué à l'environnement propice sans lequel ce travail n'aurait été possible.

Résumé

Ce texte est une synthèse des travaux que j'ai effectués en géométrie algébrique, incluant à la fois la thèse ([1] et [2], non publié) et les travaux qui ont suivi ([3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]).

Conformément à la règle, les travaux de thèse seront présentés brièvement. Un paragraphe leur est cependant consacré pour préserver la cohérence de l'ensemble.

Les résultats énoncés s'intègrent évidemment dans un ensemble plus large, tantôt complet et tantôt sont complétés par le travail d'autres auteurs. La mise en perspective et l'articulation sont privilégiées aux dépens de la technique. J'ai néanmoins souhaité que le texte conserve une saveur mathématique et j'ai indiqué autant qu'il m'était possible les idées de démonstration.

Tous les énoncés de ce texte sont valables sur un corps k algébriquement clos de caractéristique quelconque, sauf mention explicite du contraire.

1	Sujet Initial ([1], [2])	7
2	Interpolation et fonctions de Hilbert ([3], [4], [5], [8], [9])	9
2.1	Énoncé du problème et applications	9
2.2	Quelques conjectures	10
2.3	Méthodes et résultats connus	12
2.4	Nouvelles méthodes et résultats	14
3	Géométrie des schémas de Hilbert ([7], [10], [6])	21
3.1	Irréductibilité des schémas de Hilbert gradués	24
3.2	L'anneau de Chow $A^*(\mathbb{H}^d(X))$ quand X est une surface torique projective	26
3.3	Incidence des strates des schémas de Hilbert gradués	28
4	Perspectives de recherche et autres questions ouvertes	29

1 Sujet Initial ([1], [2])

Soient S une variété quasi-projective et $p \in S$ un point lisse. On appelle gros point de support p et de multiplicité n et on note p^n le sous-schéma de S défini par l'idéal $I(p)^n$, où $I(p)$ est l'idéal du point p . Un schéma ponctuel est par définition un schéma de dimension 0 dont le support est un point. Si Z_1, \dots, Z_s sont des schémas ponctuels, une collision de Z_1, \dots, Z_s sur S est par définition un schéma ponctuel $Z \subset S$ de longueur $l(Z) = \sum_{i \leq s} l(Z_i)$ pour lequel il existe une variété B , une famille $F \subset B \times S$ plate sur B , dont la fibre générale est isomorphe à la réunion disjointe $Z_1 \amalg \dots \amalg Z_s$ et dont une fibre spéciale est Z .

On se place dans le cas où S est une surface projective lisse. Le sujet initial qui m'a été proposé consistait en l'étude des collisions de trois gros points sur S . La motivation pour l'étude d'un tel sujet vient du calcul des fonctions de Hilbert des réunions de gros points dans le plan projectif: une méthode possible pour attaquer ce problème est la méthode d'Horace introduite par Hirschowitz [34] et les collisions sont l'un des éléments de la boîte à outils livrée avec la méthode d'Horace afin d'améliorer son efficacité.

L'état du problème au début de la thèse était le suivant. Walter [59] avait mis en évidence un certain nombre de collisions de trois gros points, mais l'on ne savait pas montrer que toute collision était obtenue par son procédé.

On peut s'intéresser à ce problème sous un angle différent. Notons $\mathbb{H}^d(S)$ le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas de dimension 0 de S de longueur d . Plutôt que de chercher à calculer les collisions, on peut chercher à décrire la sous-variété fermée $Coll(n_1, n_2, n_3)$ du schéma de Hilbert $\mathbb{H}^{\sum_{i=1}^3 \frac{n_i(n_i+1)}{2}}(S)$ dont le point générique paramètre la réunion générique de trois gros points de multiplicité n_1, n_2, n_3 .

Théorème 1. *Lorsque (n_1, n_2, n_3) parcourt \mathbb{N}^3 , les variétés $Coll(n_1, n_2, n_3)$ ne parcourent qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme.*

La démonstration se déroule en deux étapes. On commence par des constructions dépendant d'une variété projective lisse X de dimension quelconque qu'on appliquera ensuite au cas où $X = S$.

Considérons l'espace des configurations $F(X, n) = X^n \setminus \Delta$, où Δ est la grande diagonale. Dans [42], Le Barz construit une compactification \widehat{H}_3 de $F(X, 3)$ réalisée naturellement comme sous-variété du produit $X^3 \times \mathbb{H}^2(X) \times \mathbb{H}^2(X) \times \mathbb{H}^2(X) \times \mathbb{H}^3(X)$. Etant donnés trois points distincts p_1, p_2, p_3 de X , on peut former les trois doublets $p_{12} = p_1 \cup p_2$, $p_{13}, p_{23} \in \mathbb{H}^2(X)$ et le triplet $p_{123} = p_1 \cup p_2 \cup p_3 \in \mathbb{H}^3(X)$. Cette construction se reformule en disant que $F(X, 3)$ est isomorphe à un sous-schéma localement fermé

$$Z(X) \subset X^3 \times \mathbb{H}^2(X)^3 \times \mathbb{H}^3(X).$$

L'adhérence $\overline{Z(X)} = \widehat{H}_3$ est donc une compactification de $F(X, 3)$ dans un produit de schémas de Hilbert. Le Barz a montré que cette adhérence, a priori difficile-

ment manipulable, est lisse et peut être décrite géométriquement en termes de lieux d'incidence: les points de l'adhérence sont les 7-uplets $(p_1, p_2, \dots, p_{123})$ satisfaisant les relations évidentes $p_1 \subset p_{12} \subset p_{123}$, p_3 est le résiduel de p_{12} dans p_{123} et les relations s'en déduisent par symétrie.

Tout d'abord, en développant l'idée de Le Barz, on introduit un procédé général pour construire des compactifications de $F(X, n)$ et des quotients $F(X, n)/G$ où G est un sous-groupe du groupe symétrique S_n . Ces compactifications sont définies comme représentants de certains foncteurs d'incidence et sont naturellement des sous-schémas de produits de schémas de Hilbert emboîtés, où un schéma de Hilbert emboîté est par définition de la forme $\mathbb{H}^{p_1}(\mathbb{H}^{p_2}(\dots(\mathbb{H}^{p_r}(X))))$. Appelons variété de n -uplets enrichis une compactification obtenue par ce procédé. La construction est valable pour tout n et on étudie la géométrie de ces compactifications dans le cas $n = 3$, qui se révèle très riche et unifie certaines constructions classiques de Schubert-Semple-Kleiman-Le Barz-Keel-Cheah ([54],[56],[42],[39],[41],[15]). On peut résumer les résultats principaux de l'étude dans l'énoncé suivant.

Théorème 2. [1]

- Il y a à isomorphisme de compactification près 11 variétés de triplets enrichis. De plus, toute variété de triplets est isomorphe à une compactification dans $P_1 \times \dots \times P_r$ où chaque P_i est soit de la forme $\mathbb{H}^i(X)$, soit de la forme $\mathbb{H}^i(\mathbb{H}^j(X))$.
- Le quotient de la variété de Le Barz \widehat{H}_3/S_3 est isomorphe à l'adhérence de $F(X, 3)/S_3$ dans $\mathbb{H}^3(\mathbb{H}^2(X)) \times \mathbb{H}^3(X)$.
- Plus généralement, le quotient d'une variété de triplets enrichis par le groupe agissant naturellement est encore une variété de triplets enrichis.
- Quand X est lisse, sept des onze variétés de triplets sont lisses. Les quatre autres compactifications sont singulières si X est de dimension au moins deux.
- Les constructions classiques de Schubert-Semple, de LeBarz \widehat{H}_3 , de Kleiman K_3 , de Cheah, les quotients \widehat{H}_3/S_2 , \widehat{H}_3/S_3 , K_3/S_2 sont des variétés de triplets enrichis.

On applique ensuite ces constructions à $X = S$ pour identifier les variétés de collisions.

Théorème 3. ([2], non publié) Pour tout (n_1, n_2, n_3) , la compactification $Coll(n_1, n_2, n_3)$ est isomorphe à une variété de triplets enrichis.

La nature projective de $Coll(n_1, n_2, n_3)$ nous permet alors de compléter le résultat de Walter en affirmant que l'on a en main toutes les collisions.

Théorème 4. ([2], non publié) $Coll(n_1, n_2, n_3)$ est naturellement stratifiée et les types de collisions de Walter sont en bijection avec les strates.

Deux aspects distincts se côtoient dans cette étude. Un aspect géométrie des schémas de Hilbert et un aspect singularités, dont les deux prochaines sections expliquent comment on les a développés.

2 Interpolation et fonctions de Hilbert ([3], [4], [5], [8], [9])

2.1 Énoncé du problème et applications

Le problème est de connaître la dimension $l(d, m_1, \dots, m_r)$ de l'espace des polynômes homogènes de degré d en $n + 1$ variables s'annulant en des points $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^n$ en position générale avec multiplicités m_1, \dots, m_r , ou de façon équivalente, la fonction de Hilbert $H(d, m_1, \dots, m_r) = \binom{n+d}{d} - l(d, m_1, \dots, m_r)$ d'une réunion de gros points de multiplicités m_1, \dots, m_r dans l'espace projectif \mathbb{P}^n .

Fixons les notations. Notons X l'éclatement de \mathbb{P}^n en les points p_i , E_i le diviseur exceptionnel correspondant à p_i et H l'image inverse par le morphisme d'éclatement d'un hyperplan général de \mathbb{P}^n . Alors $l(d, m_1, \dots, m_r) = \dim H^0(dH - \sum m_i E_i)$. On notera $\mathcal{L}(d, m_1, \dots, m_r) = \mathbb{P}(H^0(dH - \sum m_i E_i))$ le système linéaire associé. On utilisera la notation abrégée $l(d, m_1^{n_1}, \dots, m_s^{n_s})$ pour signifier que m_i apparaît n_i fois dans la liste des multiplicités.

Pour $n = 1$ et à déshomogénéisation près, ce problème n'est autre que le problème d'interpolation pour les polynômes en une variable dont la solution est évidente. Le fait inattendu est que la question reste ouverte et très difficile dès que $n \geq 2$.

Il est en revanche sans surprise qu'un énoncé aussi simple ait de nombreuses applications. Avant d'entrer dans la résolution du problème, présentons deux de ces applications, le quatorzième problème de Hilbert et le problème de Waring pour les formes, sachant cependant qu'il existe de nombreuses autres applications (empilement symplectique [47], cône ample et constantes de Seshadri sur les surfaces rationnelles génériques [60], cône effectif du produit symétrique d'une courbe [16]...).

Le quatorzième problème de Hilbert.

Soit G un groupe agissant linéairement sur un espace vectoriel de dimension finie. L'algèbre des polynômes invariants est-elle de type fini ? Ainsi s'énonce le quatorzième problème de Hilbert. Nagata en a donné un contre-exemple en 1958, au congrès international d'Edimbourg. Le principe de sa démonstration est le suivant. Considérons 16 points dans le plan \mathbb{P}^2 . Tout d'abord, Nagata décrit une action explicite du groupe \mathbb{G}_a^6 sur un espace vectoriel de dimension 32. Quelques manipulations calculatoires lui permettent de montrer que l'algèbre des invariants est graduée par \mathbb{Z}^{17} , la partie graduée de degré (d, m_1, \dots, m_{16}) étant naturellement isomorphe à l'espace vectoriel $H^0(dH - m_1 E_1 \cdots - m_{16} E_{16})$. Pour montrer que cette algèbre n'est pas de type fini, il suffit d'étudier chaque partie graduée, et plus précisément de montrer que le semi-groupe $S \subset \mathbb{Z}^{17}$ formé par les (d, m_1, \dots, m_{16}) tels que $l(d, m_1, \dots, m_{16}) \neq 0$ n'est pas de type fini. L'énoncé appelé "lemme fondamental" dans [52] consiste à montrer l'égalité $l(d, m^{16}) = 0$ si $0 < d \leq 4m$. Par un argument de symétrisation, cela implique l'égalité $l(d, m_1, \dots, m_{16}) = 0$ pour $4d \leq \sum m_i$. Par ailleurs, on exhibe facilement des couples (d, m) avec $l(d, m^{16}) \neq 0$, $\frac{d}{4m} > 1$ et $\frac{d}{4m}$

arbitrairement proche de 1. En d'autres termes, S est inclus dans le demi-espace ouvert $4d > \sum m_i$ et contient des points arbitrairement proches de l'hyperplan de séparation $4d = \sum m_i$. On en déduit facilement que S n'est pas de type fini.

Le problème de Waring pour les formes

Des énoncés classiques d'arithmétique disent que tout entier positif est somme de quatre carrés, ou déterminent l'entier $g(d)$ (resp. $G(d)$) tel que tout entier positif (resp. tout entier positif assez grand) s'écrit comme somme de $g(d)$ (resp. $G(d)$) puissances d -ème. De manière similaire, il existe un problème de Waring pour les formes qui demande de déterminer le plus petit entier $h = h_{\min}(d, n)$ tel qu'un polynôme homogène général $f(x_0, \dots, x_n)$ de degré d en $n + 1$ variables soit une somme $f_1^d + \dots + f_h^d$ de h puissances de formes linéaires.

Cette question se réduit au calcul de dimension d'une variété de sécantes, puis à un problème de calcul de fonction de Hilbert d'une réunion de gros points. L'association $g \mapsto g^d$ est un plongement de Veronese $V_1 \rightarrow V_d$, où V_1 et V_d sont respectivement les espaces projectifs formés sur les espaces vectoriels de polynômes de degré 1 et d . Une forme f est somme de h puissances de formes linéaires distinctes si et seulement si sa classe $\bar{f} \in V_d$ est dans la variété S_{h-1} des h -sécantes à V_1 , et toute forme générale est somme de h puissances si et seulement si $\dim S_{h-1} = \dim V_d$. En calculant la dimension de l'espace tangent au point générique de S_{h-1} (par le lemme de Terracini), $\dim S_{h-1} \neq \dim V_d$ se traduit par l'existence d'un hyperplan H de V_d passant par les points génériques p_1, \dots, p_h et tangent à V_1 en chacun de ces points. Ou encore, en considérant la trace de H sur V_1 , cela se traduit par l'existence d'une hypersurface de V_1 de degré d singulière en les h points génériques p_1, \dots, p_h .

En étudiant le problème de singularités, Alexander et Hirschowitz résolvent ainsi le problème de Waring pour les formes.

Théorème 5. [11] *Supposons que (n, d, h) ne soit pas parmi les cas suivants:*

n	<i>quelconque</i>	2	3	4	4
d	2	4	4	4	3
h	$2, \dots, n$	5	9	14	17.

Alors tout polynôme général $f(x_0, \dots, x_n)$ de degré d est une somme $f_1^d + \dots + f_h^d$ de puissances de formes linéaires ssi $h \geq \lceil \frac{\dim V_d + 1}{\dim V_1 + 1} \rceil$.

2.2 Quelques conjectures

Plaçons nous dans le cas où la dimension de l'espace projectif ambiant est deux (voir [17] pour le cas de la dimension supérieure). Quelle est alors la dimension attendue $l(d, m_i)$? Ce paragraphe rappelle la conjecture de Harbourne-Hirschowitz et son lien avec les conjectures de Segre et Nagata.

Demander à une courbe C de degré d de contenir schématiquement la réunion des gros points $p_i^{m_i}$ correspond à $\sum \frac{m_i(m_i+1)}{2}$ équations linéaires sur les coefficients de l'équation de C . Si les points sont en position générale, la conjecture naïve est que les équations linéaires forment un système de rang maximum. En d'autres termes, $l(d, m_i) = a(d, m_i)$ avec $a(d, m_i) = \max(0, \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum \frac{m_i(m_i+1)}{2})$. Cette conjecture est trivialement fausse. Par exemple avec $d = 2, m_1 = m_2 = 2$, $a(d, m_i) = 0$ tandis que $l(d, m_i) = 1$ puisque l'équation de la droite double joignant deux points p_1 et p_2 est dans $H^0(2H - 2E_1 - 2E_2)$. On dira d'un système linéaire $\mathcal{L}(d, m_i)$ qu'il est spécial s'il viole la conjecture naïve. La première conjecture est due à B. Segre [55] et exprime la géométrie des systèmes linéaires spéciaux.

Conjecture 6. *Si $a(d, m_i) < l(d, m_i)$, alors le système linéaire $\mathcal{L}(d, m_i)$ contient une composante fixe multiple.*

On peut construire de nombreux contre-exemples à la conjecture naïve sur le principe suivant. Considérons une courbe C exceptionnelle de première espèce sur la surface X et notons $d'H - \sum m'_i E_i$ sa classe dans $Pic(X) = \mathbb{Z}H \oplus \bigoplus \mathbb{Z}E_i$. Si un système linéaire $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, m_i)$ est d'intersection $\mathcal{L}.C \leq -2$, alors C est une composante fixe de \mathcal{L} , qui se décompose donc sous la forme $\mathcal{L} = C + \mathcal{L}'$, où $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(d - d', m_i - m'_i)$. Un calcul immédiat montre que $\dim \mathcal{L} = \dim \mathcal{L}' \geq a(d - d', m_i - m'_i) > a(d, m_i)$. Un système \mathcal{L} tel que $\mathcal{L}.C \leq -2$ est donc spécial. On dira alors qu'il est -1 -spécial. La conjecture de Harbourne-Hirschowitz dit que ces systèmes sont les seuls systèmes spéciaux.

Conjecture 7. *(Harbourne[33], Hirschowitz [35]) Un système $\mathcal{L}(d, m_i)$ est spécial si et seulement si il est -1 -spécial.*

En outre, en conservant les notations précédentes, $\mathcal{L}'.C \leq -1$, ce qui implique que C est composante fixe de \mathcal{L} avec multiplicité au moins 2. La conjecture de Segre est donc satisfaite pour un système -1 -spécial. En particulier, la conjecture de Harbourne-Hirschowitz implique celle de Segre. En fait la réciproque est également vraie, comme l'ont montré Ciliberto et Miranda [19].

L'avantage néanmoins de la conjecture de Harbourne-Hirschowitz sur celle de Segre est qu'elle permet de donner une conjecture numérique. On sait que toute courbe de première espèce, ou plutôt son image sur \mathbb{P}^2 , peut se ramener à une droite par une suite de transformations de Cremona dans le plan. On peut donc détecter les systèmes -1 -spéciaux par transformation de Cremona. En pratique, en notant $e = m_1 + m_2 + m_3 - d$, une transformation quadratique associée aux points p_1, p_2, p_3 induit l'égalité $l(d, m_i) = l(d - e, m_1 - e, m_2 - e, m_3 - e, m_4, \dots, m_r)$. Quitte à éliminer les cas triviaux $d < 0$ ($l(d, m_i) = 0$) et $m_i < 0$ ($l(d, m_i) = l(d, \max(m_i, 0))$), le calcul de $l(d, m_i)$ se réduit algorithmiquement au cas $d \geq 0, m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r \geq 0$ et $d \geq m_1 + m_2 + m_3$. On dira d'un tel système $\mathcal{L}(d, m_i)$ qu'il est adéquat. La conjecture de Harbourne-Hirschowitz peut se reformuler:

Conjecture 8. *Un système adéquat $\mathcal{L}(d, m_i)$ est non spécial.*

Cette conjecture est compatible avec les travaux antérieurs de Nagata [50]. Plus précisément, il ressort de [50] que la conjecture est vérifiée quand le nombre de points est au plus neuf. Dans le cas où le nombre de points est au moins dix, Nagata a formulé la conjecture suivante.

Conjecture 9. *Le degré d'une courbe passant par $r \geq 10$ points généraux avec multiplicité m est supérieur strictement à $\sqrt{r}m$.*

La conjecture de Harbourne-Hirschowitz implique la conjecture de Nagata. Plus précisément, si la conjecture de Harbourne-Hirschowitz était vérifiée, le degré minimal d'une courbe passant par les $r \geq 10$ points serait toujours supérieur à $\sqrt{r}m$ et, quand m tend vers l'infini, asymptotiquement égal à $\sqrt{r}m + \lfloor \frac{\sqrt{r}-3}{2} \rfloor$. En d'autres termes, la conjecture de Nagata est plus faible que celle induite par Harbourne-Hirschowitz, mais elle lui est asymptotiquement équivalente quand le nombre r de points est fixé et les multiplicités tendent vers l'infini.

Nagata a montré sa conjecture dans le cas où le nombre de points est 16 (et quand le corps de base est de degré de transcendance suffisamment grand sur son corps premier) pour la construction de son contre-exemple [52]. Puis plus généralement, il l'a montrée quand le nombre de points est un carré [51].

2.3 Méthodes et résultats connus

On trouve dans la littérature trois méthodes pour calculer $l(d, m_i)$. La méthode d'Arbarello-Cornalba par déformations, la méthode d'Horace, et la méthode de Ciliberto-Miranda.

Les méthodes d'Horace et de Ciliberto-Miranda reposent sur un argument commun. Rappelons-en le principe élémentaire. Partant des points en position générale P_0 , mettons les en position spéciale P_1 . Par semi-continuité, $l(d, m_i) = l(d, m_i, P_0) \leq l(d, m_i, P_1)$. Si la géométrie de la position spéciale permet d'établir $l(d, m_i, P_1) = a(d, m_i)$, alors, les inégalités

$$a(d, m_i) \leq l(d, m_i, P_0) \leq l(d, m_i, P_1) = a(d, m_i)$$

nous assurent que $l(d, m_i, P_0) = a(d, m_i)$.

La méthode d'Horace [34] consiste à choisir la position P_1 de sorte qu'une courbe C devienne composante fixe du système, par exemple en bougeant suffisamment de points p_i sur C afin d'avoir $\mathcal{L}.C < 0$. Dans ce cas, le système en position spéciale s'écrit $\mathcal{L} = C + \mathcal{L}'$ et $\dim \mathcal{L} = \dim \mathcal{L}'$. Le degré de \mathcal{L}' est inférieur au degré de \mathcal{L} , ce qui permet d'amorcer une sorte de récurrence. En suivant les lignes de cette méthode, on peut montrer:

Théorème 10. *(Hirschowitz [34]) La conjecture de Harbourne-Hirschowitz est vraie quand les m_i valent au plus trois.*

Théorème 11. *(Mignon [48]) La conjecture de Harbourne-Hirschowitz est vraie quand les m_i valent au plus quatre.*

Notons deux limites de cette méthode qui expliquent pourquoi il est bien difficile de dépasser les cas de petites multiplicités. Tout d'abord, la technique proposée n'est pas une récurrence stricto sensu. En effet, \mathcal{L} était un système dépendant de points en position générale tandis que \mathcal{L}' dépend de points en position spéciale. Il est donc plus difficile de calculer $\dim \mathcal{L}'$ puisque l'on ne peut plus bouger les points librement. Il faut réfléchir au cas par cas pour avancer dans la méthode et cela devient de plus en plus difficile au fur et à mesure de la progression. L'autre problème, tout aussi sérieux, est un problème d'ajustement numérique. Par exemple, si C est une droite et que \mathcal{L} est de degré d , il faut mettre des points p_i sur C de sorte que $\sum m_i = d + 1$ pour que C soit composante fixe du système et que la méthode s'applique. C'est par exemple impossible si d et tous les m_i sont pairs. On peut produire artificiellement des multiplicités impaires par collisions et s'affranchir de ce problème, mais cela induit évidemment de nouvelles difficultés techniques.

Plus généralement, la pratique des exemples montre que la méthode est applicable quand les multiplicités sont petites par rapport au nombre de points. Essentiellement, on s'attend à pouvoir démontrer la conjecture de Harbourne-Hirschowitz dès que le nombre de points est grand devant les multiplicités. La difficulté est d'organiser une méthode de récurrence un tant soit peu systématique. Alexander et Hirschowitz ont réussi dans [12] à organiser une telle récurrence à l'aide d'un lemme différentiel sur lequel nous reviendrons (page 20).

Théorème 12. [12] *Pour tout n , il existe $c(n)$ tel que n points en position générale de \mathbb{P}^d de multiplicités comprises entre 1 et $c(n)$ ont la fonction de Hilbert attendue.*

Par rapport à la méthode d'Horace, les techniques de Ciliberto et Miranda [18] sont bien plus élégantes au sens où elles s'appliquent à une classe de problèmes stable sous un procédé de récurrence. Le principe en est le suivant. Tandis que dans la méthode d'Horace, on ne spécialise que les points, on va ici spécialiser à la fois la surface \mathbb{P}^2 , le fibré $\mathcal{O}(d)$ dont on cherche des sections, et les points. Plus précisément, on spécialise la surface \mathbb{P}^2 en une surface réductible $P \cup S$ où P est isomorphe à \mathbb{P}^2 et S est une surface rationnelle \mathbb{F}_1 (cette spécialisation s'obtient en éclatant $\mathbb{P}^2 \times \text{Spec } k[t]$ le long d'une droite de \mathbb{P}^2 située sur la fibre $t = 0$). Parallèlement, on spécialise le fibré $\mathcal{O}(d)$ sur \mathbb{P}^2 en un fibré \mathcal{F} sur $P \cup S$ et les points p_i sur la surface $P \cup S$. À transformation birationnelle près, le problème sur S est équivalent à un problème sur \mathbb{P}^2 . En définitive, étudier le système initial $\mathcal{L}(d, m_i)$ sur \mathbb{P}^2 revient à étudier des paires de systèmes $\mathcal{L}(d', m'_i)$ et $\mathcal{L}(d'', m''_i)$ (correspondant aux données sur P et S). À l'aide de cette méthode, Ciliberto et Miranda montrent:

Théorème 13. [20] *La conjecture de Harbourne-Hirschowitz est vraie quand les m_i sont tous égaux à un même entier m , avec $m \leq 12$.*

Grosso modo, dans les cas intéressants et à quelques détails techniques près, cette méthode est applicable lorsque les systèmes $\mathcal{L}(d', m'_i)$ et $\mathcal{L}(d'', m''_i)$ ne sont pas -1 -spéciaux. La méthode de Ciliberto-Miranda laisse une marge de manœuvre pour le

choix de d', d'', m'_i, m''_i , mais il arrive qu'aucun des choix ne soit convenable et que la récurrence proposée ne fonctionne pas. Comme pour la méthode d'Horace, les cas pour lesquels la méthode est difficilement applicable sont ceux à nombre de points fixé et multiplicités arbitrairement grandes.

2.4 Nouvelles méthodes et résultats

Les résultats que j'ai obtenus concernant les fonctions de Hilbert des réunions de gros points sont contenus dans les articles [3], [4], [5], [8], [9].

En premier lieu, on montre que l'on peut aborder la question de la fonction de Hilbert des réunions de gros points à l'aide de techniques de collisions. La fonction de Hilbert d'une réunion de gros points diminue (au sens large) lors d'une spécialisation, en particulier lors d'une collision. Néanmoins,

Théorème 14. [3] *Il existe une collision suffisamment générale de sorte que la fonction de Hilbert de cette collision est identique à celle d'une réunion générique des gros points.*

En conséquence, la fonction de Hilbert d'une réunion générique de gros points est le maximum des fonctions de Hilbert des collisions totales de gros points, et le calcul de la fonction de Hilbert des réunions de gros points est équivalent à la construction de collisions de grande fonction de Hilbert. Autrement dit, l'étude des collisions qui n'était qu'un outil annexe de la méthode d'Horace devient une méthode à part entière pour aborder le problème de la fonction de Hilbert des réunions de gros points.

Par ailleurs, au lieu de collisionner tous les points (collision totale), on peut n'en collisionner qu'un sous-ensemble (collision partielle), ce qui permet de retrouver numériquement (travail non publié) la récurrence de Ciliberto-Miranda, ou la méthode de Greuel-Lossen-Schustin [30] via le théorème précédent. Essentiellement, si l'on cherche la fonction de Hilbert d'une réunion de N gros points, on peut commencer par calculer la fonction de Hilbert d'un sous-ensemble n de N gros points. Si ce sous-ensemble a la fonction de Hilbert attendue, alors par le théorème précédent, on peut collisionner ces n gros points en un schéma Z de grande fonction de Hilbert. Si de plus la réunion U de Z et des $N - n$ autres gros points admet la fonction de Hilbert attendue, alors par semi-continuité, c'est également le cas pour la réunion générique des N gros points. Moyennant un lemme technique de transversalité, on se ramène au cas où U est une réunion de gros points. Effectuer les deux étapes de cette démarche (le calcul de la fonction de Hilbert des n gros points et de celle de U) revient à calculer la dimension des sous-systèmes $\mathcal{L}(d', m'_i)$ et $\mathcal{L}(d'', m''_i)$ considérés par Ciliberto et Miranda. On remarquera que les constructions géométriques sont différentes (nous collisionnons n points tandis que Ciliberto et Miranda amènent $N - n$ points sur une droite) mais que les conséquences numériques sont les mêmes. Ce n'est pas surprenant puisqu'une droite D du plan peut être transformée en un point par transformation birationnelle du plan. Autrement dit, collisionner des points ou les

amener sur une droite sont deux visions dans des modèles birationnels distincts du même phénomène.

Trois voies différentes ont été explorées pour appliquer la méthode suggérée par le théorème et construire des collisions totales de grande fonction de Hilbert ([4], [8], [5]).

La première méthode consiste en la notion de collisions hypersingulières. Les exemples montrent que si un gros point vient collisionner un schéma ponctuel situé en O en approchant le long d'une courbe C de direction tangente générique en O , la collision obtenue est de fonction de Hilbert d'autant plus grande que la courbe C est singulière en O . Ici, très singulière signifie que le nombre d'éclatements nécessaires pour normaliser la courbe est grand. En outre, la collision obtenue en bougeant le gros point le long de la courbe d'équation $y^k = x^{k+1}$ ne dépend pas de k si $k \gg 0$. On l'appelle collision hypersingulière de direction tangente (x^2, y) . On met à profit la notion de collision hypersingulière pour démontrer la conjecture de Nagata énoncée ci-dessus sous certaines conditions numériques.

Théorème 15. [4] *La conjecture de Nagata est vraie si $r \geq (\frac{8m(m+1)}{4m-1})^2$.*

Étapes de la démonstration. On place le premier gros point de multiplicité m en un point O du plan et on amène successivement les $r - 1$ autres gros points en O le long de trajectoires hypersingulières. Puisque l'on amène $r - 1$ points en O , le processus fait apparaître $r - 1$ collisions successives. Au lieu de calculer toutes ces collisions intermédiaires, on dégage une propriété géométrique stable par processus de collisions et qui permet de contrôler la collision finale par une récurrence immédiate.

Rappelons qu'un schéma ponctuel Z est monômial si son idéal est engendré par des monômes dans un système de coordonnées locales (x_1, x_2) adéquat. Les couples (a_1, a_2) tels que $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \notin I(Z)$ forment un sous-ensemble E de \mathbb{N}^2 vérifiant la condition $(\mathbb{N}^2 \setminus E) + \mathbb{N}^2 \subset (\mathbb{N}^2 \setminus E)$. On dit que E est un escalier et que Z est monômial d'escalier E .

Si Z est un schéma monômial compris entre les deux gros points O^M et O^{M+m} , et si Z' est la collision hypersingulière de Z et d'un gros point p^m approchant de O , alors Z' est monômial et il existe N tel que $O^N \subset Z' \subset O^{N+m}$. Autrement dit, la propriété d'être monômial et compris entre deux gros points dont la différence des multiplicités est m est stable sous l'effet d'une collision hypersingulière d'un point de multiplicité m . Il existe donc un entier N tel que la collision finale C vérifie $O^N \subset C \subset O^{N+m}$.

L'inclusion $C \subset O^{N+m}$ induit au niveau des longueurs l'inégalité $lg(C) = r \frac{m(m+1)}{2} \leq lg(O^{N+m}) = \frac{(N+m)(N+m+1)}{2}$. On en déduit une minoration de la forme $N \geq \mu(r, m)$. L'autre inclusion $O^N \subset C$ implique par semi-continuité $l(d, m^r) = 0$ pour $d < N$, en particulier pour $d < \mu(r, m)$. On a $\mu(r, m) > \sqrt{r}m$ quand $r \geq (\frac{8m(m+1)}{4m-1})^2$, et donc $l(d, m^r) = 0$ pour $d \leq \sqrt{r}m$. La conjecture de Nagata est vérifiée. ■

L'énoncé précédent met en évidence le rôle des collisions hypersingulières qui ont permis de montrer la conjecture sous réserve d'une certaine inégalité. Néanmoins, les cas les plus intéressants (car les plus difficiles!) dans ces problèmes de fonction de Hilbert sont comme nous l'avons vu ceux où le nombre de points est fixé et les multiplicités élevées et ces cas ne sont pas couverts par l'inégalité.

Un bon exemple de ces cas difficiles a été considéré par Iarrobino [37], qui a généralisé la conjecture de Nagata en dimension supérieure. S'appuyant sur une conjecture de Fröberg [28], Iarrobino a pronostiqué qu'une hypersurface de \mathbb{P}^d passant par r points en position générale avec multiplicité m est de degré au moins $\sqrt[d]{rm}$, sauf pour une liste finie explicite de couples (r, d) . De même que Nagata a montré sa propre conjecture dans \mathbb{P}^2 dans le cas où le nombre de points est un carré parfait, nous montrons la conjecture de Iarrobino quand le nombre de points dans \mathbb{P}^d est de la forme r^d .

Théorème 16. [8] *Si le corps de base est de caractéristique nulle, une hypersurface de \mathbb{P}^d passant par r^d points en position générale avec multiplicité m est de degré strictement supérieur à rm quand $r \geq 2$ et $(r, d) \notin \{(4, 2), (9, 2), (8, 3)\}$.*

Etapas de la démonstration. La méthode consiste à construire des incidences entre sous-variétés d'un schéma de Hilbert. On dispose de sous-variétés localement fermées $S(E_1, \dots, E_r)$ dans $\mathbb{H}^k(\mathbb{P}^d)$: les points de $S(E_1, \dots, E_r)$ paramètrent les sous-schémas de \mathbb{P}^d qui s'écrivent comme réunion disjointe de r schémas monômiaux d'escaliers E_1, \dots, E_r . On ne sait pas en général quelle est la fonction de Hilbert du point générique de $S(E_1, \dots, E_r)$. Néanmoins, on contrôle bien la fonction de Hilbert du point générique de certaines sous-variétés $S(E)$ (penser par exemple au cas où $r = 1$ et E est l'escalier d'un gros point). Par un argument de semi-continuité, le problème consiste alors à montrer qu'une certaine sous-variété $S(E)$ de fonction de Hilbert suffisamment maîtrisée est dans l'adhérence de la variété $S(E_m, \dots, E_m)$ correspondant à une réunion de gros points. Pour ce faire, on produit plusieurs conditions combinatoires suffisantes sous lesquelles l'adhérence $\overline{S(E_1, \dots, E_r)} \supset S(F_1, \dots, F_s)$ est satisfaite. Géométriquement, le critère principal correspond à $r = s = 1$ et au calcul d'une limite $\varphi_t(Z)$ lorsque Z est un schéma monomial d'escalier E_1 et φ_t est une famille d'automorphismes de $\text{Spec } k[[x_1, \dots, x_d]]$ qui dégénère lorsque $t \rightarrow 0$. À l'aide de ces critères d'incidence, le théorème se ramène à un problème combinatoire qui, de façon surprenante, se traite par récurrence sur la dimension. ■

En corollaire, on peut produire gratuitement de nouveaux contre-exemples au quatorzième problème de Hilbert, en suivant avec quelques légères adaptations la méthode de Nagata et en remplaçant le lemme fondamental de Nagata par notre théorème. Explicitement, nous obtenons:

Théorème 17. Soient a_{ij} ($i = 0 \dots d$, $j = 1, \dots, s^d$) les coordonnées de s^d points génériques de \mathbb{P}^d . Soit $V = k^{s^d}$ l'espace vectoriel de dimension s^d muni du produit scalaire canonique et $W \subset V$ le sous-espace vectoriel des vecteurs orthogonaux aux $d+1$ vecteurs $(a_{i1}, \dots, a_{is^d})$. Soit G l'ensemble des transformations linéaires σ de $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_{s^d}, t_1, \dots, t_{s^d}]$ vérifiant

- $\sigma(t_i) = t_i$
- $\sigma(x_i) = x_i + b_i t_i$

pour un $(b_1, \dots, b_{s^d}) \in W$. Alors l'algèbre des éléments de $k[x_1, \dots, x_{s^d}, t_1, \dots, t_{s^d}]$ invariants sous G n'est pas de type fini.

Remarque 18. Nous avons obtenu de nouveaux contre-exemples en partant du problème de fonction de Hilbert des réunions de gros points. Si l'on n'est pas intéressé par le problème de fonction de Hilbert mais directement par le quatorzième problème de Hilbert, on peut aller plus loin comme l'a montré Mukai [49]. Mukai considère également une action de Nagata généralisée et fait agir le groupe \mathbb{G}_a^{n-r} sur un espace vectoriel de dimension $2n$. Rappelons que si X est l'éclatement de \mathbb{P}^{r-1} en n points généraux, et si l'on note E_i les diviseurs exceptionnels, l'algèbre des polynômes invariants est isomorphe à l'algèbre de Cox $C = \bigoplus_{d, m_1, \dots, m_n} H^0(dH - \sum m_i E_i)$. Rappelons aussi que si le semi-groupe $S \subset \mathbb{Z}^{n+1} = \text{Pic}(X)$, $S = \{(d, m_i) \text{ avec } H^0(dH - \sum m_i E_i) \neq 0\}$ n'est pas de type fini, l'algèbre de Cox ne l'est pas non plus. Pour le quatorzième problème de Hilbert, Nagata montre que S n'est pas de type fini par un argument de fonction de Hilbert. Mukai procède différemment. Il montre qu'un diviseur exceptionnel de première espèce de X est dans tout système de générateurs de S et il cherche à produire une infinité de tels diviseurs à l'aide de l'action du groupe de Weyl sur le groupe de Picard de X . Il montre ainsi que l'algèbre des invariants n'est pas de type fini si (et seulement si) $\frac{1}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{n-r} \leq 1$.

La conjecture de Harbourne et Hirschowitz est correcte lorsque le nombre r de gros points en jeu est au plus 9. Pour le cas $r > 9$, cette conjecture manquait d'énoncés pour la soutenir. Nagata a certes calculé la fonction de Hilbert d'un nombre carré $r = k^2$ de points de multiplicité m , mais seulement jusqu'en degré $d = km$. Une bonne confirmation de la conjecture de Harbourne-Hirschowitz est de compléter le résultat de Nagata quand le nombre de points est une puissance de 4 en calculant la fonction de Hilbert en tout degré.

Théorème 19. [5] Si $r = 4^h$, la fonction de Hilbert H de r gros points génériques de \mathbb{P}^2 de multiplicité m est $H(d) = \min(r \frac{m(m+1)}{2}, \frac{(d+1)(d+2)}{2})$.

Étapes de la démonstration. La méthode est, comme dans le cas précédent, d'introduire des sous-variétés localement fermées du schéma de Hilbert de \mathbb{P}^2 et d'étudier leur incidence. Mais tandis que précédemment, ces sous-variétés paramétraient des réunions de schémas monômiaux, on utilise une autre classe de schémas ponctuels dont on peut contrôler la géométrie, à savoir les schémas définis par des idéaux intégralement clos. Les travaux de Zariski et Lipman montrent que si

Z est un schéma ponctuel défini par un idéal intégralement clos, son idéal peut être décrit géométriquement: il existe une suite d'éclatements $S_n \rightarrow \dots \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 = \mathbb{P}^2$ dont on note π la composition, et un diviseur effectif D sur S_n , combinaison linéaire de diviseurs exceptionnels, tels que $I(Z) = \pi_* \mathcal{O}(-D)$. En outre, on peut imposer au diviseur D une condition technique, dite de déchargement, qui le rend unique. Utilisant la notation d'Enriques, on peut modéliser cette suite d'éclatements et le diviseur par un graphe pondéré. Les idéaux intégralement clos dans le schéma de Hilbert se répartissent alors en sous-variétés localement fermées dépendant de leur diagramme d'Enriques. Par ailleurs, on sait caractériser les schémas intégralement clos parmi les schémas monômiaux.

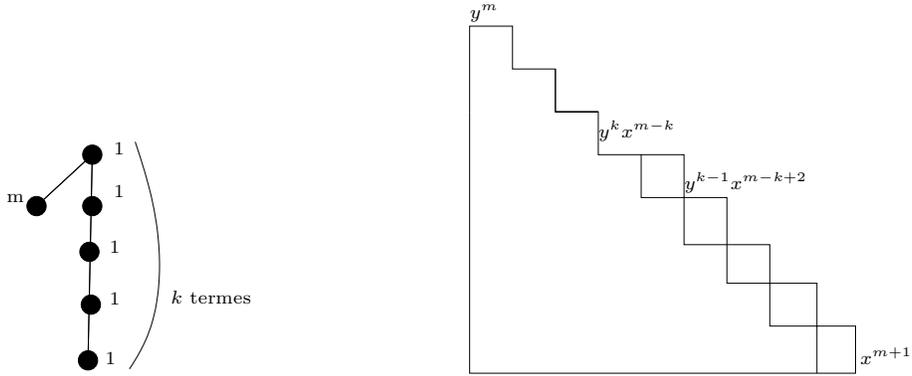


Diagramme d'Enriques du type T

Idéal monomial correspondant

$$I = (y^m, y^{m-1}x, y^{m-2}x^2, \dots, y^k x^{m-k}, y^{k-1} x^{m-k+2}, \dots, x^{m+1})$$

Géométriquement, l'incidence correspond à la construction d'une collision de 4^h gros points en un schéma du type T de l'exemple ci-dessus.

La collision s'effectue en plusieurs étapes, en alternant tantôt des raisonnements monômiaux, tantôt des raisonnements sur les diagrammes d'Enriques. Ce changement de point de vue ne pose pas problème puisque pour les schémas qui sont à la fois monômiaux et intégralement clos, on sait calculer le graphe d'Enriques à partir de l'escalier et réciproquement.

On amorce une récurrence en regroupant les 4^h gros points en 4 paquets de 4^{h-1} . Par l'hypothèse de récurrence, on peut collisionner les gros points de chacun des paquets en un schéma monomial et intégralement clos dont le graphe d'Enriques est du type T . On dispose ainsi de quatre schémas ponctuels Z_1, \dots, Z_4 . On collisionne Z_1 et Z_2 en un schéma Z_{12} , puis Z_{12} et Z_3 en un schéma Z_{123} et enfin Z_{123} et Z_4 en un schéma Z_{1234} . Chacune de ces trois collisions s'effectue selon le même principe. Expliquons par exemple comment obtenir Z_{123} . Le schéma Z_{12} est connu par son diagramme d'Enriques et on considère un éclatement $S \rightarrow \mathbb{P}^2$ construit à partir de données lues dans le diagramme de Z_{12} . On peut remonter les schémas Z_{12} et Z_3

dans la surface éclatée. Ces schémas vus dans S sont monômiaux et on en fait une collision hypersingulière Z_{123} . Le schéma monomial Z_{123} est également intégralement clos et se redescend de S sur \mathbb{P}^2 en un schéma, encore noté Z_{123} dont on connaît le graphe d'Enriques.

Le schéma $Z_{1234} \subset \mathbb{P}^2$ obtenu à la fin de ce processus est monomial et intégralement clos. En le regardant comme un schéma monomial, on calcule une dernière spécialisation Z de Z_{1234} . Explicitement, $Z = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t(Z_{1234})$ où φ_t est un automorphisme local de la forme $x \rightarrow x, y \rightarrow ty + x^2$. Ce schéma Z est de type T , ce qui achève la récurrence. ■

Remarque 20. *Les mêmes techniques permettent d'étendre le théorème précédent aux cas où le nombre de points r est de la forme $r = 4^h 9^l$. On peut retrouver ce résultat par le travail de Buckley et Zompatori [14], qui montrent le résultat suivant: si pour tout m , $l(d, m^s) = a(d, m^s)$ et $l(d, m^t) = a(d, m^t)$ alors $l(d, m^{st}) = a(d, m^t)$. Notre résultat se retrouve en prenant $s = 4$ et $t = 9$. Leur méthode est basée sur la dégénérescence de Ciliberto et Miranda.*

Chacun des deux résultats précédents a été traité par la mise en œuvre soigneuse de procédés exploitant des propriétés géométriques spécifiques. Devant ces difficultés, il est naturel de chercher des outils plus adaptés, permettant une mise en œuvre plus systématique et moins délicate quels que soient le nombre de points et les multiplicités mises en jeu. Un premier pas dans ce sens a été fait par Alexander et Hirschowitz [12]. Comme on l'a rappelé, ils ont calculé la fonction de Hilbert d'une réunion générique de gros points de l'espace projectif lorsque le nombre r de gros points est très supérieur à la plus grande des multiplicités M . L'outil principal de Alexander-Hirschowitz est un lemme différentiel décrivant la limite d'un système linéaire dépendant d'une réunion de gros points lorsque ces gros points se spécialisent sur un diviseur. À la même époque, nous disposions d'un lemme dans lequel nous ne pouvions spécialiser qu'un seul gros point, mais s'appliquant en revanche plus facilement à des problèmes avec points de grande multiplicité. Il a été possible de fusionner les deux lemmes en un unique énoncé. Voyons la nature de ce lemme.

On essaie de faire un raisonnement de type méthode d'Horace. On dispose des points $p_1(t), \dots, p_n(t)$ qui bougent en fonction du temps t . Pour un t générique, le système linéaire $\mathcal{L}(dH - m_1 p_1(t) \cdots - m_n p_n(t))$ correspond en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(dH)$ à un point $P(t)$ dans une Grassmannienne \mathbb{G} . On amène les points $p_1(t), \dots, p_n(t)$ sur un diviseur D quand $t \rightarrow 0$ de façon à ce que D devienne composante fixe du système linéaire. Alors le point $P(t)$ a une limite $P(0)$ dans la Grassmannienne. Le candidat naïf pour être la limite, à savoir $\mathcal{L}(dH - m p_1(0) \cdots - m p_n(0)) = D + \mathcal{L}(dH - D - (m_1 - 1)p_1(0) \cdots - (m_n - 1)p_n(0))$, est en général différent de $P(0)$ car ce système n'a pas la bonne dimension et n'est pas associé à un point de \mathbb{G} . Notre lemme différentiel affirme que, si la vitesse des points qui approchent D est convenablement choisie, $P(0)$ est un système linéaire inclus dans un système de

la forme $\mathcal{L}' = rD + \mathcal{L}(dH - rD - Z)$ où Z est un schéma décrit explicitement. La construction de Z et des hypothèses pour appliquer le lemme différentiel est assez technique et difficilement expliquable en quelques lignes. Nous renvoyons à [9] pour les détails. Le lemme de Alexander-Hirschowitz correspond au cas particulier $r = 1$. Le point clé de notre démonstration est l'étude des déformations infinitésimales des espaces de section de $\mathcal{L}(dH)$. Notre application principale consiste à compléter le résultat de Nagata.

Théorème 21. [9] Si $r = k^2$, la fonction de Hilbert H de r gros points génériques de multiplicité m est $H(d) = \min(r \frac{m(m+1)}{2}, \frac{(d+1)(d+2)}{2})$.

Etapas de la démonstration. Parmi les points $p_1(t), \dots, p_{k^2}(t)$, on sépare les $2k - 1$ premiers qu'on amène sur une droite H , tandis qu'on laisse fixes les $k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$ points restants. Notre lemme différentiel affirme que le système linéaire limite $\mathcal{L}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{L}(t)$ est inclus dans un système

$$\mathcal{L}' = rH + \mathcal{L}((d - r)H - Z - \sum_{i \geq 2k} m_i p_i),$$

où Z est schématiquement inclus dans H . Un léger travail technique permet de ramener le calcul de $\dim \mathcal{L}'$ au calcul de $\dim \mathcal{L}((d - r)H - \sum_{i \geq 2k} m_i p_i)$. Par récurrence sur k , on connaît alors $\dim \mathcal{L}'$ et on vérifie que $\dim \mathcal{L}' = a(d, m^{k^2})$. La suite d'inégalités $a(d, m^{k^2}) \leq l(d, m^{k^2}) = \dim \mathcal{L}(0) \leq \dim \mathcal{L}' = a(d, m^{k^2})$ donne finalement la valeur de $l(d, m^{k^2})$. ■

Si cet énoncé englobe le théorème précédent, il faut voir en revanche que les méthodes sont tout à fait différentes. Tandis que le premier énoncé repose sur des techniques astucieuses permettant de compenser le manque d'outils adaptés et ne pouvait être significativement amélioré, le deuxième énoncé repose sur la mise en place des outils adéquats. Il a ensuite été possible d'attaquer le problème par une spécialisation brutale des gros points le long d'une droite.

D'autres résultats devraient être accessibles par ce lemme différentiel (voir les perspectives dans la dernière section).

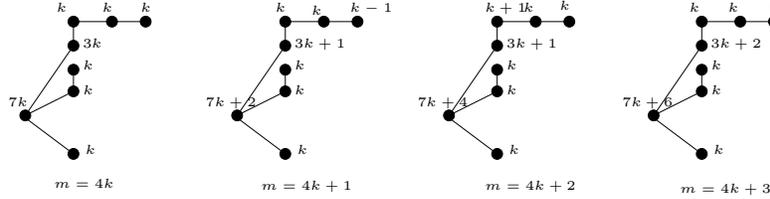
Remarque 22. On amène ici $2k - 1$ points sur une droite. Cela correspond géométriquement à la méthode de Ciliberto-Miranda. On peut effectivement remplacer le calcul intrinsèque du système limite par la méthode de Ciliberto-Miranda pour cet exemple précis. C'est néanmoins une simple coïncidence. En général, les deux méthodes sont d'applications disjointes. La méthode de Ciliberto et Miranda permet une récurrence efficace tandis que le but du lemme différentiel est surtout de traiter les cas de points de grosses multiplicités. Par exemple, si l'on essaie de calculer $l(174, 55^{10})$, la méthode de Ciliberto-Miranda ne s'applique pas tandis que l'on peut utiliser la méthode différentielle pour aligner 4 des 10 points sur une droite. Le prix à payer est comme toujours qu'il est difficile de continuer à progresser dans le problème après avoir aligné les 4 points.

Une deuxième application du lemme différentiel est le calcul de la collision générique successive de quatre gros points de même multiplicité, dont on montre qu'elle est définie par un idéal intégralement clos et dont on décrit explicitement le graphe d'Enriques.

Théorème 23. [9] Soient $q_0 \in \mathbb{P}^2$, v_1, v_2, v_3 trois directions tangentes distinctes en q_0 et C_1, C_2, C_3 trois courbes lisses passant par q_0 avec direction tangente respective v_1, v_2, v_3 . Soit Z la collision successive des gros points $p_0^m, p_1^m, p_2^m, p_3^m$ où:

- p_0 est situé en q_0 ,
- p_1 se déplace le long de C_1 (resp. p_2 sur C_2 , p_3 sur C_3).

Alors Z est défini par le diagramme d'Enriques suivant, qui dépend de m modulo 4.



L'intérêt de cet énoncé est double.

Tout d'abord, il illustre un phénomène plus général: de nombreuses collisions peuvent être calculées sur le même principe et le lemme différentiel enrichit ainsi la méthode d'Horace de ces nouvelles collisions.

Ensuite, il précise la façon dont on doit procéder pour construire des collisions de grande fonction de Hilbert. On sait qu'il existe des collisions qui préservent la fonction de Hilbert et que la construction de telles collisions permettrait de montrer la conjecture de Harbourne-Hirschowitz. Il est très naturel d'essayer de construire ces collisions en amenant les points successivement le long de courbes lisses génériques de grand degré. Le calcul de cette quatre-collision montre que cette stratégie est vaine.

3 Géométrie des schémas de Hilbert ([7], [10], [6])

Soient X une variété quasi-projective et $\mathbb{H}^d(X)$ le schéma de Hilbert qui paramètre les sous-schémas 0-dimensionnels de X de longueur d . Le problème est de comprendre la géométrie de ce schéma de Hilbert, et en particulier sa cohomologie.

Les pathologies surviennent rapidement, comme l'a montré Iarrobino: si X est lisse de dimension au moins trois et si d est un entier suffisamment grand, $\mathbb{H}^d(X)$ est réductible [36]. En d'autres termes, certains schémas ponctuels de degré d ne s'écrivent pas comme collision de d points. La démonstration de Iarrobino montre en outre que ce n'est pas un fait géométrique exceptionnel, mais un phénomène commun.

La composante de $\mathbb{H}^d(X)$ contenant les réunions de d points et leurs collisions est de dimension $d \dim(X)$ et il est facile de construire des composantes de dimension strictement plus grande que $d \dim(X)$ en mettant en évidence des familles d'idéaux explicites.

En revanche, si X est lisse de dimension 2, $\mathbb{H}^d(X)$ est lisse et irréductible de dimension attendue $2d$. Pour cette raison, l'étude de $\mathbb{H}^d(X)$ se fait naturellement lorsque X est une surface lisse, ce que nous supposons dorénavant. De nombreux auteurs ont étudié la cohomologie de $\mathbb{H}^d(X)$, tant la structure additive que la structure multiplicative. Ce problème a fait des progrès spectaculaires récemment, notamment sous l'impulsion de Göttsche, Nakajima, Grojnowski, Lehn, Sorger, Vasserot.

Dans cette section, nous travaillons sur le corps des complexes et, pour simplifier, l'homologie et la cohomologie sont systématiquement à coefficients rationnels bien que certains résultats soient également valables à coefficients entiers. De même, nous nous concentrerons sur les cas où X est projective (bien que l'homologie de Borel-Moore et la cohomologie à support compact permettent de s'affranchir de cette hypothèse) à l'exception d'un paragraphe où nous considèrerons $X = \mathbb{A}^2$.

Nombres de Betti

Le premier résultat a été établi par Ellingsrud et Strømme [24] qui ont calculé les nombres de Betti $b_i(\mathbb{H}^d(X))$ quand X est un plan ou une surface de Hirzebruch \mathbb{F}_n . Leur méthode consiste à considérer une action d'un tore \mathbb{C}^* sur $\mathbb{H}^d(X)$ admettant un nombre fini de points fixes. On dispose alors sur $\mathbb{H}^d(X)$ d'une stratification de Bialynicki-Birula: les strates sont des espaces affines, paramétrées par les points fixes au sens où chacune des strates contient un unique point fixe et les adhérences de ces strates forment une base de l'homologie. Connaître les nombres de Betti revient alors à déterminer le nombre de strates de dimension fixée, ou encore la dimension de la strate S_p passant par un point fixe p , ce qui est possible via un calcul d'espace tangent en chacun des points fixes. Dans le cas $X = \mathbb{P}^2$, la formule obtenue est $b_{2k+1} = 0$ et $b_{2k} = \sum_{d_0+d_1+d_2=d} \sum_{p+r=k-d_1} P(p, d_0 - p)P(d_1)P(2d_2 - r, r - d_2)$ où $P(m, n)$ est le nombre de partitions de m en parts valant au plus n .

Quand X est une surface projective lisse quelconque, les nombres de Betti $b_i(\mathbb{H}^d(X))$ ont été calculés par Göttsche [29] qui les a organisés en une série formelle de deux variables. Notons $b_{i,n} = \dim H^i(\mathbb{H}^n(X))$ et $b_i = \dim H^i(X) = b_{i,1}$. Alors,

$$\sum_{n \geq 0, i \geq 0} b_{i,n} t^i q^n = \prod_{m > 0, i \geq 0} (1 - (-1)^i t^{2m-2+i} q^m)^{(-1)^{i+1} b_i}.$$

Cette formule surprenante dit que les nombres de Betti s'expriment par une formule compacte quand l'on considère simultanément la collection de tous les $\mathbb{H}^d(X)$, $d \geq 0$. Elle sous-entend un lien unissant les différents $\mathbb{H}^d(X)$. Ce lien a été mis en évidence par Nakajima en termes de structure d'espace de Fock [53]. Grojnowski a annoncé des résultats similaires [31].

Espace de Fock

Notons $C = \bigoplus_{d \geq 0} H^*(\mathbb{H}^d(X))$. Nakajima a associé à chaque classe de cohomologie $v \in H^*(X)$ et chaque entier $i > 0$ un opérateur de création $q_i(v) : C \rightarrow C$ et un opérateur de destruction $q_{-i}(v) : C \rightarrow C$.

Rappelons qu'un schéma curviligne de longueur i est un schéma isomorphe à $\text{Spec } k[t]/(t^i)$. Les opérateurs de Nakajima sont définis via le formalisme cohomologique. Ils s'expriment géométriquement quand $v \in H^*(X)$ et $\alpha \in H^*(\mathbb{H}^d(X))$ sont représentés par des sous-variétés irréductibles U et A : $q_i(v) \cdot \alpha$ est représenté par la sous-variété irréductible de $\mathbb{H}^{d+i}(X)$ dont le point générique paramètre la réunion disjointe $Z_1 \amalg Z_2$, où Z_1 est le sous-schéma curviligne générique de X de longueur i et de support le point générique de U , et Z_2 est le schéma paramétré par le point générique de A . Intuitivement, $q_i(v)$ est l'opérateur qui ajoute un schéma ponctuel de degré i dont le support est dans la classe de cohomologie v . De manière similaire, $q_{-i}(v)$ est un opérateur qui supprime un schéma ponctuel de degré i dont le support est dans la classe de cohomologie v . L'algèbre engendrée par les opérateurs $\{q_i(v)\}$ agit sur C et fait de C un module irréductible. On peut reformuler cette construction en disant que cette action identifie C à l'espace de Fock $\mathbb{F}(H^*(X))$. L'existence d'une telle structure avait été conjecturé par Vafa et Witten [57].

Structure multiplicative

Les premiers travaux concernant la structure multiplicative de $H^*(\mathbb{H}^d(X))$ ont été effectués ici encore par Ellingsrud et Strømme [26] (voir aussi Fantechi-Göttsche [27]). Ils ont donné une description, malheureusement très indirecte, de la structure d'anneau dans le cas où $X = \mathbb{P}^2$ (ils construisent une variété Y dont la cohomologie est calculable, un plongement $i : \mathbb{H}^d(\mathbb{P}^2) \rightarrow Y$ et établissent ensuite l'isomorphisme $H^*(\mathbb{H}^d(\mathbb{P}^2)) \simeq H^*(Y)/\text{Ann}(i^*(1))$, où Ann désigne l'idéal annulateur).

Le point mis en évidence par Lehn [43] est que l'action construite par Nakajima donne un accès à la structure multiplicative de $H^*(\mathbb{H}^d(X))$ via l'action des fibrés tautologiques.

Notons $U \subset X \times \mathbb{H}^d(X)$ la famille universelle associée au schéma de Hilbert, $p : U \rightarrow X$ et $q : U \rightarrow \mathbb{H}^d(X)$ les projections naturelles. Si $L \rightarrow X$ est un fibré de rang n , $L^{[d]} = q_* p^* L$ est un fibré de rang nd sur $\mathbb{H}^d(X)$ appelé fibré tautologique. Les classes de Chern des fibrés tautologiques $L^{[d]}$ peuvent être vues comme des opérateurs sur la cohomologie $H^*(\mathbb{H}^d(X))$, et L peut être vu comme un opérateur sur $C = \bigoplus_{d \geq 0} H^*(\mathbb{H}^d(X))$ via la collection des $L^{[d]}$. Concrètement, on rassemble ces opérateurs en un opérateur caractère de Chern $ch(L) : C \rightarrow C$. L'idée de Lehn est de calculer cet opérateur en termes des opérateurs de création et de destruction de Nakajima. Si on note \mathcal{A} l'algèbre d'opérateurs sur C engendrée par les classes de Chern des fibrés tautologiques, Lehn obtient une description algorithmique de l'action de \mathcal{A} sur C .

Dans le cas (non projectif) $X = \mathbb{A}^2$, on peut en déduire une description plaisante

de l'anneau de cohomologie $H^*(\mathbb{H}^d(\mathbb{A}^2))$. Notons S_d le groupe symétrique, \mathbb{Q}^{S_d} la \mathbb{Q} -algèbre du groupe S_d et $C(S_d) \subset \mathbb{Q}^{S_d}$ la sous-algèbre des fonctions constantes sur les classes de conjugaison de S_d . Cette algèbre est munie d'une filtration croissante F_i , où $F_i \subset C(S_d)$ contient les fonctions dont le support est formé de permutations s'écrivant comme un produit d'au plus i transpositions. Le produit sur \mathbb{Q}^{S_d} induit un produit sur le gradué $Gr(C(S_d))$. Lehn et Sorger [45] ont montré l'isomorphisme d'anneau $Gr(C(S_d)) \simeq H^*(\mathbb{H}^d(\mathbb{A}^2))$. Vasserot a obtenu indépendamment le même résultat [58].

Pour une surface quelconque, Costello et Grojnowski identifient l'anneau de cohomologie à deux algèbres d'opérateurs [21].

Dans le cas de surfaces particulières, on peut obtenir comme pour le plan affine des descriptions plus explicites. Lehn et Sorger ont étendu leurs résultats aux cas des surfaces $K3$ [44]. Li, Qin, Wang ont calculé la structure d'anneau pour certaines surfaces toriques [46]. Malheureusement, le cas de \mathbb{P}^2 n'est pas accessible par ces descriptions plus directes.

La construction de Nakajima-Grojnowski [53] [31] a été fondamentale pour la compréhension de la structure d'anneau de $H^*(\mathbb{H}^d(X))$ et les travaux cités ([58], [43], [45], [21], [44], [46]) s'appuient abondamment sur ce travail. Nous allons voir que l'on peut, en utilisant des techniques d'anneau de Chow équivariant indépendantes du cadre de Nakajima, calculer l'anneau de Chow de $\mathbb{H}^d(X)$ lorsque X est une surface projective torique lisse sur un corps k algébriquement clos. (Lorsque $k = \mathbb{C}$, l'anneau de Chow $A^*(\mathbb{H}^d(X))$ et l'anneau de cohomologie $H^{2*}(\mathbb{H}^d(X))$ sont naturellement isomorphes).

3.1 Irréductibilité des schémas de Hilbert gradués

Dans l'optique du calcul des anneaux de Chow $A^*(\mathbb{H}^d(X))$, la première partie du travail consiste à calculer les composantes irréductibles de certains schémas de Hilbert gradués au sens de Haiman-Sturmfels [32] et qui sont des généralisations des "variétés de Iarrobino". Cette étape est réalisée dans mon article [7]. Le corps k est de nouveau algébriquement clos de caractéristique quelconque.

Soit $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction vérifiant $H(n) = 0$ pour $n \gg 0$. Un idéal homogène $I \subset k[x, y]$ a pour fonction de Hilbert H si la partie homogène $I_d \subset k[x, y]_d$ contenant les polynômes homogènes de degré d est de codimension $H(d)$. La variété de Iarrobino $\mathbb{H}_{1,1}(H)$ paramètre par définition les idéaux homogènes $I \subset k[x, y]$ de fonction de Hilbert H . Iarrobino a montré que pour tout H , la variété $\mathbb{H}_{1,1}(H)$ est soit vide, soit lisse et irréductible, et a calculé sa dimension [38].

Les variétés de Iarrobino sont naturellement des lieux fixes sous l'action d'un tore. Le plan affine est une variété torique pour l'action naturelle du tore $T = k^* \times k^*$. On dispose d'une action induite de T sur le schéma de Hilbert $\mathbb{H}(\mathbb{A}^2) = \coprod \mathbb{H}^d(\mathbb{A}^2)$. La variété $\mathbb{H}_{11} \subset \mathbb{H}(\mathbb{A}^2)$ est par définition le lieu fixe sous l'action du sous-tore $T_{11} = \{(t, t)\} \subset T$. C'est une réunion disjointe de variétés de Iarrobino $\mathbb{H}_{11}(H)$.

Plus généralement, on peut considérer le sous-tore $T_{ab} = \{(t^a, t^b)\} \subset T$ et le

lieu fixe $\mathbb{H}_{ab} \subset \mathbb{H}(\mathbb{A}^2)$ sous l'action de T_{ab} . Ce lieu fixe paramètre les idéaux quasi-homogènes, ie. les idéaux homogènes quand x et y sont de poids respectifs a et b . Les composantes irréductibles de \mathbb{H}_{ab} se décrivent de façon similaire au cas homogène.

Théorème 24. [7] *Les composantes irréductibles de \mathbb{H}_{ab} sont en bijection avec les fonctions de Hilbert H possibles: $\mathbb{H}_{ab} = \coprod \mathbb{H}_{ab}(H)$.*

Si l'énoncé est semblable au cas homogène, la démonstration en est différente: tandis que les variétés de Iarrobino admettent une action de GL_2 qui permettent d'assurer l'irréductibilité, cette action disparaît dans le cas quasi-homogène et la recherche des composantes demande davantage de travail.

Etapes de la démonstration. Un argument général nous assure que \mathbb{H}_{ab} est lisse et réunion disjointe des $\mathbb{H}_{ab}(H)$. Le problème est de montrer la connexité de $\mathbb{H}_{ab}(H)$. L'idée pour remplacer l'action de GL_2 est de considérer la stratification de Bialynicki-Birula de $\mathbb{H}_{ab}(H)$ associée à l'action d'un sous-tore général $T' \subset T$ de dimension 1. Les strates S_i sont paramétrées par les points p_i de $\mathbb{H}_{ab}(H)$ qui sont fixes sous T' . En chaque point p_i , on décrit l'espace tangent V_i à S_i . À l'aide de cette description, on construit une application exponentielle $V_i \rightarrow \mathbb{H}_{ab}(H)$ qui est un plongement et réalise un isomorphisme sur la strate de Bialynicki-Birula S_i . En traçant une courbe affine $\mathbb{A}^1 \rightarrow V_i$ bien choisie sur l'espace tangent V_i , on obtient une courbe dans la strate de Bialynicki-Birula S_i . Cette courbe se complète en une courbe projective $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{H}_{ab}$ dont l'image du point à l'infini se trouve dans une autre strate S_j . En outre, il existe un ordre naturel sur les strates de sorte que $S_i > S_j$. En répétant l'opération, on descend ainsi de strate en strate et, comme le nombre de strates est fini, on aboutit finalement dans une strate fermée. On montre enfin que la strate fermée est unique et réduite à un point. Toutes les strates peuvent donc être connectées à ce point, et la connexité s'ensuit. ■

Un des points clés de la démonstration est la construction des isomorphismes $V_i \simeq S_i$, qui peuvent être vus comme des cartes sur le schéma de Hilbert gradué $\mathbb{H}_{ab}(H)$ permettant de faire des calculs explicites. Les méthodes employées se généralisent et permettent de décrire des cartes sur le schéma de Hilbert (non gradué) $\mathbb{H}^d(\mathbb{A}^2)$.

D'autres cartes avaient été produites précédemment par Ellingsrud et Strømme [25]. Ils considèrent une stratification de Bialynicki-Birula de $\mathbb{H}^d(\mathbb{A}^2)$ associée à l'action d'un tore de dimension un T' (en dépit de la non projectivité de \mathbb{A}^2 , l'action peut être choisie de sorte que les strates recouvrent $\mathbb{H}^d(\mathbb{A}^2)$). Ils construisent ensuite une carte pour chacune des strates S : ils introduisent un espace affine $Spec k[s_{ij}]$, définissent une famille $F \subset \mathbb{A}^2 \times Spec k[s_{ij}]$, plate au dessus de $Spec k[s_{ij}]$. Leur théorème affirme que le morphisme $Spec k[s_{ij}] \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{A}^2)$ associé à la famille F induit un isomorphisme $Spec k[s_{ij}] \simeq S$.

Les techniques employées pour produire les cartes sont totalement différentes. Ellingsrud et Strømme procèdent de la manière suivante. Si p est le point fixe sous T' d'une strate S et si $I \subset k[x, y]$ est l'idéal paramétré par p , les générateurs de I peuvent être réalisés comme les mineurs d'une matrice M apparaissant dans une

résolution (non minimale) de I . En déformant la matrice M à l'aide de coefficients s_{ij} et en prenant les mêmes mineurs, on obtient une famille d'idéaux paramétrés par $\text{Spec } k[s_{ij}]$ qui est la famille plate F définissant la carte. De notre côté, nous étendons les déformations infinitésimales. Un élément de l'espace tangent $T_p S = \text{Spec } k[b_1, \dots, b_n]$ paramètre une famille plate au dessus de $\text{Spec } k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ dont la fibre spéciale est I . En considérant tous les vecteurs tangents simultanément, on obtient une famille plate au dessus de $\text{Spec } k[b_1, \dots, b_n]/(b_1, \dots, b_n)^2$ dont la fibre spéciale est I . Nous étendons cette famille plate en une famille plate au dessus de $\text{Spec } k[b_1, \dots, b_n]$ et vérifions que le morphisme associé est un plongement par un calcul en coordonnées de Plücker.

Les strates de Bialynicki-Birula sur $\mathbb{H}^d(\mathbb{A}^2)$ dépendent du choix de l'action de T' . Notre méthode n'est applicable que pour certaines actions particulières tandis que la méthode de Ellingsrud et Strømme semble plus générale. Néanmoins, des exemples montrent que les cas supplémentaires obtenus par Ellingsrud et Strømme ne sont pas corrects en général ([7], exemple 16).

3.2 L'anneau de Chow $A^*(\mathbb{H}^d(X))$ quand X est une surface torique projective

Si X est une surface torique projective lisse, je calcule dans [10] l'anneau de Chow $A^*(\mathbb{H}^d(X))$ par des techniques équivariantes.

Dans cette section, nous travaillerons sur un corps algébriquement clos quelconque et avec des anneaux de Chow à coefficients rationnels. Pour alléger la présentation, la surface X sera projective même si le cas de certaines surfaces non projectives, tel le plan affine, est accessible par les mêmes méthodes.

Soit $T \simeq k^* \times k^*$ le tore agissant sur X . Le schéma de Hilbert $\mathbb{H}^d = \mathbb{H}^d(X)$ étant naturellement muni d'une action de T , on dispose d'un anneau de Chow équivariant $A_T^*(\mathbb{H}^d)$ construit par Edidin et Graham [22]. Le point de départ de l'approche équivariante est un théorème de Brion [13] permettant de réaliser l'anneau de Chow usuel $A^*(\mathbb{H}^d)$ comme un quotient de l'anneau de Chow équivariant $A_T^*(\mathbb{H}^d)$. Le morphisme $\mathbb{H}^d \rightarrow \text{Spec } k$ induit par image inverse un morphisme $A_T^*(\text{Spec } k) \simeq \mathbb{Q}[t_1, t_2] \rightarrow A_T^*(\mathbb{H}^d)$. Si l'on note $\mathbb{Q}[t_1, t_2]^+$ l'ensemble des polynômes nuls à l'origine, alors $A^*(\mathbb{H}^d) \simeq A_T^*(\mathbb{H}^d)/\mathbb{Q}[t_1, t_2]^+ A_T^*(\mathbb{H}^d)$.

Le calcul de $A_T^*(\mathbb{H}^d)$ s'effectue à l'aide de techniques de localisation aux points fixes. Le lieu fixe $\mathbb{H}^{d,T}$ de \mathbb{H}^d sous l'action de T est formé d'un nombre fini de points. L'anneau $A_T^*(\mathbb{H}^{d,T})$ est donc un produit d'anneaux de polynômes $\mathbb{Q}[t_1, t_2]$, le nombre de copies de $\mathbb{Q}[t_1, t_2]$ étant le nombre de points fixes. En outre, la restriction aux points fixes $A_T^*(\mathbb{H}^d) \rightarrow A_T^*(\mathbb{H}^{d,T})$ est injective. Ainsi, la structure d'anneau de $A_T^*(\mathbb{H}^d) \subset A_T^*(\mathbb{H}^{d,T})$ est complètement déterminée. Brion montre en outre que l'image du morphisme de localisation $A_T^*(\mathbb{H}^d) \rightarrow A_T^*(\mathbb{H}^{d,T})$ est l'intersection des images des morphismes $A_T^*(\mathbb{H}^{d,T'}) \rightarrow A_T^*(\mathbb{H}^{d,T})$ où T' parcourt les sous-tore de codimension un de T . En résumé, le calcul de $A^*(\mathbb{H}^d)$ a été réduit via les résultats de Brion au calcul de $A_T^*(\mathbb{H}^{d,T'}) \subset A_T^*(\mathbb{H}^{d,T})$. Les étapes sont alors les suivantes.

- Tout d'abord, on étudie la géométrie de $\mathbb{H}^{d,T'} \subset \mathbb{H}^d$. On identifie les composantes irréductibles à des produits $V_1 \times \dots \times V_r$ où chaque terme V_i du produit est un espace projectif ou un schéma de Hilbert gradué $\mathbb{H}_{ab}(H)$ dont on a établi l'irréductibilité dans la section précédente.
- Un schéma de Hilbert gradué $\mathbb{H}_{ab}(H)$ apparaissant parmi les termes V_i se plonge dans un produit \mathbb{G} de Grassmanniennes: un point de $\mathbb{H}_{ab}(H)$ paramètre un idéal quasi-homogène $I = \bigoplus I_d \subset k[x, y]$ et chaque composante $I_d \subset k[x, y]_d$ est un point d'une Grassmannienne. Une légère modification d'un argument de King-Walter [40] montre que le morphisme de restriction $A_T^*(\mathbb{G}) \rightarrow A_T^*(\mathbb{H}_{ab}(H))$ est surjectif. L'idée de King-Walter est que la famille universelle au dessus de $\mathbb{H}_{ab}(H)$ est une famille de $k[x, y]$ -modules admettant une "bonne" résolution. Comme l'on sait calculer l'anneau de Chow équivariant des Grassmanniennes, on obtient une description de l'anneau $A_T^*(\mathbb{H}_{ab}(H))$.
- Par une formule de Künneth équivariante et les deux points précédents, on en déduit le calcul de $A_T^*(\mathbb{H}^{d,T'}) \subset A_T^*(\mathbb{H}^{d,T})$.

À ce stade, la description de l'anneau $A_T^*(\mathbb{H}^d)$ est complète, mais la formule comporte des produits tensoriels, des sommes directes et des intersections. La dernière étape consiste en une application d'une formule d'intégration de Bott (établie par Edidin et Graham dans un contexte algébrique [23]) pour obtenir une description plus élégante: $A_T^*(\mathbb{H}^d) \subset \mathbb{Q}[t_1, t_2]^{\mathbb{H}^{d,T}}$ est décrit comme un ensemble de n -uplets de polynômes satisfaisant des relations de congruence explicites. L'anneau de Chow usuel est le quotient de l'anneau équivariant par l'idéal engendré par les éléments (f, \dots, f) , avec f homogène de degré strictement positif. Par exemple, pour le plan \mathbb{P}^2 , nous obtenons la description suivante.

Théorème 25. [10] *L'anneau de Chow équivariant $A_T^*(\mathbb{H}^3\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{Q}[t_1, t_2]^{\{A, A_{12}, A_{13}, \dots, E\}}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $aA + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + eE$ dont les coefficients sont des polynômes en t_1, t_2 vérifiant les relations*

- $a + a_{13} - d - d_{13} \equiv 0 \pmod{t_2^2}$
- $d - d_{13} \equiv 0 \pmod{t_2}$
- $a - a_{13} \equiv 0 \pmod{t_2}$
- $a - b \equiv 0 \pmod{2t_1 - t_2}$
- $b - b_{13} \equiv 0 \pmod{t_2}$
- $-b + 3c - 3c_{12} + b_{12} \equiv 0 \pmod{t_1^3}$
- $-b + c + c_{12} - b_{12} \equiv 0 \pmod{t_1^2}$
- $3b - c + c_{12} + -3b_{12} \equiv 0 \pmod{t_1}$
- $b - b_{23} \equiv 0 \pmod{t_2 - t_1}$
- $c - d + c_{23} - d_{23} \equiv 0 \pmod{(t_1 - t_2)^2}$
- $c + d - c_{23} - d_{23} \equiv 0 \pmod{t_1 - t_2}$

- $c_{23} - d_{23} \equiv 0 \pmod{t_1 - t_2}$
- $c - c_{13} \equiv 0 \pmod{t_2}$
- $d - 2e + d_{12} \equiv 0 \pmod{t_1^2}$
- $d - d_{12} \equiv 0 \pmod{t_1}$
- Toutes les relations se déduisant des précédentes par action du groupe symétrique S_3 .

L'anneau $A^*(\mathbb{H}^3\mathbb{P}^2)$ est le quotient de $A_T^*(\mathbb{H}^3\mathbb{P}^2)$ par l'idéal engendré par les éléments $fA + \dots + fE$, $f \in \mathbb{Q}[t_1, t_2]$ homogène et de degré strictement positif.

3.3 Incidence des strates des schémas de Hilbert gradués

Revenons au schéma de Hilbert gradué $\mathbb{H}_{ab}(H)$. Rappelons que si l'on attribue à x le poids a et à y le poids b , $\mathbb{H}_{ab}(H)$ paramètre les idéaux I de $k[x, y]$ homogènes dont la partie $I_d \subset k[x, y]_d$ de poids d est de codimension $H(d)$. Ce schéma de Hilbert a joué un rôle important dans le calcul de $A^*(\mathbb{H}^d(\mathbb{P}^2))$. Il est muni d'une stratification de Bialynicki-Birula dont nous voudrions comprendre la géométrie.

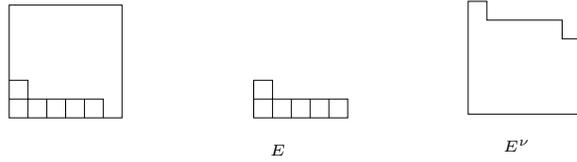
Pour certains triplets (a, b, H) , $\mathbb{H}_{ab}(H)$ est une Grassmannienne et les strates de Bialynicki-Birula coïncident avec les cellules de Schubert. On dispose alors de deux descriptions de son anneau de Chow: par les techniques équivariantes expliquées précédemment ou par les formules standards de Pieri-Giambelli. Pour (a, b, H) quelconque, on dispose toujours de la description équivariante et on cherche à étendre la description usuelle, qui est de nature géométrique. En d'autres termes, les adhérences des strates de Bialynicki-Birula forment une base de l'anneau de Chow $A_{\mathbb{Z}}^*(\mathbb{H}_{ab}(H))$ et le problème est de décrire le produit relativement à cette base. Le problème est plus subtil que dans le cas Grassmannien. Comprendre les adhérences des cellules semble un préliminaire indispensable pour pouvoir écrire les formules d'intersection et ces adhérences sont mal comprises. L'adhérence d'une cellule de Bialynicki-Birula n'est pas une réunion de cellules; étant données deux cellules B_1 et B_2 , on ne sait pas décider si $\overline{B_1} \cap B_2 \neq \emptyset$.

Le théorème suivant, qui est le résultat principal de [6], donne une réponse partielle à l'incidence des cellules dans un esprit similaire au cas Grassmannien. Il donne une condition nécessaire à l'incidence $\overline{B_1} \cap B_2 \neq \emptyset$. On ne connaît pas d'exemple pour lequel cette condition ne serait pas suffisante. Le théorème améliore un résultat précédent de Yameogo [61] qui donnait une condition nécessaire dont on savait qu'elle n'était pas suffisante.

La variété $\mathbb{H}_{ab} = \coprod \mathbb{H}_{ab}(H)$ ne dépend de (a, b) qu'à constante multiplicative près. Quand $ab \leq 0$, il n'existe qu'une unique strate dans $\mathbb{H}_{ab}(H)$ et le problème d'incidence ne se pose pas. On peut dès lors supposer $a > 0, b > 0$. En outre, on suppose que la stratification de Bialynicki-Birula est induite par une action de k^* sur $k[x, y]$ de la forme $t.x = t^p x, t.y = t^q y$ avec $bp - aq > 0$. Chaque strate de Bialynicki-Birula contient un unique schéma monomial Z , auquel est attaché un escalier $E = \{(\alpha, \beta) \text{ tel que } x^\alpha y^\beta \notin I(Z)\}$. Le théorème exprime la condition

d'incidence entre strates en termes de partitions planes sur les escaliers associés.

Une partition plane sur un escalier E est une fonction $P : E \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $P(a, b) \geq P(a', b')$ si $a \geq a'$ et $b \geq b'$. On note alors $P(E) \subset \mathbb{Z}^2$ le sous-ensemble défini par $P(E) = \{m \text{ tel que } \exists n \in E, m = n + P(n)(-b, a)\}$. Un escalier E de



cardinal n est inclus dans une boîte de taille $n \times n$ et on note E^ν son escalier dual qui est le complémentaire de E dans la boîte, comme le montre la figure.

Théorème 26. [6] Si B_1 et B_2 sont deux strates de Bialynicki-Birula associées à des escaliers E_1 et E_2 vérifiant $\overline{B_1} \cap B_2 \neq \emptyset$, alors

- il existe une partition plane P sur E_2 vérifiant $P(E_2) = E_1$
- il existe une partition plane P^ν sur E_2^ν vérifiant $P(E_2^\nu) = E_1^\nu$.

Etapes de la démonstration. On considère une description alternative des strates de Bialynicki-Birula en termes de bases de Gröbner: fixer la strate de Bialynicki-Birula d'un idéal revient à fixer son idéal initial pour un ordre bien choisi. Considérons un morphisme $\mathbb{A}^1 = \text{Spec } k[t] \rightarrow \mathbb{H}_{ab}(H)$ défini par une famille d'idéaux $I(t)$. Si l'image du point générique est dans la strate B_1 et celle de 0 dans la strate B_2 , des arguments de base de Gröbner nous fournissent des générateurs privilégiés de $I(t)$ à partir desquels on peut définir la partition P^ν . Ensuite, à l'aide d'un argument de dualité correspondant géométriquement à la liaison de deux schémas de dimension 0 dans une intersection complète, on construit la partition P . ■

4 Perspectives de recherche et autres questions ouvertes

Anneaux de Chow

- Un but naturel est de produire une présentation plus explicite de l'anneau de Chow du schéma de Hilbert des surfaces toriques. Existe-t-il un formalisme "simple" donnant le calcul de $A^*(\mathbb{H}^d(X))$? La réponse est oui dans le cas local, quand $X = \mathbb{A}^2$, d'après les travaux de Lehn-Sorger-Vasserot. Dans le cas où X est une surface torique quelconque, la description est plus touffue. Le calcul de $A^*(\mathbb{H}^d(X))$ via les techniques équivariantes fait clairement apparaître des contributions globales, liées à la géométrie de X , et des contributions locales, liées à la géométrie du schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas situés en un

point p . La technique employée mélange les deux contributions. On aimerait travailler sur chacune des contributions séparément. Il faut sans doute pour cela considérer les opérateurs de Nakajima équivariants, qui mesurent comment la structure globale de X intervient dans cet anneau. On cherchera ainsi à unifier les formules de Lehn-Sorger-Vasserot et les formules équivariantes.

Problèmes de fonction de Hilbert

- Tandis que la méthode d’Horace englobe parfois celui qui s’y essaie dans une récurrence pénible incluant de nombreuses courbes, la méthode d’Horace différentielle suggère une récurrence plus légère. En effet, on peut choisir de n’exploiter que des courbes rationnelles puisque les problèmes numériques sont gérés par les techniques différentielles. Le schéma résiduel obtenu après application de la méthode est en général défini par un idéal intégralement clos. Cela signifie qu’à transformation de Cremona près, l’on se ramène à un problème constitué uniquement de gros points en position spéciale relativement à un ensemble de courbes rationnelles. La piste naturelle est de dégager une classe de problèmes définis par des gros points et à contraintes fournies par des courbes rationnelles qui serait stable sous l’action de la méthode différentielle.
- On a vu que la méthode de Ciliberto-Miranda pouvait s’interpréter comme une collision partielle de gros points $p_1^{m_1}, \dots, p_s^{m_s}$ dont la fonction de Hilbert est maximale. Si la fonction de Hilbert n’est pas maximale, on peut néanmoins effectuer la collision et poursuivre la récurrence. Du point de vue de la méthode de Ciliberto-Miranda, il faut sans doute remplacer l’éclatement d’une droite de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$ par l’éclatement normalisé d’un schéma ponctuel d’équation (x^p, y^q) . On disposerait alors de davantage de souplesse numérique pour organiser la récurrence. Il n’est néanmoins pas évident qu’un des lemmes clés de la méthode (appelé lemme de transversalité) se généralise dans ce contexte.

Schémas de Hilbert en grande dimension

- Soit X lisse vérifiant $\dim X \geq 3$. Trouver le plus petit d tel que $\mathbb{H}^d(X)$ est réductible.
- Les constructions de Nakajima-Lehn ont été faites pour une surface X . Comment généraliser leurs constructions en dimension supérieure ? Trouver une modification birationnelle lisse du quotient X^d/S_d remplaçant le schéma de Hilbert $\mathbb{H}^d(X)$ sur lesquelles on puisse développer un formalisme similaire.

Quatorzième problème de Hilbert

- Les contre-exemples au quatorzième problème de Hilbert fournis historiquement par Nagata, tout comme leurs généralisations présentées dans ce texte,

ont des limitations relativement au corps de base. Par exemple, on ne connaît pas de contre-exemple valable sur tous les corps finis.

Théorie de l'intersection sur les schémas de Hilbert gradués

- Les schémas de Hilbert gradués $\mathbb{H}_{ab}(H)$ sont des généralisations des Grassmanniennes. La théorie de l'intersection sur les Grassmanniennes est gouvernée par la combinatoire des partitions. On a vu que les incidences entre cellules de Bialynicki-Birula sur $\mathbb{H}_{ab}(H)$ sont liées à l'existence de partitions planes. Peut-on décrire la théorie de l'intersection sur $\mathbb{H}_{ab}(H)$ en termes de combinatoire sur les partitions planes ?

Travaux utilisés pour ce mémoire

- [1] Laurent Evain. Compactification des espaces de configuration dans les schémas de hilbert. *Bull. Soc. Math. France*, To appear.
- [2] Laurent Evain. Thèse, 2eme partie. *Non publié, disponible sur <http://math.univ-angers.fr/~evain>*.
- [3] Laurent Evain. Calculs de dimensions de systèmes linéaires de courbes planes par collisions de gros points. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(12):1305–1308, 1997.
- [4] Laurent Evain. Une minoration du degré de courbes planes à singularités imposées. *Bull. Soc. Math. France*, 126(4):525–543, 1998.
- [5] Laurent Evain. La fonction de Hilbert de la réunion de 4^h gros points génériques de \mathbf{P}^2 de même multiplicité. *J. Algebraic Geom.*, 8(4):787–796, 1999.
- [6] Laurent Evain. Incidence relations among the Schubert cells of equivariant punctual Hilbert schemes. *Math. Z.*, 242(4):743–759, 2002.
- [7] Laurent Evain. Irreducible components of the equivariant punctual Hilbert schemes. *Adv. Math.*, 185(2):328–346, 2004.
- [8] Laurent Evain. On the postulation of s^d fat points in \mathbb{P}^d . *J. Algebra*, 285(2):516–530, 2005.
- [9] Laurent Evain. Computing limit linear series with infinitesimal methods. *math.AG/0407143*.
- [10] Laurent Evain. The chow ring of punctual hilbert schemes of toric surfaces. *math.AG/0503697*.

Bibliographie

- [11] J. Alexander and A. Hirschowitz. Polynomial interpolation in several variables. *J. Algebraic Geom.*, 4(2):201–222, 1995.
- [12] J. Alexander and A. Hirschowitz. An asymptotic vanishing theorem for generic unions of multiple points. *Invent. Math.*, 140(2):303–325, 2000.
- [13] M. Brion. Equivariant Chow groups for torus actions. *Transform. Groups*, 2(3):225–267, 1997.
- [14] Anita Buckley and Marina Zampatori. Linear systems of plane curves with a composite number of base points of equal multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(2):539–549 (electronic), 2003.
- [15] Jan Cheah. Cellular decompositions for nested Hilbert schemes of points. *Pacific J. Math.*, 183(1):39–90, 1998.
- [16] C Ciliberto and A Kouvidakis. On the symmetric product of a curve with general moduli. *Geometriae Dedicata*, 78:327–343, 1999.
- [17] Ciro Ciliberto. Geometric aspects of polynomial interpolation in more variables and of Waring’s problem. In *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, volume 201 of *Progr. Math.*, pages 289–316. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [18] Ciro Ciliberto and Rick Miranda. Degenerations of planar linear systems. *J. Reine Angew. Math.*, 501:191–220, 1998.
- [19] Ciro Ciliberto and Rick Miranda. A deformation theory approach to linear systems with general triple points. *Matematiche (Catania)*, 55(2):259–270 (2002), 2000. Dedicated to Silvio Greco on the occasion of his 60th birthday (Catania, 2001).
- [20] Ciro Ciliberto and Rick Miranda. Linear systems of plane curves with base points of equal multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(9):4037–4050, 2000.
- [21] K Costello and I Grojnowski. Hilbert schemes, hecke algebras and the calogero-sutherland system. *math.AG/0310189*.
- [22] Dan Edidin and William Graham. Equivariant intersection theory. *Invent. Math.*, 131(3):595–634, 1998.
- [23] Dan Edidin and William Graham. Localization in equivariant intersection theory and the Bott residue formula. *Amer. J. Math.*, 120(3):619–636, 1998.
- [24] Geir Ellingsrud and Stein Arild Strømme. On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane. *Invent. math.*, (87):343–352, 1987.

- [25] Geir Ellingsrud and Stein Arild Strømme. On a cell decomposition of the Hilbert scheme of points in the plane. *Invent. Math.*, (91):365–370, 1988.
- [26] Geir Ellingsrud and Stein Arild Strømme. Towards the Chow ring of the Hilbert scheme of \mathbf{P}^2 . *J. Reine Angew. Math.*, 441:33–44, 1993.
- [27] Barbara Fantechi and Lothar Göttsche. The cohomology ring of the Hilbert scheme of 3 points on a smooth projective variety. *J. Reine Angew. Math.*, 439:147–158, 1993.
- [28] Ralf Fröberg. An inequality for Hilbert series of graded algebras. *Math. Scand.*, 56(2):117–144, 1985.
- [29] Lothar Göttsche. Betti numbers for the Hilbert function strata of the punctual Hilbert scheme in two variables. *Manuscripta Math.*, 66(3):253–259, 1990.
- [30] Gert-Martin Greuel, Christoph Lossen, and Eugenii Shustin. Plane curves of minimal degree with prescribed singularities. *Invent. Math.*, 133(3):539–580, 1998.
- [31] I. Grojnowski. Instantons and affine algebras. I. The Hilbert scheme and vertex operators. *Math. Res. Lett.*, 3(2):275–291, 1996.
- [32] Mark Haiman and Bernd Sturmfels. Multigraded Hilbert schemes. *J. Algebraic Geom.*, 13(4):725–769, 2004.
- [33] Brian Harbourne. The geometry of rational surfaces and Hilbert functions of points in the plane. In *Proceedings of the 1984 Vancouver conference in algebraic geometry*, volume 6 of *CMS Conf. Proc.*, pages 95–111, Providence, RI, 1986. Amer. Math. Soc.
- [34] A Hirschowitz. La méthode d’horace pour l’interpolation à plusieurs variables. *Manuscripta Mathematica*, 50:337–388, 1985.
- [35] André Hirschowitz. Une conjecture pour la cohomologie des diviseurs sur les surfaces rationnelles génériques. *J. Reine Angew. Math.*, 397:208–213, 1989.
- [36] A. Iarrobino. Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety. *Invent. Math.*, 15:72–77, 1972.
- [37] A. Iarrobino. Inverse system of a symbolic power. III. Thin algebras and fat points. *Compositio Math.*, 108(3):319–356, 1997.
- [38] Anthony A. Iarrobino. Punctual Hilbert schemes. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 10(188):viii+112, 1977.
- [39] Sean Keel. Functorial construction of Le Barz’s triangle space with applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 335(1):213–229, 1993.

- [40] A King and C Walter. On chow rings of fine moduli spaces of modules. *J. reine angew. Math.*, 461:179–187, 1995.
- [41] Steven L. Kleiman. Multiple-point formulas. I. Iteration. *Acta Math.*, 147(1-2):13–49, 1981.
- [42] Patrick Le Barz. La variété des triplets complets. *Duke Math. J.*, 57(3):925–946, 1988.
- [43] M Lehn. Chern classes of tautological sheaves on hilbert schemes of points on surfaces. *Invent. math.*, (136):157–207, 1999.
- [44] Manfred Lehn and Christoph Sorger. The cup product of the hilbert scheme for k^3 surfaces. *Invent. Math (to appear) and [math.AG/0012166]*.
- [45] Manfred Lehn and Christoph Sorger. Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes. *Duke Math. J.*, 110(2):345–357, 2001.
- [46] Wei-Ping Li, Zhenbo Qin, and Weiqiang Wang. The cohomology rings of Hilbert schemes via Jack polynomials. In *Algebraic structures and moduli spaces*, volume 38 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 249–258. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [47] Dusa McDuff and Leonid Polterovich. Symplectic packings and algebraic geometry. *Invent. Math.*, 115(3):405–434, 1994. With an appendix by Yael Karshon.
- [48] Thierry Mignon. Systèmes de courbes planes à singularités imposées: le cas des multiplicités inférieures ou égales à quatre. *J. Pure Appl. Algebra*, 151(2):173–195, 2000.
- [49] Shigeru Mukai. Finite and infinite generation of the nagata invariant rings. *Preprint*.
- [50] M Nagata. On rational surfaces, II. *Memoirs of the College of Science, University of Kyoto*, XXXIII(2):271–293, 1960.
- [51] Masayoshi Nagata. On the 14-th problem of Hilbert. *Amer. J. Math.*, 81:766–772, 1959.
- [52] Masayoshi Nagata. On the fourteenth problem of Hilbert. In *Proc. Internat. Congress Math. 1958*, pages 459–462. Cambridge Univ. Press, New York, 1960.
- [53] H Nakajima. Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces. *Ann. of Math.*, 2(145):379–388, 1997.
- [54] H. Schubert. Anzahlgeometrische behandlung des dreieckes. *Math. Ann.*, 1880.

- [55] Beniamino Segre. Alcune questioni su insiemi finiti di punti in geometria algebrica. In *Atti Convegno Internaz. Geometria Algebrica (Torino, 1961)*, pages 15–33. Rattero, Turin, 1962.
- [56] J. G. Semple. The triangle as a geometric variable. *Mathematika*, 1:80–88, 1954.
- [57] Cumrun Vafa and Edward Witten. A strong coupling test of S -duality. *Nuclear Phys. B*, 431(1-2):3–77, 1994.
- [58] Eric Vasserot. Sur l’anneau de cohomologie du schéma de Hilbert de \mathbf{C}^2 . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(1):7–12, 2001.
- [59] Charles Walter. Collisions of three fat points on an algebraic surface. *Prépublication 412, Univ. Nice*, pages 1–7, 1995.
- [60] G Xu. Ample line bundles on smooth surfaces. *J. reine angew. Math.*, 469:199–209, 1995.
- [61] J Yameogo. Décomposition cellulaire de variétés paramétrant des idéaux homogènes de $\mathbb{C}[[x, y]]$. incidence des cellules -i-. *Compositio Math.*, 1(90):81–98, 1994.