COMPACTIFICATIONS DES ESPACES DE CONFIGURATION DANS LES SCHÉMAS DE HILBERT

LAURENT EVAIN

Abstract. Soient $F(X,n) = X^n - \Delta$ le complémentaire de l'union Δ des diagonales dans X^n, et U un quotient (éventuellement trivial) de $F(X,n)$ par un sous-groupe du groupe symétrique S_n. Ce travail présente des procédés de compactification de U dans des produits de schémas de Hilbert. Notre démarche généralise et unifie des constructions classiques dues à Schubert-Semple, Le Barz-Keel, Kleiman et Cheah. Une étude géométrique plus détaillée est faite pour les cas $n \leq 3$. Cette étude inclut notamment une classification complète, la détermination des compactifications lisses, et la description des morphismes quotients par les actions naturelles.

1. Introduction

1.1. **Quelques compactifications classiques et leurs applications.** Soit $F(X,n) = X^n - \Delta$ le complémentaire de l'union Δ des diagonales dans X^n. L'histoire des compactifications des espaces de configuration $F(X,n)$ est ancienne. Elle trouve son origine au siècle passé dans des problèmes de géométrie énumérative. Au fil des années, et jusque très récemment, de nouvelles constructions sont apparues au gré des besoins. Illustrons ces nombreuses constructions en présentant les plus classiques.

Dès 1880, Schubert [16] utilise une compactification de la variété des triangles ($X = \mathbb{P}^2$ et $n = 3$) pour résoudre des problèmes énumératifs. Son travail est modernisé par Semple [17]. Tyrell [10], Roberts et Speiser [15], s'appuyant sur le travail de Semple, démontrent rigoureusement certaines formules de Schubert. Collino et Fulton [2] calculent complètement l'anneau d'intersection de cette compactification et retrouvent également les résultats de Schubert. Le Barz étend la construction de Schubert-Semple à toute variété lisse par l'utilisation de schémas de Hilbert [13] et Keel l'étend à tout schéma par une approche fonctorielle [11].

Kleiman [12] construit une compactification de $F(X,n)$ par récurrence sur n en utilisant des points infiniment voisins. Cette approche lui permet d'obtenir des formules décrivant le lieu multiple d'un morphisme. Dolgachev et Ortland [4] en déduisent d'autres constructions en liaison avec les fonctions theta.

La compactification de Fulton-MacPherson [8] admet plusieurs définitions, soit fonctorielle, soit géométrique, l'une d'entre elles étant un éclatement subtil de X^n. Quand X est compact, elle permet le calcul du type d'homotopie rationnel des espaces de configuration en fonction des invariants de X.

Citons enfin le travail de Cheah [1] qui a étudié une classe de compactifications

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14C05.
Key words and phrases. compactification, espace de configuration, schéma de Hilbert.

similaires dans l'esprit à celle de LeBarz, se projetant sur le schéma de Hilbert $Hilb^n(X)$.

1.2. **Le problème.** Expliquons plus en détail l'approche de Le Barz, qui est le point de départ de notre travail. Etant donnés trois points distincts p_1, p_2, p_3 de X, on peut former les trois doublets $p_{12} = p_1 \cup p_2$, $p_{13}, p_{23} \in Hilb^2(X)$ et le triplet $p_{123} = p_1 \cup p_2 \cup p_3 \in Hilb^3(X)$. Cette construction se reformule en disant que $F(X,3)$ est isomorphe à un sous-schéma localement fermé

$$Z(X) \subset X^3 \times Hilb^2(X)^3 \times Hilb^3(X).$$

L'adhérence $\overline{Z(X)}$ est donc une compactification de $F(X,3)$ dans un produit de schémas de Hilbert. Le Barz a montré que cette adhérence, à priori difficilement manipulable, peut en fait être décrite géométriquement en termes de lieux d'incidence: les points de l'adhérence sont les 7-uplets $(p_1, p_2, \ldots, p_{123})$ satisfaisant les relations évidentes $p_1 \subset p_{12} \subset p_{123}$, p_3 est le résiduel de p_{12} dans p_{123} et les relations s'en déduisant par symétrie. Keel a remarqué que cette description par adhérence pouvait être exploitée pour donner une définition de $\overline{Z(X)}$ comme représentant d'un certain foncteur et en déduire quelques conséquences géométriques. On obtient donc finalement une compactification agréable à manipuler car elle jouit d'une triple définition, par adhérence, par incidence, et fonctorielle. Cette multiplicité des points de vue est très semblable à l'approche de [8].

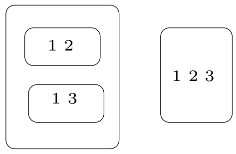
Il est des contextes où le besoin d'une généralisation des idées de Le Barz se fait sentir. Par exemple, comme l'avait fait remarquer Fulton, la transposition directe des idées utilisées par Le Barz pour construire la variété de triplets ne permet pas de construire une variété de quadruplets ([3], paragraphe 0.7). Ou encore, l'étude des collisions de gros points sur une surface nécessite la construction de variétés de triplets complets “à la Le Barz”, se projetant sur le schéma de Hilbert, mais symétriques [6].

Dans la frontière de la compactification construite par Le Barz, toutes les informations sur la collision des points p_1, p_2, p_3 se trouvant dans les schémas de Hilbert n'ont visiblement pas été exploitées. Par exemple, les deux doublets p_{12} et p_{13} de $Hilb^2(X)$ distincts définissent un point p^1 de $Hilb^2(Hilb^2(X))$. Utilisant les points p^1, p^2, p^3, on peut construire par adhérence une compactification de $F(X,3)$ dans un produit plus gros contenant des facteurs de la forme $Hilb^2(Hilb^2(X))$. Réitérant le processus, on peut construire des compactifications dans des espaces produits $P_1 \times \ldots \times P_n$, chacun des termes P_i du produit étant un schéma de Hilbert emboîté $Hilb^{p_l}(Hilb^{p_{l-1}}(\ldots Hilb^{p_1}(X)))$. En variant les termes P_i, on a donc une infinité de compactifications à notre disposition.

Le travail qu'on se propose d'effectuer ici est d'étudier et de classifier les compactifications obtenues par ce procédé.

1.3. **Un aperçu de la construction générale.** Les compactifications que nous allons construire seront paramétrées par des données combinatoires. Plus précisément, les compactifications des quotients de $F(X,n)$ seront paramétrées par des sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si la construction générale nécessite une certaine précision, elle peut néanmoins être comprise sur quelques exemples significafifs. Expliquons par exemple comment, en utilisant les points p^1 et p_{123}, construire la compactification R^1_{123} dans $Hilb^2(Hilb^2(X)) \times Hilb^3(X)$.

Considérons les sous-ensembles $\{1,2\}$ et $\{1,3\}$ de $\{1,2,3\}$. Soit σ^1 l'ensemble contenant ces sous-ensembles , et $\sigma_{123} = \{1,2,3\}$. Le couple $\eta = (\sigma^1, \sigma_{123})$ peut-être symbolisé par le dessin suivant. À cette donnée combinatoire η, on associe le



morphisme

$$\begin{aligned} f_\eta : F(X,3) &\to Hilb^2(Hilb^2(X)) \times Hilb^3(X) \\ (p_1,p_2,p_3) &\mapsto (p^1 = (p_1 \cup p_2) \cup (p_1 \cup p_3), p_{123} = (p_1 \cup p_2 \cup p_3)). \end{aligned}$$

La donnée combinatoire η vérifie une relation d'incidence: chacun des ensembles de σ^1 est inclus dans σ_{123}. Cette incidence combinatoire peut se traduire au niveau géométrique. On peut définir un lieu schématique d'incidence $R_\eta (= R^1_{123})$ dans $Hilb^2(Hilb^2(X)) \times Hilb^3(X)$ formé par les couples (p^1, p_{123}) pour lesquels $p^1 \subset p_{123}$. Cette inclusion signifie que le sous-schéma $[p^1] \subset Hilb^2(X)$ paramétré par p^1 est inclus dans le lieu schématique $Z \subset Hilb^2(X)$ paramétrant les doublets inclus (au sens usuel) dans $[p_{123}]$. Au niveau fonctoriel, puisque R_η est défini par une incidence dans un produit de schémas de Hilbert, se donner un morphisme $B \to R_\eta$ équivaut à se donner deux familles plates $F_1 \to B$ et $F_2 \to B$ dont les fibres sont soumises à une condition d'incidence. On peut montrer que l'adhérence du morphisme f_η s'identifie à l'incidence R_η.

Cet exemple se généralise. Etant donnée une donnée combinatoire η formée par une collection d'ensembles gigognes inclus les uns dans les autres et contenant les nombres $\{1,\dots,n\}$, on peut associer un morphisme $f_\eta : F(X,n) \to H_\eta$ où H_η est un produit de schémas de Hilbert emboîtés. Dans H_η, on peut définir un sous-schéma fermé R_η, soit comme lieu d'incidence d'incidence schématique, soit comme représentant d'un certain foncteur. Chacune des relations d'incidence définissant R_η correspond à une relation d'incidence sur la donnée combinatoire η. Par construction, l'adhérence du morphisme f_η est incluse dans R_η. En revanche, on n'a pas toujours égalité. Les compactifications qui nous intéressent sont celles pour lesquelles on a égalité, car elles se manipulent aisément via une triple définition (par adhérence, par incidence et fonctorielle). On les appellera variétés de n-uplets enrichis.

Revenant à l'exemple, on voit que la donnée combinatoire est symétrique en les indices 2 et 3. Cela s'interprète géométriquement en une action du groupe symétrique S_2 sur R_η qui génériquement consiste à échanger les points p_2 et p_3. De même, la variété de Le Barz, associée à la structure combinatoire suivante symétrique en les nombres 1,2 et 3, est munie d'une action du groupe symétrique

S_3. Mais l'action de S_3 sur la variété de Le Barz est fidèle, tandis que l'action de S_2 sur R_η est triviale. Dans le cas général, la situation est intermédiaire entre ces deux exemples. Il existe un groupe G_η qui agit sur R_η et un sous-groupe H_η qui n'agit pas, de sorte que l'action du groupe quotient Q_η soit fidèle. Ici encore, Q_η ne dépend que de la structure combinatoire η.

1.4. **Le contenu du travail.** Cet article s'articule en trois parties.

Une première partie consiste à dégager les structures combinatoires, les notions d'incidence et les foncteurs qui permettent de manipuler aisément les compactifications (sections 2 et 3).

Ensuite, on aborde le problème de la classification et de l'étude de la géométrie des compactifications ainsi définies quand $n \leq 3$ (lissité, étude des quotients, stratification) dans les sections 4, 5, 6 et 7.

Enfin (section 8), on compare les compactifications obtenues aux compactifications classiques présentées au début de cette introduction.

1.5. **Les résultats.** Le cas $n = 2$ étant trivial, on ne présente dans cette introduction que les résultats concernant les compactifications de $F(X, n = 3)$ et de ses quotients. On peut extraire de cette étude deux résultats surprenants. Tout d'abord, alors qu'il existe une infinité de choix possibles pour le produit dans lequel on construit la compactification de $F(X, 3)$, il n'existe à postériori qu'un nombre fini de compactifications à isomorphisme près.

Théorème 1. *Il y a à isomorphisme de compactification près 11 variétés de triplets enrichis. De plus, toute compactification est isomorphe à une compactification dans $P_1 \times \ldots \times P_r$ où chaque P_i est soit de la forme $Hilb^i(X)$, soit de la forme $Hilb^i(Hilb^j(X))$.*

Le deuxième fait inattendu est que les structures d'ordre supérieur (c'est à dire les termes de la forme $Hilb^{p_l}(Hilb^{p_{l-1}}(\ldots Hilb^{p_1}(X)))$, avec $l \geq 2$) peuvent être utilisées pour décrire les passages au quotient. Par exemple, la variété construite par Le Barz dans le produit $X^3 \times Hilb^2(X)^3 \times Hilb^3(X)$ est naturellement munie d'une action du groupe symétrique S_3 et la structure d'ordre deux $Hilb^3(Hilb^2(X))$ permet une description explicite du quotient:

Théorème 2. *Le quotient de la variété de Le Barz $\widehat{H}_3/S_3$ est isomorphe à l'adhérence de $F(X, 3)/S_3$ dans $Hilb^3(Hilb^2(X)) \times Hilb^3(X)$.*

Cette description nous permet "d'inverser" la propriété universelle du quotient. Alors que la propriété universelle du quotient nous permet de définir des morphismes depuis $\widehat{H}_3/S_3$, la propriété universelle de nos constructions dans les schémas de Hilbert nous permet de définir des morphismes vers $\widehat{H}_3/S_3$. Ce théorème était en fait notre motivation première (voir le contexte à la fin de cette introduction). En d'autres termes, les structures de niveau supérieur s'imposent d'elles mêmes quand il s'agit d'étudier les quotients. Ce principe est illustré par le théorème général suivant qui dit que les compactifications construites ont le mérite de former une classe de compactifications stable par quotient.

Théorème 3. *Le quotient d'une variété de triplets enrichis R_η par le groupe Q_η agissant naturellement est une variété de triplets enrichis R_μ.*

Si l'on pense à la variété de Le Barz $\widehat{H}_3$, le morphisme quotient $\widehat{H}_3 \to \widehat{H}_3/S_3$ peut être décrit explicitement. La variété de Le Barz a été construite comme adhérence dans un produit P de schémas de Hilbert. Il résulte du théorème de classification qu'on peut construire $\widehat{H}_3$ dans un produit différent:

$$\widehat{H}_3 \hookrightarrow Q = Hilb^3(Hilb^2(X)) \times Hilb^3(X) \times \text{ autres termes.}$$

On peut alors projeter $\widehat{H}_3$ sur $Hilb^3(Hilb^2(X)) \times Hilb^3(X)$. En termes fonctoriels, on a un morphisme d'oubli. Il se trouve que ce morphisme d'oubli est le passage au quotient.

Le théorème suivant dit que cet exemple se généralise. Si on veut décrire le quotient d'une variété de triplets enrichis, on peut toujours trouver une réalisation de cette variété dans un produit bien choisi tel que le passage au quotient soit simplement un morphisme d'oubli.

Théorème 4. *Soient R_α et R_β deux compactifications telles que R_β soit le quotient de R_α par un sous-groupe G du groupe symétrique S_3. Alors il existe une compactification R'_α isomorphe à R_α telle que le passage au quotient $R'_\alpha \to R_\beta$ soit un morphisme d'oubli.*

La lissité des compactifications est étudiée dans la section 7.

Théorème 5. *Quand X est lisse, sept des onze variétés de triplets sont lisses. Les quatre autres compactifications sont singulières si X est de dimension au moins deux.*

Enfin, les liens unissant les variétés que nous avons construites et les constructions classiques sont explorés et résumés par le théorème suivant.

Théorème 6. *Les variétés de Schubert-Semple, de LeBarz $\widehat{H_3}$, de Kleiman K_3, de Cheah, les quotients $\widehat{H_3}/S_2$, $\widehat{H_3}/S_3$, K_3/S_2 sont des variétés de triplets enrichis.*

1.6. **Application de ces constructions.** A l'instar des compactifications classiques présentées au début de cette introduction, il existe des applications ayant motivé nos constructions. Même si ces applications seront dévoloppées ailleurs, nous les donnons ici à titre de motivation.

Le problème original consistait à comprendre les collisions de trois gros points sur une surface lisse S, où rappelons le, un gros point de taille m est un sous-schéma défini par la puissance m^{eme} d'un idéal maximal. Plus précisément, notons $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ la sous-variété irréductible de $Hilb(S)$ dont le point générique paramètre la réunion générique de trois gros points de S de taille n_1, n_2, n_3. Les collisions de trois gros points sont les points de la frontière de $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$. Le résultat principal de [7] dit que lorsque n_1, n_2, n_3 parcourent $\mathbb{N}^3$, alors $Coll(n_1, n_2, n_3)(S)$ ne parcourt qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes. La méthode consiste à construire des isomorphismes explicites avec certaines des compactifications décrites dans le présent article. On en déduit une classification des collisions en étudiant la restriction des isomorphismes à leur frontière.

Citons pour finir deux problèmes classiques pour lesquels les compactifications par schémas de Hilbert emboîtés pourraient se révéler utiles. Si X est une variété lisse, les problèmes de construire de façon explicite une compactification lisse de $F(X, n)$ se projetant sur le schéma de Hilbert $Hilb^n(X)$ et une compactification lisse de X^n/S_n restent ouverts. On peut espérer une réponse positive à la question suivante: existe-t-il des compactifications construites dans des produits de schémas de Hilbert emboîtés qui soient solutions des deux problèmes précédents ?

Il résulte de ce travail que la réponse est oui pour $n = 3$ (les compactifications qui conviennent sont la variété de Le Barz et son quotient par S_3).

Je remercie vivement A. Hirschowitz pour ses conseils lors de la réalisation de ce travail.

2. Définition des compactifications

Dorénavant, X est un schéma projectif sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque (quasi-projectif conviendrait également en adaptant quelques démonstrations).

Dans cette section, on définit les compactifications et on donne les premières propriétés découlant directement des définitions. Dans la section 2.1, on définit un morphisme

$$f_\eta : F(X,n) \to H_\eta$$

où H_η est un produit de schémas de Hilbert emboîtés dépendant d'une donnée combinatoire η. Pour chaque η, il existe un sous-groupe G_η du groupe symétrique S_n tel que l'adhérence $A_\eta = \overline{f_\eta(F(X,n))}$ soit une compactification du quotient $F(X,n)/G_\eta$. Dans la section 2.2, on définit à l'aide de relations d'incidence un lieu R_η dans H_η tel que $A_\eta \subset R_\eta$. Dans la section 2.3, on introduit des foncteurs F_η dont on montre qu'ils sont représentables par R_η.

Les compactifications A_η qui nous intéressent sont celles pour lesquelles $A_\eta = R_\eta$. Autrement dit, ce sont celles dont la structure est riche de sorte qu'elles puissent être définies au choix par adhérence (via f_η), par lieu schématique d'incidence (via R_η) ou encore par fonctorialité (via F_η).

2.1. Définition par adhérence.

On va définir successivement un enrichissement η, le schéma de Hilbert associé H_η, le morphisme $f_\eta : F(X,n) \to H_\eta$, le groupe G_η. La section se conclut par la proposition 10 qui dit que $A_\eta = \overline{f_\eta(F(X,n))}$ est une compactification du quotient $F(X,n)/G_\eta$.

Soit E un ensemble fini. Pour $p > 0$, notons $\Sigma_p(E)$ les sous-ensembles de cardinal p de E. Si $E = \{1,\dots,n\}$, on notera $\Sigma_p(n)$ plutôt que $\Sigma_p(\{1,\dots,n\})$ pour alléger les notations. Définissons récursivement

$$\Sigma_{p_l,\dots p_1}(n) = \Sigma_{p_l,\dots p_2}(\Sigma_{p_1}(n))$$

et

$$\Sigma(n) = \cup_{l\in\mathbb{N}^*,(p_l,\dots,p_1)\in(\mathbb{N}^*)^l}\Sigma_{p_l,\dots p_1}(n).$$

Un élément de $\Sigma(n)$ (resp. de $\Sigma_{p_l,\dots p_1}(n)$) est appelé une structure (resp. une structure de niveau l). Notons $\mathbb{H}^p(X)$ le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas ponctuels de X de longueur p. On pose

$$\mathbb{H}^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X) = \mathbb{H}^{p_l}(\mathbb{H}^{p_{l-1}}(\dots(\mathbb{H}^{p_1}(X)))).$$

Pour alléger les notations, on notera $\mathbb{H}^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}$, plutôt que $\mathbb{H}^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}(X)$. On ne conservera la notation complète que dans les cas ou l'on voudra marquer explicitement que la construction dépend de X. Si $\sigma \in \Sigma_{p_l,\dots p_1}(n)$, on posera

$$H_\sigma = \mathbb{H}^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}$$

et

$$H_\sigma^- = \mathbb{H}^{p_{l-1},\dots,p_1}.$$

Pour tout élément σ de $\Sigma_{p_l,\dots p_1}(n)$ (resp. de $\mathbb{H}^{p_l,p_{l-1},\dots,p_1}$), on note $[\sigma]$ le sous-ensemble de $\Sigma_{p_{l-1},\dots p_1}(n)$ (resp. le sous-schéma de $\mathbb{H}^{p_{l-1},\dots,p_1}$) paramétré par σ.

Définition 7. *Soit $\sigma \in \Sigma(n)$ une structure. On note $f_\sigma : F(X,n) \rightarrow H_\sigma$ le morphisme qui envoie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sur $f_\sigma(x)$ vérifiant:*

- $[f_\sigma(x)] = \cup_{j \in [\sigma]} x_j$ *si σ est de niveau un,*
- $[f_\sigma(x)] = f_{\sigma_1}(x) \cup \cdots \cup f_{\sigma_q}(x)$ *si σ est de niveau supérieur à un avec* $[\sigma] = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_q\}$.

Remarque 8. *Il existe une bijection canonique entre $\Sigma_{p_l, p_{l-1}, \ldots, p_1}(n)$ et $\Sigma_{p_l, p_{l-1}, \ldots, p_r, 1, p_{r-1}, \ldots, p_1}(n)$, et entre $\mathbb{H}^{p_l, p_{l-1}, \ldots, p_1}$ et $\mathbb{H}^{p_l, p_{l-1}, \ldots, p_r, 1, p_{r-1}, \ldots, p_1}$. Dans la suite, nous identifierons deux éléments qui se correspondent par l'une de ces bijections.*

On appelle enrichissement un ensemble $\eta = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ de structures de $\{1, \ldots, n\}$ contenant la structure $\sigma = \{1, \ldots, n\}$ de $\Sigma_n(n)$. Pour des raisons liées à la description des actions de groupe, on n'identifiera pas deux enrichissements $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ et $\{\sigma_{p(1)}, \ldots, \sigma_{p(s)}\}$ qui diffèrent l'un de l'autre par une permutation p des facteurs. Le niveau d'un enrichissement sera le plus grand des niveaux des σ_i.

Définition 9. *Soit $\eta = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ un enrichissement. On pose*

$$H_\eta = H_{\sigma_1} \times H_{\sigma_2} \times \ldots \times H_{\sigma_s}$$

et

$$f_\eta = f_{\sigma_1} \times f_{\sigma_2} \times \ldots \times f_{\sigma_s} : F(X,n) \rightarrow H_\eta.$$

Le groupe symétrique S_n agit sur X^n par $\tau.(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)})$. L'action naturelle de S_n sur $\{1, \ldots, n\}$ induit une action de S_n sur l'ensemble $\Sigma(n)$ des enrichissements. Un enrichissement η étant fixé, on note G_η le sous-groupe de S_n stabilisant η.

Proposition 10. *Le plus petit sous-schéma fermé $\overline{f_\eta(F(X,n))}$ de H_η qui factorise f_η est une compactification du quotient $F(X,n)/G_\eta$ qui se projette sur $\mathbb{H}^n$.*

Démonstration: puisque η contient l'enrichissement $\{1, \ldots, n\}$ par définition, $\mathbb{H}^n$ est un facteur de H_η et l'existence d'une projection de $\overline{f_\eta(F(X,n))} \subset H_\eta$ sur $\mathbb{H}^n$ en résulte. Montrons que deux éléments x et y de $F(X,n)$ ont même image par f_η ssi $\exists g \in G_\eta$ t.q. $g.x = y$. Si x et y ont même image par f_η, alors ils ont même image par la composée $F(X,n) \rightarrow H_\eta \rightarrow \mathbb{H}^n$, donc il existe $g \in S_n$ tel que $g.x = y$. Pour conclure, il suffit donc de montrer pour $g \in S_n$ que $f_\eta(x) = f_\eta(g.x)$ ssi $g \in G_\eta$. Il suffit pour cela de remarquer que $f_\eta(g.x) = f_{g.\eta}(x)$ et que, x étant fixé dans $F(X,n)$, $f_\eta(x) = f_{\eta'}(x)$ ssi $\eta = \eta'$ (récurrences faciles sur le niveau de η). ∎

Remarque 11. *Dans la suite, on emploiera simplement le mot "compactification" sans préciser de quel quotient de $F(X,n)$ il s'agit.*

Remarque 12. *On pourrait définir un enrichissement η sans imposer la condition: η contient $\{1, \ldots, n\}$. Il faudrait alors demander que la projection naturelle de $\Sigma(n)$ dans $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ envoie η sur $\{1, \ldots, n\}$ pour que le morphisme f_η soit à fibres finies et que l'image soit un quotient de $F(X,n)$ par un sous-groupe de S_n. On obtiendrait avec cette définition plus de compactifications mais les nouvelles compactifications ne se projetteraient plus sur $\mathbb{H}^n(X)$.*

2.2. **Définition par incidence.** On suppose ici fixé un enrichissement η, et on a donc un morphisme $f_\eta : F(X,n) \to H_\eta$ dont on veut caractériser géométriquement l'adhérence en termes d'incidence. Pour cela, on définit dans cette section les incidences liant les structures de η. Formellement, on pose $I(\eta') = 1$ si $\eta' = \{\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_s\} \subset \eta$ vérifie $\sigma \subset \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s$. Pour chaque sous-enrichissement $\eta' \subset \eta$ tel que $I(\eta') = 1$, on définit un sous-schéma $Inc_{\eta',\eta}$ de H_η et on pose $R_\eta = \cap_{I(\eta')=1} Inc_{\eta',\eta}$. On vérifie que pour X lisse irreductible, $f_\eta : F(X,n) \to H_\eta$ se factorise par R_η. Le schéma R_η est le lieu d'incidence naturel de H_η pour lequel on espère avoir l'égalité $H_\eta = \overline{f_\eta(F(X,n))}$. Malheureusement, on verra que même en mettant toutes les inclusions possibles, l'adhérence et le lieu d'incidence ne coïncident pas toujours. Un enrichissement pour lequel l'adhérence et le lieu d'incidence coïncident pour toute variété lisse irréductible X sera appelé enrichissement admissible.

2.2.1. *Définition des relations d'incidence sur les structures.* Soit $\eta' = \{\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ un enrichissement. Définissons le booléen $I(\eta')$. On pose $I(\eta') = 0$ s'il n'existe pas d'entiers $p_1, \dots, p_l$, $n_1, \dots, n_s$, $q_1, \dots, q_r$ tels que $\sigma \in \Sigma_{q_r,\dots,q_1,p_l,\dots,p_1}$, et $\sigma_i \in \Sigma_{n_i,p_l,\dots,p_1}$. Si de tels entiers existent, on définit $I(\eta')$ par récurrence sur r. Pour $r = 1$, on pose

$$I(\eta') = 1 \text{ ssi } [\sigma] \subset [\sigma_1] \cup \dots \cup [\sigma_s]$$

dans $\Sigma_{p_l,\dots,p_1}(n)$. Pour $r > 1$ et $\sigma = \{\tau_1, \dots, \tau_{q_r}\}$, on pose

$$I(\eta') = 1 \text{ ssi } \forall i,\ I(\{\tau_i, \sigma_1, \dots, \sigma_s\}) = 1.$$

2.2.2. *Définition des relations d'incidence sur les schémas.* Pour η' tel que $I(\eta') = 1$, on reprend les notations de 2.2.1 et on définit un sous-schéma

$$Inc_{\eta'} \subset H_{\eta'} = \mathbb{H}^{q_r,\dots,q_1,p_l,\dots,p_1} \times \Pi_{i=1}^s \mathbb{H}^{n_i,p_l,\dots,p_1}$$

par récurrence sur r. C'est un fermé qui ne dépend que des nombres r, q_i, p_i, n_i.

Le cas r=1. Rappelons la proposition suivante ([11]):

Proposition 13. *Soient P un schéma projectif, $F \subset B \times P$ et $G \subset B \times P$ deux sous-schémas fermés tels que F soit plat et fini sur B. Il existe un plus grand sous-schéma fermé $Inc_B(F,G)$ de B tel que*

$$F \times_B Inc(F,G) \subset G \times_B Inc(F,G).$$

En outre, $Inc_B(F,G)$ peut être caractérisé par la propriété suivante: un morphisme $\varphi : Z \to B$ se factorise par $Inc_B(F,G)$ ssi $F \times_B Z \subset G \times_B Z$.

Soient $U, U_1, \dots, U_s$ les fermés universels de

$$(\mathbb{H}^{q_1,p_l,\dots,p_1} \times \Pi_{i=1}^{i=s} \mathbb{H}^{n_i,p_l,\dots,p_1}) \times \mathbb{H}^{p_l,\dots,p_1} = B \times \mathbb{H}^{p_l,\dots,p_1}$$

dont les fibres respectives au dessus de

$$(h, h_1, \dots, h_s) \in (\mathbb{H}^{q_1,p_l,\dots,p_1} \times \Pi_{i=1}^{i=s} \mathbb{H}^{n_i,p_l,\dots,p_1})$$

sont $[h], [h_1], \dots, [h_s]$. Soit Z le sous-schéma défini par le produit $I(U_1). \dots .I(U_s)$ des idéaux des U_i. On pose

$$Inc_{\eta'} = Inc_{\mathbb{H}^{q_1,p_l,\dots,p_1} \times \Pi_{i=1}^{i=s} \mathbb{H}^{n_i,p_l,\dots,p_1}}(U, Z).$$

Le cas $r > 1$. Le fermé $Inc^- \subset \mathbb{H}^{q_{r-1},\dots,q_1,p_l,\dots,p_1} \times \Pi_{i=1}^s \mathbb{H}^{n_i,p_l,\dots,p_1}$ défini par la récurrence se projette sur $\Pi_{i=1}^s \mathbb{H}^{n_i,p_l,\dots,p_1}$. On définit $Inc_{\eta'}$ comme le schéma de Hilbert relatif $\mathbb{H}^{q_r}_{\Pi_{i=1}^s \mathbb{H}^{n_i,p_l,\dots,p_1}}(Inc^-)$ de cette projection, ie. le schéma dont les points fermés paramètrent les sous-schémas ponctuels de longueur q de Inc^- inclus dans une des fibres de la projection.

Si $\eta' \subset \eta$, notons $Inc_{\eta',\eta} \subset H_\eta$ l'image inverse de $Inc_{\eta'}$ par la projection naturelle $H_\eta \to H_{\eta'}$. Enfin, posons

$$R_\eta = \cap_{\eta' \subset \eta, I(\eta')=1} Inc_{\eta',\eta}.$$

Proposition 14. *Si X est une variété, le plongement $\overline{f_\eta(F(X,n))} \to H_\eta$ se factorise par R_η.*

Démonstration: on veut voir que si $\eta' = \{\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_s\} \subset \eta$ vérifie $I(\eta') = 1$ et si $x \in F(X,n)$, alors $f_{\eta'}(x) \in Inc_{\eta'}$. On procède par récurrence sur la différence d entre le niveau de σ et celui des σ_i.

Le cas $d = 0$. On a $\sigma = \{\tau_1, \dots, \tau_q\}$, $\sigma_i = \cup_{k \in I_i} \tau_k$. Avec les notations utilisées dans la définition de $Inc_{\eta'}$, on a $[h] = \cup_{i \leq q} f_{\tau_i}(x)$ et $[h_i] = \cup_{k \in I_i} f_{\tau_k}(x)$ et on veut $I([h]) \supset \Pi I([h_i])$. L'hypothèse $I(\eta') = 1$ se traduit par $\cup_i I_i \supset \{1, \dots, q\}$ et implique l'inclusion voulue des idéaux.

Le cas $d > 0$. Toujours avec les notations utilisées dans la définition de $Inc_{\eta'}$, il nous faut vérifier que

$$(f_\sigma(x), f_{\sigma_1}(x), \dots, f_{\sigma_s}(x)) \in \mathbb{H}^{q_r}(Inc^-).$$

Avec $\sigma = \{\tau_1, \dots, \tau_q\}$, cela revient à voir pour tout i que $(f_{\tau_i}(x), f_{\sigma_1}(x), \dots, f_{\sigma_s}(x)) \in Inc^-$. Puisque $I(\eta') = 1$, on a pour tout i, $I(\tau_i, \sigma_1, \dots, \sigma_s) = 1$ et il suffit donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence. ■

Remarque 15. *Il arrive que l'inclusion $\overline{f_\eta(F(X,n))} \subset R_\eta$ soit stricte.*

Démonstration: prenons $n = 4$, $\sigma_1 = \{1,2\}$, $\sigma_2 = \{1,3\}$, $\sigma_3 = \{1,2,3,4\}$ et $\eta = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Soient $x \in F(X,4)$ et $p = (d, d', q)$ le point de

$$H_\eta = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^4$$

défini par $[d] = x_1 \cup x_2$, $[d'] = x_1 \cup x_2$ et $q = x_1 \cup x_2 \cup x_3 \cup x_4$. Le point p est dans R_η mais pas dans $\overline{f_\eta(F(X,4))}$ puisque le quadruplet est formé de quatre points distincts tandis que la réunion du support des deux doublets ne contient que deux points. ■

Dans la suite de ce papier, on s'intéressera aux compactifications qui sont sympathiques au sens où elles peuvent être définies géométriquement par des conditions d'incidence, ce qui nous conduit à la définition suivante.

Définition 16. *On appelle enrichissement admissible un enrichissement tel que pour toute variété lisse irréductible, $\overline{f_\eta(F(X,n))} = R_\eta(X)$.*

Remarque 17. *Nous n'avons en fait pas donné toutes les relations d'incidence possibles. On peut introduire plusieurs fonctions d'incidence jouant le rôle de la fonction I et pour chacune d'elles, construire un lieu d'incidence correspondant. La définition générale nécessite un formalisme lourd. Le point de vue adopté est d'introduire le formalisme minimum qui permette d'atteindre les applications voulues (construction d'une classe de compactifications qui contienne les variétés de collisions et les compactifications classiques).*

2.3. **Définition par foncteurs représentables.** Dans cette section, on explique pourquoi les schémas R_η peuvent être définis par un foncteur représentable F_η. Cette définition a le double avantage d'être extrêmement maniable et de s'appliquer à tous les schémas en dehors du cadre des variétés réduites.

Le foncteur F_η sera défini par $F_\eta(B) = \{$ familles $F_1, F_2 \dots$ de sous-schémas paramétrées par B satisfaisant des conditions d'incidence$\}$. Définissons maintenant ces conditions d'incidence.

Proposition 18. *On peut définir pour tout schéma projectif P et pour tous sous-schémas fermés $Z \subset B \times \mathbb{H}^{q_r,\dots,q_1}(P)$ et $T \subset B \times P$, tels que Z soit plat sur B un sous-schéma fermé $\underline{Inc}_B(Z,T)$ de B satisfaisant la propriété suivante: un morphisme $\varphi : S \to B$ se factorise par $\underline{Inc}_B(Z,T)$ ssi $\underline{Inc}_S(S \times_B Z, S \times_B T) = S$*

Démonstration: si $r = 0$, Z et T sont des sous-schémas de $B \times P$ et il suffit de choisir $\underline{Inc}_B(Z,T) = Inc(Z,T)$ en vertu de la proposition 13.

Si $r \geq 1$, on dispose d'un fermé

$$\tilde{T} \hookrightarrow (B \times \mathbb{H}^{q_r,\dots,q_1}(P)) \times P$$

image inverse de T par la projection sur $B \times P$, et d'un fermé

$$\tilde{U} \hookrightarrow (B \times \mathbb{H}^{q_r,\dots,q_1}(P)) \times \mathbb{H}^{q_{r-1},\dots,q_1}(P)$$

image inverse de la famille universelle de $\mathbb{H}^{q_r,\dots,q_1}(P) \times \mathbb{H}^{q_{r-1},\dots,q_1}(P)$. On peut par récurrence définir le lieu $W = \underline{Inc}_{B \times \mathbb{H}^{q_r,\dots,q_1}(P)}(\tilde{U}, \tilde{T})$. On définit alors $\underline{Inc}_B(Z,T) = Inc_B(Z,W)$.

Une récurrence sur r montre que si $\varphi : S \to B$ est un changement de base,

$$\underline{Inc}_B(Z,T) \times_B S = \underline{Inc}_S(Z \times_B S, T \times_B S).$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \underline{Inc}(S \times_B Z, S \times_B T) = S \quad &\Leftrightarrow \quad \underline{Inc}_B(Z,T) \times_B S = S \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi \text{ se factorise en } S \to \underline{Inc}_B(Z,T) \to B. \end{aligned}$$

■

Définition 19. *On dit que les sous-schémas*

$$Z \subset B \times \mathbb{H}^{q_r,\dots,q_1}(P)$$

et

$$T_i \subset B \times P, \ i = 1, \dots, s$$

vérifient la relation $Z \subset T_1.T_2.\dots.T_s$ si $\underline{Inc}_B(Z,T) = B$, où $T \subset B \times P$ est défini par l'idéal produit $\Pi_{i=1}^{i=s} I(T_i)$. La relation $p \subset p_1.p_2.\dots.p_s$ prend du sens en particulier quand $p \in \mathbb{H}^{q_r,\dots,q_1,p_l,\dots,p_1}$, $p_i \in \mathbb{H}^{n_i,p_l,\dots,p_1}$ en prenant $P = \mathbb{H}^{p_l,\dots,p_1}$.

Remarque 20. *Il ressort de cette définition que $R_\eta \subset H_\eta = H_{\sigma_1} \times \dots \times H_{\sigma_s}$ est le sous-schéma naturel dont les points fermés sont les points $(p_1, \dots, p_s)$ vérifiant $p_{i_0} \subset p_{i_1}.\dots.p_{i_k}$ pour tout $\eta' = (\sigma_{i_0}, \dots, \sigma_{i_k})$ tel que $I(\eta') = 1$.*

Définition 21. *Si $\eta = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ est un enrichissement avec $\sigma_i \in \Sigma_{n_i,p_{i,s(i)},\dots,p_{i,1}}(n)$, on définit le foncteur F_η des schémas sur k dans les ensembles par:*

$$F_\eta(B) = \{(Z_1, \dots, Z_s), Z_i \subset B \times H^-_{\sigma_i},\ \textit{plat et fini de degré } n_i \textit{ sur } B,$$
$$\textit{t.q. } I(\sigma_{i_0}, \sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}) = 1 \Rightarrow Z_{i_0} \subset Z_{i_1}.Z_{i_2}.\dots.Z_{i_k}\}$$

Proposition 22. *Le foncteur F_η est représentable par le schéma R_η.*

Démonstration: on veut voir qu'il est équivalent de se donner un élément de $F_\eta(B)$ ou un morphisme $\varphi : B \to R_\eta$. Par propriété universelle du schéma de Hilbert, les fermés Z_i définissant un élément de $F_\eta(B)$ correspondent à un morphisme $B \to H_\eta$. Les relations d'incidence entre les Z_i, la propriété universelle du schéma $\underline{Inc}$ (prop. 18) et la remarque 20 montrent que ce morphisme se factorise en un morphisme $\varphi : B \to R_\eta$. Réciproquement, il est clair par les mêmes arguments qu'un morphisme $\varphi : B \to R_\eta$ définit des Z_i satisfaisant les relations d'incidence. ■

3. Propriétés des compactifications résultant des définitions

Dans cette section, on exploite la définition fonctorielle des schémas $R_\eta(X)$ pour en donner les premières propriétés. Pour chacune des propriétés, on explique comment elle sera utilisée lors du théorème de classification.

3.1. **Changements de bases.** Si η et η' sont deux enrichissements, pour montrer que pour tout X, $R_\eta(X) = R_{\eta'}(X)$, il suffit de le montrer pour X lisse irréductible:

Proposition 23. *Soit Y un sous-schéma localement fermé d'un schéma X. Les schémas $R_\eta(Y)$ et $R_\eta(X) \times_{\mathbb{H}^n(X)} \mathbb{H}^n(Y)$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration: vérifions que ces deux schémas représentent le même foncteur. Notons F et G les foncteurs associés à

$$R_\eta(Y) \text{ et } R_\eta(X) \times_{\mathbb{H}^n(X)} \mathbb{H}^n(Y).$$

Soit B un k-schéma. On veut établir une bijection canonique entre $F(B)$ et $G(B)$. Posons $\eta = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$, où $\sigma_s = \{1, \ldots, n\}$. Soit $(Z_1, \ldots, Z_s) \in F(B)$. Alors $(Z_1, \ldots, Z_s, Z_s) \in G(B)$. Réciproquement si $(Z_1, \ldots, Z_s, Z) \in G(B)$, alors $Z_s = Z \subset B \times \mathbb{H}^n(Y)$ puisque Z et Z_s définissent le même morphisme $B \to H_\eta(X)$. Et puisque $Z_i \subset Z_s$, $Z_i \subset B \times H^-_{\sigma_i}(X)$ est en fait dans $B \times H^-_{\sigma_i}(Y)$ et $(Z_1, \ldots, Z_s, Z_s) \in F(B)$. L'identification de $F(B)$ et $G(B)$ en découle. ■

3.2. **Morphismes d'oubli.**

Proposition 24. *Soient η et η' deux enrichissements avec $\eta \subset \eta'$. Il existe un morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta} : R_{\eta'} \to R_\eta$. De plus, $p_{\eta',\eta} \circ f_{\eta'} = f_\eta$.*

Démonstration: la projection naturelle $p_{\eta',\eta}$ de $H_{\eta'}$ sur H_η envoie $R_{\eta'}$ dans R_η par définition de ces lieux d'incidence. L'egalité $p_{\eta',\eta} \circ f_{\eta'} = f_\eta$ est évidente. ■

La proposition suivante nous dit que, sous certaines conditions, le morphisme d'oubli est un isomorphisme. Elle réduira drastiquement le nombre de R_η à étudier lors de la classification.

Proposition 25. *Soit η un enrichissement admissible et $\eta' = \eta \cup \sigma$. Supposons que η contienne deux enrichissements σ_1 et σ_2 de même niveau que σ vérifiant*

$$\begin{aligned}
\sigma &\in \Sigma_{1,p_{l-1},p_{l-2},\ldots,p_1}(n) = \Sigma_{p_{l-1},p_{l-2},\ldots,p_1}(n) \\
\sigma_1 &\in \Sigma_{p_l,p_{l-1},,p_{l-2},\ldots,p_1}(n) \\
\sigma_2 &\in \Sigma_{p_l-1,p_{l-1},,p_{l-2},\ldots,p_1}(n) \\
\sigma_1 &= \sigma_2 \cup \{\sigma\}
\end{aligned}$$

alors pour tout X, le morphisme d'oubli

$$p_{\eta',\eta} : R_{\eta'} \to R_\eta$$

est un isomorphisme.

Lemme 26 (existence d'une application résiduelle)**.**
Soient F_1 et F_2 deux familles de $B \times X$ plates et finies sur une base B vérifiant $F_1 \subset F_2$. Supposons que les polynômes de Hilbert des fibres de F_1 et F_2 soient respectivement p et $p+1$. Il existe un unique morphisme $res(F_1, F_2) : B \to X$ dont le graphe $Res(F_1, F_2)$ vérifie

$$I(F_1).I(Res(F_1, F_2)) \subset I(F_2).$$

On dira que $res(F_1, F_2)$ est l'application résiduelle définie par l'inclusion $F_1 \subset F_2$. En particulier, pour deux sous-schémas de X de dimension zéro Y et Y' vérifiant $Y \subset Y'$ et $col(Y') = col(Y) + 1$, il existe un schéma $Res(Y, Y')$.

Démonstration du lemme: montrons que le faisceau d'idéaux $(I(F_2) : I(F_1))$ définit un fermé Z de $B \times X$, plat sur B, dont la fibre au dessus de tout point b de B est de degré un. Le problème est local sur B qu'on peut supposer affine. Les schémas F_1 et F_2 sont alors également affines. Puisqu'on a l'inclusion

$$(I(F_2) : I(F_1)) \supset I(F_2)$$

le sous-schéma Z défini par $(I(F_2) : I(F_1))$ est un sous-schéma fermé de F_2. L'idéal de $\mathcal{O}_{B\times X}/I(F_2)$ définissant Z comme sous-schéma de F_2 est

$$(I(F_2) : I(F_1))/I(F_2) = (0 : (I(F_1)/I(F_2))).$$

De la suite exacte

$$0 \to I(F_1)/I(F_2) \to \Gamma(F_2) \to \Gamma(F_1) \to 0$$

on déduit que $I(F_1)/I(F_2)$ est un $\Gamma(B)$-module localement libre de rang un et, quitte à restreindre B, on peut supposer qu'il est libre engendré par un élément f de $\Gamma(F_2)$. Le diagramme commutatif à ligne exacte

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Gamma(Z) \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 0 : (I(F_1)/I(F_2)) \arrow[r] & \Gamma(F_2) \arrow[ur] \arrow[rr, "\times f"] & & \Gamma(F_2)
\end{tikzcd}$$

montre que $\Gamma(Z) = \Gamma(F_2)/(0 : I(F_1)/I(F_2))$ s'identifie au sous $\Gamma(B)$-module de $\Gamma(F_2)$ formé par les multiples de f. Finalement la suite exacte

$$0 \to \Gamma(Z) \to \Gamma(F_2) \to \Gamma(F_1) \to 0$$

montre que $\Gamma(Z)$ est un $\Gamma(B)$-module plat, donc localement libre, de rang un. L'inclusion de Z dans $B \times X$ induit un morphisme de B dans X ayant la propriété voulue.

Soit $res(F_1, F_2)$ un morphisme ayant la propriété voulue. On a l'inclusion

$$I(Res(F_1, F_2)) \subset (I(F_2) : I(F_1)).$$

Deux familles, plates et finies de degré un sur la base et incluses l'une dans l'autre sont nécessairement égales donc $I(Res(F_1, F_2)) = (I(F_2) : I(F_1))$. ■

Remarque 27. *Dans* [13], *Le Barz a montré l'existence d'un résiduel pour deux sous-schémas Y et Y' de dimension zéro de X. Le lemme est une version relative du résultat de Le Barz*

Démonstration de la proposition 25: en réalisant X comme sous-schéma d'une variété lisse irréductible puis en utilisant la proposition 23, on peut supposer X lisse irréductible. Posons $\eta = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s\}$. Le schéma R_η est muni de fermés universels $U_1, U_2, \dots, U_s$. On définit le fermé U_σ de $R_\eta \times H_\sigma^-$ par l'idéal $I(U_\sigma) = (I(U_1) : I(U_2))$. Les fermés universels $U_1, U_2, \dots, U_s,\ U_\sigma$ définissent par propriété universelle un morphisme $p_{\eta,\eta'} : R_\eta \to R_{\eta'}$. Les morphismes $p_{\eta,\eta'}$ et $p_{\eta',\eta}$ sont par construction inverses l'un de l'autre. ■

3.3. **Actions de groupes.** On dispose d'une action naturelle du groupe symétrique S_n sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Cette action induit une action de S_n sur l'ensemble des structures de $\{1, \dots, n\}$ par permutation des indices, puis une action sur l'ensemble des enrichissements par permutation des structures. On a la proposition évidente suivante.

Proposition 28. *Soient η et η' deux enrichissements de $\{1, \dots, n\}$ qui sont dans la même orbite pour l'action de S_n. Alors les schémas R_η et $R_{\eta'}$ sont isomorphes.*

Si $\eta = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$, on note

$$G_\eta = \{g \in S_n \text{ t.q. } \exists p \in S_r,\ g.\sigma_i = \sigma_{p(i)}\}$$

et

$$H_\eta = \{g \in S_n \text{ t.q. } \forall i,\ g.\sigma_i = \sigma_i\}.$$

Proposition 29. *Pour tout X, il existe une action naturelle du quotient G_η/H_η sur le schéma R_η*

Démonstration: si $\eta = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$, un morphisme $Z \to R_\eta$ est défini par la donnée de fermés $U_i \subset Z \times H_{\sigma_i}^-$ $(1 \leq i \leq r)$ satisfaisant à des relations d'incidence. En particulier le morphisme identité de R_η définit un ensemble de fermés $U_1, \dots, U_r$. Toute permutation g de G_η est associé à une permutation p. L'ensemble $U_{p(1)}, \dots, U_{p(r)}$ définit par propriété universelle un endomorphisme φ_g de R_η, qui est un automorphisme d'inverse $\varphi_{g^{-1}}$. L'application $g \to \varphi_g$ définit une action de groupe de G_η sur R_η. Puisque $H_\eta \subset G_\eta$ n'agit pas, l'action se factorise en une action de G_η/H_η. ■

4. Etude et classification des compactifications pour $n \leq 3$.

On veut classer les compactifications à isomorphisme près (au sens où deux compactifications C et C' d'un même quotient $F(X, n)/Q$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme entre C et C' valant l'identité sur $F(X, n)/Q$). En d'autres termes, on cherche une liste d'enrichissements admissibles tels que pour tout η admissible, R_η est isomorphe à R_β pour un unique β dans la liste des admissibles. Cette section donne la classification pour $n = 2$ et $n = 3$.

4.1. **Le cas $n = 2$.** Le cas $n = 2$ étant facile, nous nous contentons de donner le résultat. Les démonstrations sont des cas particuliers extrêmement simples du cas $n = 3$ et nous les omettons par souci de concision.

Notons η_0 l'enrichissement de $\{1, 2\}$ contenant l'unique structure $\{1, 2\}$, et η_1 l'enrichissement contenant les deux structures $\{1, 2\}$ et $\{1\}$.

Théorème 30. *Tous les enrichissements de $\{1, 2\}$ sont admissibles. Quel que soit X et quel soit l'enrichissement η, R_η est isomorphe à R_{η_0} ou à R_{η_1}. De plus, $R_{\eta_0} = \mathbb{H}^2$ et, pour X lisse, $R_{\eta_1}(X)$ est l'éclatement de $X \times X$ le long de la diagonale.*

4.2. **Le cas $n = 3$.** La classification s'effectue en quatre étapes

(1) exhiber "à la main " quelques enrichissements admissibles
(2) exhiber quelques enrichissements non admissibles
(3) établir des lemmes de contamination qui permettent, étant donné un enrichissement admissible η, de montrer que d'autres enrichissements η' sont admissibles.
(4) traiter tous les enrichissements à partir des cas particuliers et des lemmes de contamination.

4.2.1. *Notations.* Dans cette section, on met en place les notations qui nous facilitent la manipulation des enrichissements. On note les structures de niveau un de $\{1, 2, 3\} = \{i, j, k\}$ à l'aide d'indices:

$$\sigma_i = \{i\} \in \Sigma_1(3)$$
$$\sigma_{ij} = \{i, j\} \in \Sigma_2(3)$$
$$\sigma_{123} = \{1, 2, 3\} \in \Sigma_3(3).$$

On note les structures de niveau deux à l'aide d'exposants:

$$\sigma^k = \{\sigma_{ik}, \sigma_{jk}\} \in \Sigma_{2,2}(3)$$
$$\sigma^{123} = \{\sigma_{12,}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} \in \Sigma_{3,2}(3).$$

On représente les enrichissements avec des indices et des exposants, suivant les structures contenues dans l'enrichissement

$$\eta^{a_1,a_2,\dots,a_r}_{b_1,b_2,\dots,b_s} = \{\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, \dots, \sigma^{a_r}, \sigma_{b_1}, \sigma_{b_2}, \dots, \sigma_{b_s}\}.$$

On utilisera également cette notation avec indices et exposants pour les schémas R_η et H_η:

$$R^{a_1,a_2,\dots,a_r}_{b_1,b_2,\dots,b_s} = R_{\eta^{a_1,a_2,\dots,a_r}_{b_1,b_2,\dots,b_s}}$$
$$H^{a_1,a_2,\dots,a_r}_{b_1,b_2,\dots,b_s} = H_{\eta^{a_1,a_2,\dots,a_r}_{b_1,b_2,\dots,b_s}}.$$

Parmi les enrichissements de niveau inférieur ou égal à deux, il y en a un maximum, celui qui contient toutes les structures de niveau inférieur ou égal à deux. On le notera η_{max} et R_{max} le schéma de triplets de X correspondant. Enfin, si p est un point de X, on notera $[[p]]$ le voisinage formel de p dans X, c'est à dire le morphisme naturel $Spec\ \hat{A} \to X$, où $\hat{A}$ est la limite projective des $A/\mathfrak{m}^n$, $(A, \mathfrak{m})$ étant l'anneau local de X en p.

4.2.2. *Quelques enrichissements admissibles.* Dans cette section, on montre que les enrichissements $\eta_{123}, \eta_{1,2,3,12,13,23,123}$, $\eta_{12,123}, \eta^1_{123}, \eta^{123}_{123}$ sont admissibles.

On sait que pour X lisse irréductible, $\mathbb{H}^3(X)$ est irréductible et est l'adhérence de $F(X, 3)/S_3$ donc η_{123} est admissible.

Le cas $\eta_{1,2,3,12,13,23,123}$ a été traité dans [13], où Le Barz a montré que cet enrichissement était admissible.

Pour les trois enrichissements η restant, on montre que si X est lisse irréductible, les $R_\eta(X)$ sont irréductibles de dimension $3.dim(X)$. Cela suffit à montrer que les enrichissements sont admissibles car l'unique composante irréductible de $R_\eta(X)$ est nécessairement la compactification de $f_\eta(F(X, 3))$. Pour obtenir l'irréductibilité, on montre que les $R_\eta(X)$ sont lisses connexes. Ils admettent des points spéciaux et la lissité se montre par un calcul en coordonnées locales au voisinage de ces points spéciaux. Le dimension de la composante irréductible est une conséquence de ce calcul local.

Proposition 31. *Soit η un enrichissement de $\{1,2,3\}$ de niveau au plus deux. Soit X une variété lisse de dimension au moins deux. Soient x un point de X, $[d]$ un sous-schéma ponctuel de X de colongueur deux contenant x. Soit $[t]$ un sous-schéma ponctuel de colongueur trois de X contenant $[d]$ isomorphe à Spec $k[x,y]/(x^2,xy,y^2)$ en tant que schéma abstrait. Il existe un point $q(x,d,t)$ de R_η entièrement déterminé par x,d et t.*

Démonstration: nous allons exhiber un point de $R_{\eta_{max}}$ déterminé par x,d et t. L'image de ce point par le morphisme d'oubli $p_{\eta_{max},\eta}$ sera le point $q(x,d,t)$. Les doublets inclus dans le triplet $[t]$ forment un sous-schéma de $\mathbb{H}^2$ isomorphe à $\mathbb{P}^1$, et donc un doublet de doublets inclus dans le triplet correspond à un sous-schéma de degré deux du $\mathbb{P}^1$. Le doublet d inclus dans $[t]$ est un point du $\mathbb{P}^1$. Il existe un unique sous-schéma de degré deux de $\mathbb{P}^1$ supporté par d. On note d^2 le point de $\mathbb{H}^{2,2}$ associé. On a par construction $[d^2]\subset[t]$. De même, on peut définir un point d^3 de $\mathbb{H}^{3,2}$ pour lequel $[d^3]\subset[t]$. Considérons alors le point

$$p=(x,x,x,d,d,d,d^2,d^2,d^2,d^3,t)$$

de

$$\begin{aligned} H_1\times H_2 \quad &\times \quad H_3\times H_{12}\times H_{13}\times H_{23} \\ &\times \quad H^1\times H^2\times H^3\times H^{123}\times H_{123} \end{aligned}$$

On vérifie que toutes les relations d'incidence sont satisfaites et donc $p\in R_{\eta_{max}}$. ■

Proposition 32. *Soient X une variété lisse connexe et η un enrichissement de $\{1,2,3\}$ de niveau au plus deux. Le schéma R_η est connexe.*

Démonstration: soient q un point de R_η et $q(x,d,t)$ un point spécial de R_η au sens de la proposition 31. Nous allons déterminer une suite de points $q_0=q,q_1,\ldots,q_n=q(x,d,t)$ telle que, pour tout i, il existe une courbe C_i dans R_η contenant q_i et q_{i+1}. Si $\eta=\eta_{\max}$, le point q est défini par ses coordonnées

$$p_1(q),p_2(q),p_3(q),p_{12}(q),p_{13}(q),p_{23}(q),p^1(q),p^2(q),p^3(q),p^{123}(q),p_{123}(q)$$

dans

$$X^3\times(\mathbb{H}^2)^3\times(\mathbb{H}^2)^3\times\mathbb{H}^{3,2}\times\mathbb{H}^3.$$

Pour η quelconque, q est déterminé par un certain nombre de coordonnées parmi $p_1(q),\ldots,p_{123}(q)$.

Par définition d'un enrichissement, la coordonnée p_{123} fait toujours partie des coordonnées définissant q. Le support de $p_{123}(q)$ est constitué d'au plus trois points. En bougeant $p_{123}(q)$ le long d'une famille à un paramètre, on peut construire une courbe C_0 dans R_η telle que: C_0 contienne q_0 et un point q_1 dont le triplet $[p_{123}(q_1)]$ associé est ponctuel de support x.

Soit $[[x]]$ le voisinage formel de x dans X. Le triplet $[p_{123}(q_1)]$ est maintenant un sous-schéma de $[[x]]$. Puisqu'on a les relations d'incidence:

$$\begin{aligned} p_i(q_1)&\subset[p_{123}(q_1)]\subset[[x]] \\ [p_{ij}(q_1)]&\subset[p_{123}(q_1)]\subset[[x]] \\ [p^i(q_1)]&\subset[p_{123}(q_1)]\subset[[x]] \\ [p^{123}(q_1)]&\subset[p_{123}(q_1)]\subset[[x]] \end{aligned}$$

"tout se passe" dans le voisinage formel $[[x]]$. En particulier tout automorphisme φ_t de $[[x]]$ définit un point $\psi_t(q_1)$ de R_η. En tant que schéma abstrait, $[p_{123}(q_1)]$ est soit isomorphe à $Spec\ k[y,z]/(y^2,yz,z^2)$, soit isomorphe à $Spec\ k[z]/z^3$. Dans le premier cas, on définit $q_2=q_1$. Dans le deuxième cas, et si on suppose que X est de dimension supérieure ou égale à trois, on peut choisir un isomorphisme

$$[[x]]\simeq Spec\ k[[y,z,t_1,t_2,\dots,t_n]]$$

dans lequel $[p_{123}(q_1)]$ ait pour équations $(y,z^3,t_1,\dots,t_n)$. Pour tout t dans $\mathbb{A}^1-0$, on définit l'automorphisme φ_t de $[[x]]$:

$$\begin{array}{rcl} y & \mapsto & ty+z^2 \\ z & \mapsto & z \\ t_i & \mapsto & t_i \end{array}$$

On en déduit un morphisme

$$\begin{array}{rcl} \psi:\mathbb{A}^1-0 & \rightarrow & R_\eta \\ t & \mapsto & \varphi_t(q_1) \end{array}$$

Il existe un morphisme $\tilde{\psi}$ prolongeant ψ en 0 et ∞ et $\tilde{\psi}(\infty)=q_1$. Notons $q_2=\tilde{\psi}(0)$. On vérifie par un petit calcul que $[p_{123}(q_2)]$ est défini par l'idéal $(y^2,yz,z^2,t_1,\dots,t_n)$.

Les doublets inclus dans $[p_{123}(q_2)]$ forment un $\mathbb{P}^1$ et le morphisme de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{H}^2$ correspondant peut être décrit de la façon suivante:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{H}^2 \\ (h_0:h_1) & \mapsto & x \text{ avec } I([x])=(h_0y-h_1z,y^2,yz,z^2,t_1,t_2,\dots,t_n) \end{array}$$

Choisissons la famille d'automorphismes suivantes de $[[x]]$.

$$\begin{array}{rrl} \varphi_t: & y & \mapsto ty \\ & z & \mapsto z \\ & t_i & \mapsto t_i \end{array}$$

Comme précédemment, φ_t induit un morphisme $\tilde{\psi}:\mathbb{A}^1\rightarrow R_\eta$. On a $q_2=\tilde{\psi}(1)$ et on cherche à comprendre $q_3=\tilde{\psi}(0)$. Commençons par déterminer $p^1(\tilde{\psi}(0))$. Le point $p^1(\tilde{\psi}(1))$ correspond à un sous-schéma de degré deux D du $\mathbb{P}^1$ formé par les doublets inclus dans le triplet. Le morphisme φ_t induit un automorphisme ρ_t de $\mathbb{P}^1$:

$$\rho_t(h_0:h_1)=(th_0:h_1)$$

et $p^1(\tilde{\psi}(t))$ correspond au sous-schéma $\rho_t(D)$. Si on a choisi un bon isomorphisme

$$[[x]]\simeq Spec\ k[[y,z,t_1,t_2,\dots,t_n]]$$

le support de D ne rencontre pas le point à l'infini $(1:0)$, le doublet d correspond au point $(0:1)$ de $\mathbb{P}^1$, et alors $[p^1(\tilde{\psi}(0))]$ est le sous-schéma de degré deux de $\mathbb{P}^1$ supporté par $d=(0:1)$.

La même démonstration montre que tous les points

$$p^i(\tilde{\psi}(0)),\ p_{ij}(\tilde{\psi}(0)),\ p^{123}(\tilde{\psi}(0))$$

correspondent à des sous-schémas de $\mathbb{P}^1$ de support $d=(0:1)$, ce qui signifie $\tilde{\psi}(0)=q(x,d,t)$. ∎

Remarque 33. *on a fait la démonstration dans le cas où la dimension de X est supérieure ou égale à trois. Dans le cas où elle vaut deux, il suffit de supprimer les lignes contenant des "t_i" dans la démonstration. Le cas de la dimension un est facile et laissé au lecteur.*

Corollaire 34. *Si R_η admet un point singulier, alors les points $q(x, d, t)$ sont singuliers.*

Démonstration: supposons R_η singulier. La construction précédente définit une famille de courbes C_i joignant q à $q(x, d, t)$. Pour un point p de C_0 différent de q_1, les deux voisinages formels $[[p]]$ et $[[q]]$ sont isomorphes. Donc si $q_0 = q$ est singulier, tous les points de C_0 différents de q_1 sont singuliers. Par suite q_1 est singulier. Le même raisonnement permet d'obtenir de proche en proche $q_2, \ldots, q_n = q(x, d, t)$ singuliers. ■

Corollaire 35. *Soient η est un enrichissement admissible et $\eta_{res} \subset \eta$ l'ensemble des structures de niveau au plus deux de η. Si la fibre d'un morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta} : R_{\eta'} \to R_\eta$ est schématiquement réduite à un point au dessus des points q tels que $p_{\eta,\eta_{res}}(q)$ est de la forme $q(x, d, t)$, alors $p_{\eta',\eta}$ est un isomorphisme.*

Démonstration: la fibre au dessus d'un point général $p = f_\eta(x),\ x \in F(X, 3)$ est non vide car elle contient $f_{\eta'}(x)$. Pour montrer l'isomorphisme, il suffit donc par semi-continuité de voir que toutes les fibres sont incluses dans un point. Toujours par semi-continuité et en raisonnant comme dans la proposition précédente, il suffit de le vérifier aux points spéciaux q tels que $p_{\eta,\eta_{res}}(q)$ est de la forme $q(x, d, t)$, ce qui est vrai par hypothèse. ■

Proposition 36. *Soit X une variété lisse irréductible. Le schéma $R_{12,123}(X)$ est une variété lisse irréductible de dimension $3.dim(X)$. En particulier $\eta_{12,123}$ est admissible.*

Démonstration: puisque $R_{12,123}$ est connexe (proposition 32), il suffit de vérifier la lissité, en les points spéciaux $q(p, d, t)$ par 34. Supposons la variété X de dimension au moins trois. Pour un tel point q, on peut choisir un voisinage formel $Spec\ k[[x, y, z_1, z_2, \ldots, z_n]]$ de p dans lequel les équations de $[d]$ et $[t]$ sont respectivement:

$$I([d]) = (x^2, y, z_1, \ldots, z_n)$$
$$I([t]) = (x^2, xy, y^2, z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

D'après [13], le voisinage formel de d dans $\mathbb{H}^2$ est isomorphe à

$$Spec\ [[a, b, c, d, e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_n]]$$

et le voisinage formel de t dans $\mathbb{H}^3$ est isomorphe à

$$Spec\ k[[u, u', u'', v, v', v'', \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n]].$$

Les idéaux universels de $\mathbb{H}^2$ et $\mathbb{H}^3$ au dessus de ces voisinages formels sont:

$$I_{12} = (x^2 + ax + b, y - cx - d, z_i - e_i x - f_i)$$

$$I_{123} = (x^2 + ux + vy + w, xy + u'x + v'y + w', y^2 + u''x + v''y + w'', z_i + \rho_i x + \sigma_i y + \theta_i)$$

où w, w', w'' sont des fonctions algébriques de u, u', u'', v, v', v''. Le voisinage formel de (d, t) dans $R_{12,123}$ est le lieu

$$Z \hookrightarrow Spec\ k[[a, b, c, d, e_i, f_i, u, u', u'', v, v', v'', \rho_i, \sigma_i, \theta_i]]$$

au dessus duquel $I_{123} \subset I_{12}$.

Le calcul de Z a déjà été effectué dans [13] (Le Barz y parlait du lieu ensembliste mais il a effectué le calcul au moyen de divisions et les techniques développées dans [6] montrent qu'il a en fait calculé les lieux schématiques d'incidence). L'idéal de Z est le suivant:

$$I(Z) = (u - a + cv, b - dv - w, u' - ac + cv' + d, 2cd + cv'' + u'' - ac^2, \\ e_i + \sigma_i c + \rho_i, f_i + \theta_i + \sigma_i d)$$

et

$$\begin{aligned} Z &\simeq Spec\,[[a,b,c,d,e_i,f_i,u,u',u'',v,v',v'',\rho_i,\sigma_i,\theta_i]]/I(Z) \\ &\simeq Spec\,k[[a,c,d,v,v',v'',\rho_i,\sigma_i,\theta_i]] \end{aligned}$$

Donc Z est lisse au point spécial et a la dimension attendue.

On a fait la démonstration dans le cas où X est de dimension au moins trois. Dans le cas où X est de dimension deux, il suffit d'ôter de la démonstration les lignes contenant des termes z_i. Le cas de la dimension un est facile et laissé au lecteur. ∎

Proposition 37. *Si X est une variété lisse irréductible, le schéma $R^1_{123}(X)$ est une variété lisse irréductible de dimension $3.dim(X)$. En particulier η^1_{123} est admissible.*

Démonstration: pour les mêmes raisons que précédemment, nous allons montrer la lissité au point spécial dans le cas où X est de dimension deux.

Soit (p^1, p_{123}) un point spécial de R^1_{123}. Les objets en jeu sont un schéma ponctuel $[p_{123}]$ de X de colongueur trois, un schéma $[p^1]$ de $\mathbb{H}^2$ ponctuel de colongueur deux inclus dans $[p_{123}]$, un schéma $[p_{12}]$ ponctuel de X où p_{12} est le support de $[p^1]$, un point p support à la fois de $[p_{12}]$ et de $[p_{123}]$.

On peut choisir un voisinage formel $Spec\,k[[x,y]]$ de p tel que:

- $I([p_{12}]) = (x^2, y)$, le voisinage formel de p_{12} dans $\mathbb{H}^2$ est isomorphe à
$$Spec\,k[[a,b,c,d]]$$
et l'idéal universel de $\mathbb{H}^2 \times X$ au dessus de cette carte est
$$(x^2 + ax + b, y - cx - d),$$
- $I([p_{123}]) = (x^2, xy, y^2)$, le voisinage formel de p_{123} est isomorphe à
$$Spec\,k[[u,u',u'',v,v',v'']]$$
et l'idéal universel de $\mathbb{H}^3 \times X$ au dessus de cette carte est
$$I_{123} = (x^2 + ux + vy + w, xy + u'x + v'y + w', y^2 + u''x + v''y + w'')$$
où w, w', w'' sont des fonctions algébriques de u, u', u'', v, v', v'',
- le voisinage formel de p^1 dans $\mathbb{H}^{2,2}$ est isomorphe à
$$Spec\,k[[e,f,g,h,i,j,l,m]]$$
et l'idéal universel de $\mathbb{H}^{2,2} \times \mathbb{H}^2$ au dessus de cette carte est:
$$I^1 = (a - ec - f, b - gc - h, c^2 - ic - j, d - lc - m)$$
car $[p^1]$ a pour équations $a = b = c^2 = d = 0$ dans $\mathbb{H}^2$.

D'après la démonstration précédente, le lieu Z de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^3$ au dessus duquel $I_{123} \subset I_{12}$ est donné par l'idéal

$$J = (u - a + cv, b - dv - w, u' - ac + cv' + d, 2cd + cv'' + u'' - ac^2).$$

En prenant l'image inverse par les projections évidentes, I^1 et J peuvent être vus comme des idéaux de $(\mathbb{H}^{2,2} \times \mathbb{H}^3) \times \mathbb{H}^2$. Par définition du lieu d'incidence, le lieu W de $\mathbb{H}^{2,2} \times \mathbb{H}^3$ au dessus duquel $[p^1] \subset [p_{123}]$ est le lieu au dessus duquel $J \subset I^1$.

Grâce au morphisme canonique $Spec\ k[[a, b, c, d]] \to Spec\ k[a, b, c, d]$, on peut supposer que I^1 et J définissent des familles de sous-schémas d'un espace affine. On calcule alors le lieu d'incidence par divisions en utilisant le fait que les générateurs de I^1 forment une base de Gröbner unitaire pour l'ordre homogène avec $a > b > d > c$.

Plutôt que d'écrire les divisions sous la forme traditionnelle

$$f = \sum \lambda_i f_i + R$$

où les f_i sont les générateurs de I^1, nous travaillerons dans

$$(k[[u, u', u'', v, v', v'', e, f, g, h, i, j, l, m]] \otimes k[a, b, c, d])/I^1$$

et nous écrirons $f = R$. Moyennant cette convention, les divisions des générateurs de J par I^1 s'écrivent:

$$cv + u - a = cv + u - ec - f = (u - f) + c(v - e)$$

donc $I(W) \supset (e - v, u - f)$

$$dv + w - b = lcv + mv + w - gc - h$$

donc $I(W) \supset (g - lv, h - w - vm)$.

$$d + cv' + u' - ac = lc + m + cv' + u' - fc - eic - ej$$

donc $I(W) \supset (l + v' - f - ei, m + u' - ej)$.

$$\begin{aligned} 2cd + cv'' + u'' - ac^2 &= 2lc^2 + 2cm + cv'' + u'' - ejc + (-l - v')c^2 \\ &= (l - v')(ic + j) + 2cm + cv'' + u'' - ejc \end{aligned}$$

donc $I(W) \supset (i(l - v') + 2m + v'' - ej, j(l - v') + u'')$.

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} I(W) = {} & (e - v, u - f, g - lv, h - w - vm, l + v' - f - ei, m + u' - ej, \\ & i(l - v') + 2m + v'' - ej, j(l - v') + u'') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W &= Spec\ k[[u, u', u'', v, v', v'', e, f, g, h, i, j, l, m]]/I(W) \\ &= Spec\ k[[u', v', e, f, i, j]] \end{aligned}$$

W est non singulier de dimension $3.dim(X)$. ■

Proposition 38. *Soit X une variété lisse irréductible. Le schéma R^{123}_{123} est une variété lisse irréductible de dimension $3.dim(X)$. En particulier η^{123}_{123} est admissible.*

Démonstration: on fait ici aussi la démonstration dans le cas où X est de dimension deux.

Soit (p^{123}, p_{123}) un point spécial de R^{123}_{123}. Notons p_{12} le point de $\mathbb{H}^2$ défini par le support de $[p^{123}]$. On reprend les notations de la démonstration de la proposition

37 pour les voisinages formels des points p_{12}, p_{123} ainsi que pour l'idéal J.

Le voisinage formel de p^{123} est isomorphe à

$$Spec\, k[[e,f,g,h,i,j,l,m,n,o,p,q]]$$

et l'idéal universel de $\mathbb{H}^{3,2} \times \mathbb{H}^2$ au dessus de cette carte est

$$I^{123} = (a - ec^2 - fc - g, b - hc^2 - ic - j, c^3 - lc^2 - mc - n, d - oc^2 - pc - q).$$

Il nous faut calculer le lieu W de

$$Spec\, k[[u,u',u'',v,v',v'',e,f,g,h,i,j,l,m,n,o,p,q]]$$

au dessus duquel $I^{123} \supset J$. On effectue des divisions:

$$cv + u - a = cv + u - ec^2 - fc - g$$

donc $e = 0,\ g = u,\ f = v \quad$ sur W.

$$dv + w - b = voc^2 + pcv + qv + w - hc^2 - ic - j$$

donc $vo = h,\ vp = i,\ vq + w = j \quad$ sur W.

$$d + cv' + u' - ac = oc^2 + pc + q + v'c + u' - fc^2 - gc$$

donc $o = f,\ p + v' = g,\ q + u' = 0 \quad$ sur W.

$$\begin{aligned} 2cd + cv'' + u'' - ac^2 &= 2oc^3 + 2pc^2 + 2qc + cv'' + u'' - fc^3 - gc^2 \\ &= (2o - f)(lc^2 + mc + n) + (2p - g)c^2 + c(2q + v'') + u'' \end{aligned}$$

donc

$$I(W) \supset ((2o - f)l + 2p - g,\ (2o - f)m + 2q + v'',\ (2o - f)n + u'').$$

Au total

$$\begin{aligned} I(W) = (&e,\ g - u,\ f - v,\ vo - h,\ vp - i,\ vq + w - j,\ o - f,\ p + v' - g, \\ &q + u',\ (2o - f)l + 2p - g,\ (2o - f)m + 2q + v'',\ (2o - f)n + u'') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W &= Spec\, k[[u,u',u'',v,v',v'',e,f,g,h,i,j,l,m,n,o,p,q]]/I(W) \\ &= Spec\, k[[l,m,n,o,p,q]] \end{aligned}$$

Donc W est lisse de dimension $3.dim(X)$. ■

4.2.3. *Quelques enrichissements non admissibles.* Dans cette section, on montre que certains enrichissements ne sont pas admissibles. On utilise pour cela trois raisonnements différents, l'un donnant les énoncés 41, 42 et 43, un autre donnant les énoncés 44 et 45, et enfin un dernier pour l'énoncé 46

On déduit facilement du lemme suivant un critère de non admissibilité (corollaire 40).

Proposition 39. *Soit η un enrichissement admissible et $\hat{t}$ un point de R_η. Les conditions suivantes sont équivalentes quand X est lisse irréductible:*

- *il existe un point p de $F(X,3)$ tel que $\hat{t} = f_\eta(p)$*
- *le sous-schéma $[p_{\eta,\eta_{123}}(\hat{t})]$ de X admet pour support trois points distincts.*

Démonstration:

1 $\Rightarrow$2 est évident.

2 $\Rightarrow$1: par définition d'un enrichissement admissible, $\hat{t}$ est limite de points de $f_\eta(F(X,3))$, ie. il existe $\varphi : Spec\ k[[t]]_t \to F(X,3)$ tel que $f_\eta \circ \varphi$ se prolonge en le point special 0 de $Spec\ k[[t]]$ en prenant la valeur $\hat{t}$. Pour conclure, il nous suffit de montrer que φ se prolonge en 0 puisqu'alors $\hat{t} = f_\eta(\varphi(0))$. Ce prolongement existe si le prolongement de $f_{\eta_{123}} \circ \varphi$ est tel que $[f_{\eta_{123}} \circ \varphi(0)]$ a pour support trois points distincts. Or cette affirmation est vraie puisque $f_{\eta_{123}} \circ \varphi = p_{\eta,\eta_{123}} \circ f_\eta \circ \varphi$ se prolonge en 0 par $p_{\eta,\eta_{123}}(\hat{t})$. ■

Corollaire 40. *Si un point $\hat{t}$ de R_η satisfait la deuxième condition mais pas la première, alors η n'est pas admissible.*

Ce critère s'applique aux trois propositions suivantes.

Proposition 41. *L' enrichissement $\eta_{1,2,123}$ n'est pas admissible*

Démonstration: le point $(p_1, p_1, p_1 \cup p_2 \cup p_3) \in H_1 \times H_2 \times H_{123}$ est un point de $R_{1,2,123}$ qui n'est pas dans $f_{\eta_{1,2,123}}(F(X,3))$ ■

Proposition 42. *Soit η un enrichissement de niveau deux contenant σ^1 comme unique structure de niveau deux, contenant σ_1 ou σ_2. Alors η n'est pas admissible.*

Démonstration: considérons le point $p = (p_2, p_1, p_3, p^1, p_{123})$ de

$$H_1 \times H_2 \times H_3 \times H^1 \times H_{123}$$

avec

$$[p_{ij}] = p_i \cup p_j \quad [p^1] = p_{12} \cup p_{13} \quad [p_{123}] = p_1 \cup p_2 \cup p_3.$$

La projection de p sur H_η est un point de R_η qui n'est pas dans $f_\eta(F(X,3))$. ■

Proposition 43. *Soit η un enrichissement de niveau deux contenant σ^1 et σ^2, et tel que*

$$\eta \cap \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} = \emptyset.$$

Alors η est non admissible.

Démonstration: considérons le point

$$\hat{t} = (p_1, p_2, p_3, p^1, p^1, p^3, p^{123}, p_1 \cup p_2 \cup p_3)$$

de

$$H_1 \times H_2 \times H_3 \times H^1 \times H^2 \times H^3 \times H^{123} \times H_{123}.$$

Le point

$$p_{\eta^{1,2,3,123}_{1,2,3,123},\eta}(\hat{t})$$

est un point de R_η qui n'est pas dans $f_\eta(F(X,3))$. ■

Proposition 44. *L'enrichissement $\eta_{1,2,3,123}$ n'est pas admissible*

Démonstration: Soit X une surface lisse. On veut montrer que les schémas

$$\overline{f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X,3))} \subset H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_{123}$$

et

$$R_{1,2,3,123} \subset H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_{123}$$

sont différents. Pour cela, on les projette sur $H_1 \times H_2 \times H_{123}$:

$$p : \overline{f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X,3))} \to H_1 \times H_2 \times H_{123},$$

$$q : R_{1,2,3,123} \to H_1 \times H_2 \times H_{123}.$$

On considére un point

$$\hat{t} = (x, x, t) \in H_1 \times H_2 \times H_{123}$$

où $[t]$ est un deux gros point et $x \subset [t]$. On va montrer que la fibre $p^{-1}(\hat{t})$ est réduite à un point et que ce n'est pas le cas de $q^{-1}(\hat{t})$.

Pour la deuxième affirmation, la fibre $q^{-1}(\hat{t})$ est le lieu de $H_3 = X$ formé par les x' tels que:

- $[t] \subset x.x.x'$,
- $x' \subset [t]$.

La première condition est vérifiée car on a déjà $[t] \subset x.x$ La deuxième condition dit alors que $q^{-1}(\hat{t}) = [t]$, qui n'est pas réduit à un point.

Notons W l'image du morphisme p. Pour montrer la première affirmation, il nous suffit de construire un morphisme

$$W \to H_3 = X$$

qui envoie un point général $(p_1, p_2, p_1 \cup p_2 \cup p_3)$ de W sur p_3. A l'aide de l'inclusion

$$W \subset H_1 \times H_2 \times H_{123},$$

on récolte alors un morphisme

$$\varphi : W \to H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_{123}$$

qui envoie un point général $(p_1, p_2, p_1 \cup p_2 \cup p_3)$ sur $(p_1, p_2, p_3, p_1 \cup p_2 \cup p_3)$. Donc

$$\varphi(W) \supset f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X, 3))$$

et par suite,

$$\varphi(W) \supset \overline{f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X, 3))}.$$

Les fibres du morphisme

$$\overline{f_{\eta_{1,2,3,123}}(F(X, 3))} \to W$$

sont incluses dans les fibres du morphisme

$$\varphi(W) \to W$$

qui sont réduites à un point.

Il nous reste à construire ce morphisme $W \to X$. Soit U l'ouvert $f_{\eta_{1,2,123}}(F(X, 3))$ de W. Le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & W \times \mathbb{H}^2 \\ (p_1, p_2, p_{123}) & \mapsto & (p_1, p_2, p_{123}, p_1 \cup p_2) \end{array}$$

définit une sous-variété

$$\overline{\varphi(U)} \subset W \times \mathbb{H}^2.$$

Un point $(p_1, p_2, p_{123}, p_{12})$ de $\varphi(U)$ vérifie $[p_{12}] \subset [p_{123}]$. Cette condition reste vraie sur $\overline{\varphi(U)}$ et on peut définir

$$\begin{array}{rcl} \psi : \overline{\varphi(U)} & \to & X \\ (p_1, p_2, p_{123}, p_{12}) & \mapsto & Res([p_{12}], [p_{123}]) \end{array}$$

Pour montrer que ψ induit un morphisme $W \to X$, il suffit de vérifier que ψ est constant sur les fibres de la projection

$$\overline{\varphi(U)} \to W.$$

Vérifions le sur un point spécial de W. Un tel point est de la forme (p,p,t) où $[t]$ est un deux-gros point de support p. Un point de la fibre est de la forme (p,p,t,d) avec $[d] \subset [t]$ et donc $Res([d],[t]) = p$. Le morphisme ψ est constant sur les fibres. ■

De la même manière, on montre:

Proposition 45. *Les enrichissements $\eta^{123}_{1,2,123}$ et $\eta^{123}_{1,2,3,123}$ ne sont pas admissibles.*

Lemme 46. *Soit η un enrichissement de $\{1,2,3\}$ de niveau ≥ 3 dont les structures de niveau un et deux sont incluses dans l'ensemble $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{123}, \sigma^1\}$. Alors η_0 n'est pas admissible.*

Démonstration: soit p un point de X, t un point de $\mathbb{H}^3$ tel que $[t]$ soit supporté par p et isomorphe à $Spec\ k[x,y]/(x^2,xy,y^2)$. Soit $d_1,\ldots,d_6$ des points de $\mathbb{H}^2$ distincts tels que $[d_i] \subset [t]$. Définissons $d^{ij} \in \mathbb{H}^{2,2}$ par $[d^{ij}] = d_i \cup d_j$. Utilisons ces données pour construire un point de R_η qui n'est pas dans $\overline{f_\eta(F(X,3))}$. Notons η_1 (resp. η_2) l'ensemble des structures de niveau au plus deux (resp. au moins trois) de η de sorte que $H_\eta = H_{\eta_1} \times H_{\eta_2}$. Si σ est une structure de niveau l de η_2, alors σ est dans $\Sigma_{p2\ldots2}(3)$ où p vaut deux ou trois. On peut voir σ comme une structure de niveau $l-2$ sur $\Sigma_{22}(3)$. Puisque $\Sigma_{22}(3)$ est un ensemble à trois éléments, il s'identifie à $\{1,2,3\}$ par la bijection faisant correspondre $\{\{i,j\},\{i,k\}\}$ et $\{i\}$. La structure σ peut alors être identifié à une structure σ' de niveau $l-2$ de $\{1,2,3\}$. Notons $\eta'_2 = \cup_{\sigma\in\eta_2}\sigma'$. Notons q la projection du point (p,p,p,d_1,d_2,d^{12},t) de

$$H_{\sigma_1} \times H_{\sigma_2} \times H_{\sigma_3} \times H_{\sigma_{12}} \times H_{\sigma_{13}} \times H_{\sigma^1} \times H_{\sigma_{123}}$$

sur H_{η_1}. Puisque $H_{\sigma'}(\mathbb{H}^{2,2}) = H_\sigma$, $P = (q, f_{\eta'_2}(d^{12},d^{34},d^{56}))$ est un point de $H_{\eta_1} \times H_{\eta'_2}(\mathbb{H}^{2,2}) = H_\eta$. Vérifions que P est dans R_η mais pas dans $\overline{f_\eta(F(X,3))}$. Ce point n'est pas dans $\overline{f_\eta(F(X,3))}$ car si σ est une structure de niveau au moins trois de η, le point $p_{\eta,\sigma}(P)$ est défini à l'aide d'au moins quatre doublets parmi $d_1,\ldots,d_6$. Or, s'il était dans $\overline{f_\eta(F(X,3))}$, il serait déterminé par au plus trois doublets. Pour voir qu'il est en revanche dans R_η, il faut vérifier les relations d'incidence. Par construction de q, toutes les relations d'incidence liant les structures de niveau au plus deux sont vérifiées. Puisque la composante de P sur H_{η_2} est de la forme $f_{\eta'}(p)$ pour un point p, toutes les relations d'incidence concernant des structures de niveau au moins trois sont vérifiées. Pour les relations d'incidence, liant des structures de niveau au plus deux et des structures de niveau au moins trois, elles se vérifient soit trivialement, soit en utilisant le fait que les doublets $[d_i]$ sont inclus dans $[t]$ (nous laissons l'écriture précise de la liste des vérifications au lecteur). ■

4.2.4. *Lemmes de contamination.* Cette section contient les propositions qui permettent de produire des enrichissements admissibles η' à partir d'enrichissements admissibles η.

La première de ces propositions a déjà été décrite: c'est la proposition 25.

Proposition 47. *Soit η un enrichissement admissible contenant σ_{12} et σ_{13}. Soit $\eta' = \eta \cup \{\sigma^1\}$. L'enrichissement η' est admissible et le morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta} : R_{\eta'} \to R_\eta$ est un isomorphisme.*

Démonstration: d'après 35, il suffit de démontrer que la fibre de $p_{\eta',\eta}$ au dessus d'un point $q = q(x,d,t)$ est incluse dans un point. Les doublets inclus dans le triplet $[t]$ forment un sous-schéma de $\mathbb{H}^2$ isomorphe à $\mathbb{P}^1$. La fibre au dessus de q est le lieu Z de $\mathbb{H}^{2,2}$ formé par les doublets de doublets d^2 vérifiant

$$[d^2] \subset \mathbb{P}^1 \quad (car\ \sigma^1 \subset \sigma_{123})$$
$$[d^2] \subset d.d \quad (car\ \sigma^1 \subset \sigma_{12} \cup \sigma_{13})$$

Si $Y \hookrightarrow X$ est un sous-schéma ponctuel de degré n, le lieu de $\mathbb{H}^n$ formé par les p tels que $[p] \subset Y$ est schématiquement réduit à un point. Pour montrer la proposition, il nous suffit donc de montrer que $\mathbb{P}^1 \cap d.d$ définit un sous-schéma de degré deux. Mais c'est clair car c'est un sous-schéma d'une courbe lisse défini par le carré d'un idéal maximal. ■

Les propositions suivantes se démontrent également par vérification au point spécial.

Proposition 48. *Soit η un enrichissement admissible contenant σ_{12} et σ^{123}. Soit $\eta' = \eta \cup \{\sigma^3\}$. L'enrichissement η' est admissible et le morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta} : R_{\eta'} \to R_\eta$ est un isomorphisme.*

Proposition 49. *Soit η un enrichissement admissible contenant σ_{12} et σ^3. Soit $\eta' = \eta \cup \{\sigma^{123}\}$. L'enrichissement η' est admissible et le morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta} : R_{\eta'} \to R_\eta$ est un isomorphisme.*

Les deux propositions suivantes expliquent que certains enrichissements η' sont admissibles car on peut trouver un enrichissement admissible η tel que $R_{\eta'}$ s'identifie à une famille universelle au dessus de R_η.

Proposition 50. *Soit $\eta = \{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ un enrichissement admissible et*

$$\eta' = \eta \cup \{\sigma\}$$

avec

$$\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}.$$

Supposons qu'il existe des relations d'incidence liant σ aux θ_i parmi lesquelles $\sigma \subset \theta_i$ où θ_i est une structure de niveau un. Supposons en outre que la fibre du morphisme d'oubli

$$f_{\eta'}(F(X,3)) \to f_\eta(F(X,3))$$

au dessus d'un point général $(p_1, \dots, p_s)$ s'identifie au sous-schéma de H_σ formé par les p_σ tels que $p_\sigma \subset [p_i]$. Alors η' est admissible.

Démonstration: on peut définir trois fermés de

$$H_{\eta'} = H_{\theta_1} \times \dots \times H_{\theta_s} \times H_\sigma :$$

- le fermé $\overline{f_{\eta'}(F(X,3))}$,
- le fermé $R_{\eta'}$ formé par les

  $$(p_1, \dots, p_s, p_\sigma)$$

  satisfaisant certaines relations d'incidence notées $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_r$,
- le fermé Z qu'on définit de la façon suivante. C'est le sous-schéma contenant l'ensemble des points $(p_1, \dots, p_s, p_\sigma)$ soumis à des relations d'incidence. Ces relations d'incidence sont toutes les relations d'incidence précédentes qui ne mettent pas en jeu le point p_σ et la relation $[p_\sigma] \subset [p_i]$. C'est donc un sous-ensemble de relations de $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_r$.

Ces sous-schémas satisfont les inclusions

$$\overline{f_{\eta'}(F(X,3))} \subset R_{\eta'} \subset Z.$$

Le schéma Z se projette sur R_η par un morphisme p. Notons U l'ouvert dense $f_\eta(F(X,3))$ de R_η. Par hypothèse on a l'égalité

$$Z \cap p^{-1}(U) = f_{\eta'}(F(X,3)).$$

Comme Z est plat sur R_η, on obtient

$$Z = \overline{Z \cap p^{-1}(U)} = \overline{f_{\eta'}(F(X,3))}.$$

Par suite

$$R_{\eta'} = \overline{f_{\eta'}(F(X,3))},$$

et η' est admissible. ■

Proposition 51. *Soit $\eta = \{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ un enrichissement admissible et*

$$\eta' = \eta \cup \{\sigma\}$$

avec

$$\sigma \in \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}.$$

Supposons qu'il existe des relations d'incidence liant σ aux θ_i parmi lesquelles $\sigma \subset \theta_i$ où θ_i est une structure de niveau deux. Supposons en outre que la fibre du morphisme d'oubli

$$f_{\eta'}(F(X,3)) \to f_\eta(F(X,3))$$

au dessus d'un point général $(p_1, \dots, p_s)$ s'identifie au sous-schéma de H_σ formé par les p_σ tels que $p_\sigma \subset [p_i]$. Alors η' est admissible.

Démonstration: comme ci-dessus, $R_{\eta'}$ s'identifie à une variété universelle et peut être obtenue comme adhérence de $f_{\eta'}(F(X,3))$. ■

Proposition 52. *Soit η un enrichissement admissible de $\{1,2,3\}$, s_l l'unique structure de $\Sigma_3\underbrace{22\dots2}_{l-1\ fois}(3)$. Soit $l_0 \geq 1$ le plus grand entier tel que $s_{l_0} \in \eta$. Si $l_0 \geq 2$ alors $\eta' = \eta \cup \{s_{l_0+1}\}$ est admissible et le morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta}$ est un isomorphisme.*

Démonstration: pour $2 \leq i \leq l_0 - 1$, posons $\eta_i = \eta - \{s_{l_0}, s_{l_0-1}, \dots, s_{i+1}\}$, $V_l = p_{\eta,\eta_l}(R_\eta)$. Notons $V_{l_0} = R_\eta$, $V_{l_0+1} = R_{\eta'}$, p_{lk} le morphisme d'oubli de V_l dans V_k pour $2 \leq k \leq l \leq l_0 + 1$. Soit p_{l_0} un point de V_{l_0}, $p_s = p_{l_0,s}(p_{l_0})$. On suppose que $[p_{\eta,\eta_{123}}(p_{l_0})]$ est isomorphe à *Spec* $k[x,y]/(x^2, xy, y^2)$. On va montrer que $[p_{\eta,\{s_2\}}(p_{l_0})]$ est curviligne, puis que si $[p_{\eta,\{s_l\}}(p_{l_0})]$ est curviligne, alors la fibre de $p_{l+1,l}$ au dessus de p_l est schématiquement incluse dans un point et $[p_{\eta,\{s_{l+1}\}}(p_{l_0})]$ est aussi curviligne. Ces résultats impliqueront par récurrence que la fibre de p_{l_0+1,l_0} au dessus de p_{l_0} est incluse dans un point, ce qui suffit pour établir la proposition d'après 35. Tout d'abord, $p_{\eta,\{s_2\}}(p_{l_0})$ est inclus dans $p_{\eta,\eta_{123}}(p_{l_0})$ puisque $\{s_2\} \subset \sigma_{123}$. Puisque les doublets inclus dans $[p_{\eta,\{\eta_{123}\}}(p_{l_0})]$ forment un $\mathbb{P}^1$, cela implique que $[p_{\eta,\{s_2\}}(p_{l_0})]$ est curviligne. Un calcul en coordonnées locales montre que si Z est un sous-schéma ponctuel de degré trois curviligne d'une variété Y, alors le lieu schématique de $\mathbb{H}^2(Y)$ paramétrant les doublets d inclus dans Z est également un triplet ponctuel curviligne. Le lieu de $\mathbb{H}^{3,2}(Y)$ paramétrant les triplets de doublets inclus dans Z est alors réduit schématiquement à un point. En particulier, si $Z = [p_{\eta,\{s_l\}}(p_{l_0})]$ est curviligne, la fibre F de $p_{l+1,l}$ vue comme sous-schéma de $H_{s_{l+1}}$ est schématiquement formée de triplets de doublets inclus dans Z, donc est réduite à au plus un point. Pour $l < l_0$, F est non vide car elle contient $p_{\eta,\{s_{l+1}\}}(p_{l_0})$ Donc $[p_{\eta,\{s_{l+1}\}}(p_{l_0})]$ est curviligne par ce qui précède. ∎

Proposition 53. *Soit η un enrichissement admissible contenant deux structures $e \in \Sigma_{322\ldots2}$ et $g \in \Sigma_{122\ldots2}$ de même niveau l. Alors $[g] \subset [e]$. En outre, si f est défini par $[f] = [e] - [g]$, alors $\eta' = \eta \cup \{f\}$ est admissible et le morphisme d'oubli $p_{\eta',\eta}$ est un isomorphisme.*

Démonstration: l'inclusion $[g] \subset [e]$ se montre aisément par récurrence sur le niveau. Le même raisonnement que dans la proposition précédente montre que la fibre spéciale du morphisme d'oubli s'identifie à un lieu $L \subset \mathbb{H}^2(W)$ paramétrant des doublets d vérifiant $[d] \subset [t]$ et $I([d])I([p]) \subset I([t])$, où $[t] \subset W$ est un triplet curviligne ponctuel et où p est le support de $[t]$. Mais le résiduel d'un schéma dans un schéma curviligne étant bien défini, $[d]$ est nécessairement le résiduel de p dans $[t]$ et la fibre est schématiquement réduite à un point. ∎

4.2.5. *Classification en niveau au plus deux.* Dans cette section, on classifie tous les compactifications de niveau au plus deux. Pour cela, on commence par produire une liste d'enrichissements admissibles:

Proposition 54. *Les enrichissements*

$$\{\eta_{123},\ \eta_{1,123},\ \eta_{1,2,3,12,123},\ \eta_{3,12,123},$$
$$\eta^{1}_{123},\ \eta^{1}_{1,2,3,12,13,123},\ \eta^{123}_{123},$$
$$\eta^{123}_{1,123},\ \eta^{3,123}_{3,12,123},\ \eta^{3,123}_{1,2,3,12,123},\ \eta_{max}\}$$

sont admissibles

On montre ensuite qu'on a ainsi toutes les compactifications à isomorphisme de compactifications près:

Proposition 55. *Soit η un enrichissement admissible de niveau au plus deux. Il existe une permutation g de $\{1,2,3\}$, il existe un enrichissement θ parmi les onze enrichissements du corollaire précédent tel que $\theta \supset g.\eta$ et tel que le morphisme d'oubli $p_{\theta,g.\eta}$ soit un isomorphisme.*

Démonstration de la proposition 54: soient $\eta \subset \eta'$ deux enrichissements avec η admissible. Supposons que l'on puisse trouver une suite d'enrichissements

$$\eta_0 = \eta \subset \eta_1 \ldots \subset \eta_p = \eta'$$

telle que

$$\eta_{i+1} = \eta_i \cup \{\theta_{i+1}\},$$

où $\eta_i, \eta_{i+1}, \theta_{i+1}$ jouent le rôle de η, η', σ d'une des propositions 25,47,48, 49,50,51. Alors η' est admissible. On dira que η' domine η et que la suite $\theta_1, \ldots, \theta_p$ est une suite de domination.

- η_{123} est admissible car $R_{123} = \mathbb{H}^3$ étant irréductible, l'ouvert $f_{\sigma_{123}}(F(X,3))$ est dense;
- $\eta_{1,123}$ domine η_{123} (σ_1 est une suite de domination);
- $\eta_{1,2,3,12,123}$ domine $\eta_{12,123}$ (suite: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) qui est admissible par 36;
- $\eta_{3,12,123}$ domine $\eta_{12,123}$ (suite: σ_3) qui est admissible par 36;
- η^1_{123} est admissible par 37;
- $\eta^1_{1,2,3,12,13,123}$ domine η^1_{123} (suite: $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1$);

- η_{123}^{123} est admissible par 38;
- $\eta_{1,123}^{123}$ domine η_{123}^{123} (suite: σ_1);
- $\eta_{3,12,123}^{3,123}$ domine η_{123}^{123} (suite: $\sigma_{12}, \sigma_3, \sigma^3$);
- $\eta_{1,2,3,12,123}^{3,123}$ domine $\eta_{3,12,123}^{3,123}$ (suite: σ_1, σ_2);
- η_{max} domine η_{123}^{123} (suite: $\sigma_{12}, \sigma^3, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma^1, \sigma^2$).

■

Démonstration de la propostion 55: choisir un enrichissement de $\{1, 2, 3\}$ de niveau inférieur ou égal à deux, c'est choisir un sous-ensemble de

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^{123}, \sigma_{123}\}$$

contenant σ_{123}. Il y a donc 2^{10} tels enrichissements et il nous faut d'abord les classifier pour pouvoir montrer la proposition. Nous allons le faire suivant les doublets déterminés par l'enrichissement.

Commençons par la remarque suivante. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Le sous-ensemble $G = \cup_{f \in F} f$ de E est naturellement stratifié par la partition la plus grossière $P \subset \mathcal{P}(E)$ pour laquelle:

$$\forall f \in F,\ f = \cup_{p_i \in P}\ p_i.$$

Considérons maintenant $E = \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$ et

$$\mathcal{P}(E) = \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^{123}\}.$$

Un enrichissement η détermine un ensemble F_η de $\mathcal{P}(E)$:

$$F_\eta = \eta \cap \mathcal{P}(E)\ \subset \mathcal{P}(E),$$

donc un ensemble partitionné G_η inclus dans E. Sept cas sont possibles:

(1) $G_\eta = \emptyset$ (η ne détermine aucun doublet)
(2) G_η est un singleton (η détermine un doublet)
(3) G_η contient deux éléments et la partition est grossière (η détermine deux doublets indistinguables)
(4) G_η contient deux éléments et la partition divise G_η en deux singletons (η détermine deux doublets ordonnés)
(5) G_η contient trois éléments et la partition est grossière
(6) G_η contient trois éléments et la partition divise G_η en une paire et un singleton
(7) G_η contient trois éléments et la partition divise G_η en trois singletons

Disons que deux enrichissements $\eta \subset \eta'$ sont identifiables si le morphisme $p_{\eta',\eta}$ est un isomorphisme. Nous allons montrer en examinant les η cas par cas que, si η est admissible de niveau au plus deux, on peut ajouter des structures à η et obtenir un des enrichissements modèles η' de la proposition 54, identifiable à η. Dans ce qui suit, les couples d'enrichissements identifiables sont donnés par les propositions 25, 47, 48, 49.

Remarquons qu'un enrichissement η s'écrit

$$\eta = F_\eta \cup \{\sigma_{123}\} \cup E_\eta,$$

où E_η est un sous-ensemble de $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Cas un: F_η est vide donc, à permutation près des indices, η est l'un des enrichissements suivants:

$$\eta_{123}, \eta_{1,123}, \eta_{1,2,123}, \eta_{1,2,3,123}.$$

Les deux premiers enrichissements font partie des enrichissements modèles. Le troisième enrichissement n'est pas admissible par 41. Le dernier n'est pas non plus admissible par 44.

Cas deux: on a à l'action du groupe près $F_\eta = \{\sigma_{12}\}$ et on peut supposer que $\eta \supset \sigma_3$ car η et $\eta \cup \sigma_3$ sont identifiables. On a alors deux cas. Si η ne contient ni σ_1, ni σ_2, alors $\eta = \eta_{3,12,123}$ qui est un des enrichissements modèles. Si η contient σ_1 ou σ_2, par exemple σ_1 par symétrie. Alors η est identifiable à $\eta \cup \sigma_2 = \eta_{1,2,3,12,123}$ qui est l'un des enrichissements modèles.

Cas trois: on a à permutation près $F_\eta = \sigma^1$. Soit $\eta = \eta^1_{123}$ qui est l'un des enrichissements modèles. Soit η contient l'une des structures $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et dans ce cas, η n'est pas admissible. En effet, on peut supposer à symétrie près que $\eta \supset \sigma_1$ ou $\eta \supset \sigma_2$ et η n'est alors pas admissible par 42.

Cas quatre: à permutation près, les seules possibilités pour F_η sont

$$(F_\eta \supset \{\sigma_{12}, \sigma^1\} \quad \textit{ou} \quad F_\eta \supset \{\sigma_{12}, \sigma_{13}\})$$

et

$$F_\eta \subset \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma^1\}.$$

Mais quitte à remplacer η par un enrichissement qui lui est identifiable, on peut supposer dans le premier cas que $\eta \ni \sigma_{13}$ et dans le deuxième cas que $\eta \ni \sigma^1$. On est donc ramené à

$$F_\eta = \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma^1\}.$$

Dans ce cas, η est identifiable à $\eta^1_{1,2,3,12,13,123}$ qui est l'un des enrichissements modèles.

Cas cinq: on a $F_\eta = \{\sigma^{123}\}$ et, à symétrie près, η est l'un des enrichissements suivants:

$$\eta^{123}_{123}, \eta^{123}_{1,123}, \eta^{123}_{1,2,123}, \eta^{123}_{1,2,3,123}.$$

Les enrichissements η^{123}_{123} et $\eta^{123}_{1,123}$ font partie des enrichissements modèles tandis que $\eta^{123}_{1,2,123}$ et $\eta^{123}_{1,2,3,123}$ ne sont pas admissibles par 45.

Cas six: on peut supposer que le doublet déterminé par la partition est σ_{12} et que le doublet de doublets est σ^3. On a alors $F_\eta \subset \{\sigma_{12}, \sigma^3, \sigma^{123}\}$ et en outre l'une des trois situations suivantes:

- $\eta \supset \{\sigma_{12}, \sigma^3\}$,
- $\eta \supset \{\sigma_{12}, \sigma^{123}\}$,
- $\eta \supset \{\sigma^{123}, \sigma^3\}$.

Dans chacune des situations, on peut trouver un enrichissement η' identifiable à η avec $F_{\eta'} = \{\sigma_{12}, \sigma^{123}, \sigma^3\}$ et $\eta' \ni \sigma_3$.

Si η' ne contient ni σ_1, ni σ_2 alors η' est l'enrichissement modèle $\eta^{3,123}_{3,12,123}$. Dans le cas contraire, on peut supposer par symétrie que η' contient σ_1 et η' est alors identifiable à l'enrichissement modèle $\eta^{3,123}_{1,2,3,12,123}$.

Cas sept:

- Si η ne contient aucun doublet de doublets, ie. si $F_\eta \cap \{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\} = \emptyset$, alors η contient au moins deux doublets, par exemple σ_{12}, σ_{13}. Il est donc identifiable à un enrichissement contenant $\sigma^1(*)$. On peut donc supposer que η contient σ^1. Maintenant, soit $\eta \supset \sigma_{23}$, soit $\eta \supset \sigma^{123}$. Mais dans le deuxième cas, on peut faire une nouvelle identification pour avoir $\eta \supset \sigma_{23}$. Donc η est identifiable à un enrichissement contenant σ_{12}, σ_{13} et σ_{23}. Mais tout enrichissement admissible contenant les trois doublets est identifiable à η_{max}.
- Si η contient exactement un doublet de doublets, par exemple si $F_\eta = \{\sigma^1\}$. A symétrie près, on peut supposer que η contient σ_{12} et alors σ_{13} est un résiduel. On s'est donc ramené à la situation $(*)$ de ci-dessus.
- Si η contient au moins deux doublets de doublets, par exemple σ^1 et σ^2. Alors η contient au moins une structure σ parmi $\{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$ d'après 43. Par résiduel, on retrouve alors les deux autres doublets à partir de σ^1, σ^2 et σ^3. Donc on peut supposer que η contient les trois doublets. Il est alors identifiable à η_{max}.

■

4.2.6. *Classification en niveau supérieur à deux.* On a classifié dans la section précédente les compactifications de $F(X,3)$ et de ses quotients de niveau au plus deux. On montre dans cette section qu'on avait en fait déjà toutes les compactifications, indépendamment du niveau. L'énoncé précis suivant achève de démontrer le théorème 1.

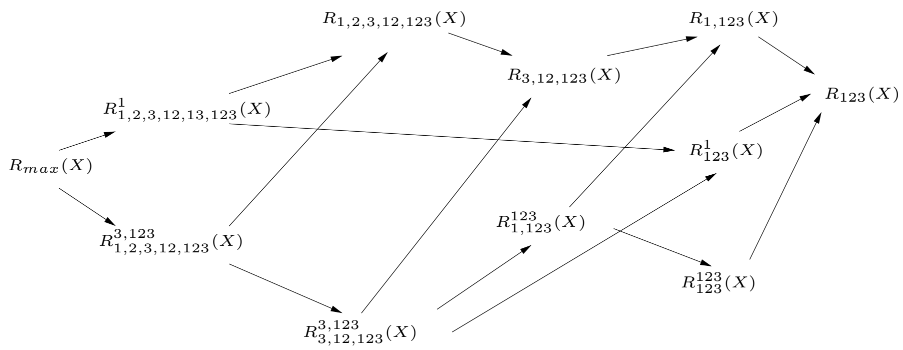
Proposition 56. *Pour tout enrichissement η admissible de niveau au moins trois , il existe deux enrichissements admissibles η_1 et η_2 où η_1 est de niveau au plus deux tels que $\eta \subset \eta_2$, $\eta_1 \subset \eta_2$, et tels que les morphismes d'oubli $p_{\eta_2,\eta}$ et p_{η_2,η_1} soient des isomorphismes de compactificaction.*

Démonstration: la démarche consiste à prendre un enrichissement η_2 "maximal" en un sens à préciser. On montre que ce η_2 contient nécéssairement certaines structures. Puis on supprime dans un ordre bien choisi les structures de η_2 pour obtenir η_1 de sorte que les morphismes d'oubli successifs soient des isomorphismes. Plus précisément, soit η_2 un enrichissement de même niveau l_η que η, contenant η, tel que $p_{\eta_2,\eta}$ soit un isomorphisme et qui soit maximal (au sens de l'inclusion) pour ces propriétés. Si l'ensemble des structures de niveau au plus deux de η_2 est (à permutation de l'ensemble $\{1,2,3\}$ près) inclus dans $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{123}, \sigma^1\}$, alors η n'est pas admissible d'après 46. Donc, d'après la démonstration de 55, on en déduit que η_2 détermine trois doublets et que $\sigma^{123} \in \eta_2$. Puisque $\{1,2,3\}$ est de cardinal trois, une récurrence évidente montre que $\Sigma_{p22\ldots2}(3)$ est de cardinal 3 si $p = 2$, 1 si $p = 3$ et 0 si $p > 3$. De plus, de la proposition 52, on déduit que η_2 contient l'élément e de $\Sigma_{322\ldots2}(3)$ de niveau l_η. Si η_2 contient un élément f de $\Sigma_{222\ldots2}(3)$ de niveau l_η, alors η_2 contient $g \in \Sigma_{122\ldots2}(3)$ où $[g] \cup [f] = [e]$ d'après 25. On en déduit par 48 que $p_{\eta,\eta-\{f\}}$ est un isomorphisme. En répétant l'opération avec tous les éléments f_i de $\Sigma_{222\ldots2}(3)$ de niveau l_η, on obtient un isomorphisme $p_{\eta,\eta-\{f_1,\ldots,f_s\}}$ où e est l'unique structure de niveau l_η de $\eta - \{f_1, \ldots, f_s\}$. L'application de 52 montre ensuite que que si on note $\eta_2' = \eta - \{f_1, \ldots, f_s, e\}$ l'ensemble des structures de niveau $l_\eta - 1$ de η_2, alors le morphisme d'oubli $p_{\eta_2,\eta_2'}$ est un isomorphisme. En répétant cette procédure, on montre que si η_2'' est l'ensemble des structures de niveau $l_\eta - 2$ de η_2, alors $p_{\eta,\eta_2''}$ est un isomorphisme. De proche en proche, on obtient finalement que si η_1 est l'ensemble des structures de niveau au plus deux de η_2, alors p_{η_2,η_1} est un isomorphisme. ■

5. Morphismes entre variétés de triplets

Il est parfois possible de transporter les informations d'une compactification à une autre grâce aux morphismes liant les différentes compactifications (par exemple, on montrera la singularité de $R^{123}_{1,123}$ en exhibant un morphisme birationnel et fini $C \to R^{123}_{1,123}$ dont la source C est une compactification lisse et dont certaines fibres ne sont pas schématiquement réduites à un point). Dès lors, il est naturel de résumer les liens unissant les variétés de triplets. C'est le but que se propose cette section, via le théorème suivant.

Théorème 57. *Chacune des compactifications est munie d'une stratification naturelle. Pour chacune des stratifications, il existe une strate générale, ouverte et dense, et une strate spéciale incluse dans l'adhérence de toutes les autres strates. Les morphismes d'oubli liant les compactifications sont donnés par les flèches du diagramme suivant et leurs compositions. De plus, l'image inverse d'une strate*



par l'un quelconque de ces morphismes est une réunion de strates.

Démonstration: si η et η' sont deux enrichissements tels qu'il existe $g \in S_3$ avec $g.\eta \subset \eta'$, il existe un morphisme d'oubli $R_{\eta'} \to R_{g.\eta} = R_\eta$. Tous les morphismes du théorème 57 sont obtenus ainsi.

Définissons maintenant la stratification sur R_η. Notons

- $\eta(p_l, \dots, p_1) = \eta \cap \Sigma_{p_l,\dots,p_1}(3)$,
- $\mathcal{P}_\eta(p_l, \dots, p_1)$ l'ensemble des parties de $\eta(p_l, \dots, p_1)$,
- $E_{3,\eta} = \{\sigma \in \eta \ t.q. \exists l \geq 0, \sigma \in \Sigma_{3\underbrace{22\dots2}_{l\ fois}}(3)\}$,
- $E_{2,\eta} = \{\sigma \in \eta \ t.q. \exists l > 0, \sigma \in \Sigma_{\underbrace{22\dots2}_{l\ fois}}(3)$.

Les strates de la stratification sur R_η sont paramétrées par l'ensemble

$$Conf(\eta) = \{3, 2, c, g\}^{E_{3,\eta}} \times \{2, 1\}^{E_{2,\eta}} \times \Pi_{p_l,\dots,p_1}\mathcal{P}_\eta(p_l, \dots, p_1),$$

où $\{3, 2, c, g\}^{E_{3,\eta}}$ représente les fonctions de $E_{3,\eta}$ dans $\{3, 2, c, g\}$. Si

$$c = (f, g, \Pi P(p_l, \dots, p_1)) \in Conf(\eta),$$

et si $\eta = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$, la strate de R_η correspondant à c est $S_c = \{(p_1, \dots, p_r)$ t.q.:

- $\forall \sigma_i \in E_{3,\eta},\ [p_i]$ est constitué de trois points distincts si $f(\sigma_i) = 3$, de deux points distincts si $f(\sigma_i) = 2$, est un schéma ponctuel curviligne si $f(\sigma_i) = c$, un deux gros point si $f(\sigma_i) = g$,
- $\forall \sigma_i \in E_{2,\eta},\ [p_i]$ est constitué de deux points distincts si $g(\sigma_i) = 2$, est un schéma ponctuel si $g(\sigma_i) = 1$,
- $\forall \{\sigma_i, \sigma_j\} \subset \eta(p_l, \dots, p_1),\ p_i = p_j$ ssi $\{\sigma_i, \sigma_j\} \subset P(p_l, \dots, p_1)\}$.

Si $\eta \subset \eta'$, l'image inverse par un morphisme d'oubli d'une strate de R_η est une réunion de strates de $R_{\eta'}$. En effet, on a par restriction une application

$$\{3, 2, c, g\}^{E_{3,\eta'}} \times \{2, 1\}^{E_{2,\eta'}} \to \{3, 2, c, g\}^{E_{3,\eta}} \times \{2, 1\}^{E_{3,\eta}}.$$

L'intersection avec η donne une application

$$\mathcal{P}_{\eta'}(p_l, \dots, p_1) \to \mathcal{P}_\eta(p_l, \dots, p_1).$$

On peut utiliser ces applications pour définir une application produit q de $Conf(\eta')$ dans $Conf(\eta)$. L'égalité $p^{-1}_{\eta',\eta}(S_c) = \cup_{q(c')=c} S_{c'}$ montre que l'image inverse d'une strate est bien une réunion de strates.

L'une des strates de R_η est $f_\eta(F(X, 3))$ (correspondant à f constante égale à 3, à g constante égale à 2, et aux parties $P(p_l, \dots, p_1)$ vides). C'est une strate ouverte de façon évidente et dense par définition d'un enrichissement admissible.

Il nous reste à mettre en évidence une strate fermée incluse dans l'adhérence de toutes les autres strates. Pour la variété $R_{1,2,3,12,13,12,123}$, la strate correspondant à f constante égale à g, à g constante égale à 1, et aux parties $P(p_l, \dots, p_1) = \eta(p_l, \dots, p_1)$ est formée des points de la forme $q(p, d, t)$ au sens de la proposition 31. Il résulte de [13] que cette strate est fermée incluse dans l'adhérence de toutes les autres strates. L'image inverse S de cette strate spéciale par l'isomorphisme $R_{1,2,3,12,13,12,123} \simeq R_{max}$ est encore fermée et incluse dans l'adhérence de toutes les autres strates. Si $\eta \subset \eta_{max}$ est un enrichissement quelconque, $p_{\eta_{max},\eta}(S)$ est la strate de R_η formée des points de la forme $q(p, d, t)$. Elle est fermée comme image d'une variété projective, incluse dans l'adhérence de toutes les autres strates par continuité que $p_{\eta_{max},\eta}(S)$. ∎

Remarque 58. *On peut en fait montrer que l'adhérence d'une strate de la stratification précédente est une réunion de strates.*

6. Etude des quotients par les actions naturelles

On a vu à la section 3 que chaque schéma R_η est naturellement muni d'une action de groupe. Dans cette section nous déterminons les quotients des schémas R_η par ces actions quand η est l'un des enrichissements du théorème de classification, i.e. nous montrons les théorèmes 3 et 4 de l'introduction. Avec les notations développées dans le corps du texte, le théorème 3 s'énonce plus précisément de la façon suivante.

Théorème 59. *supposons le corps k de caractéristique différente de deux et trois. Les groupes agissant sur*

$$R_{123},\ R_{1,123},\ R_{1,2,3,12,123},\ R_{3,12,123}$$

$$R^1_{123},\ R^1_{1,2,3,12,13,123},\ R^{123}_{123},\ R^{123}_{1,123}$$

$$R^{3,123}_{3,12,123},\ R^{3,123}_{1,2,3,12,123},\ R_{max}$$

sont les groupes symétriques

$$S_1,\ S_1,\ S_2,\ S_1$$

$$S_1,\ S_2,\ S_1,\ S_1$$

$$S_1,\ S_2\ S_3$$

et les quotients respectifs sont

$$R_{123},\ R_{1,123},\ R_{3,12,123},\ R_{3,12,123}$$

$$R^1_{123},\ R^1_{123},\ R^{123}_{123},\ R^{123}_{1,123}$$

$$R^{3,123}_{3,12,123},\ R^{3,123}_{3,12,123},\ R^{123}_{123}.$$

Le quotient partiel de R_{max} par S_2 est $R^{3,123}_{3,12,123}$.

Démonstration. l'idée pour déterminer les quotients R_η/G et les morphismes quotients consiste à trouver pour chaque η un enrichissement $\eta' \subset \eta$ tel que $R_{\eta'} \simeq R_\eta$ et tel que l'action du groupe sur $R_{\eta'}$ soit plus facilement maîtrisable. Toutes les démonstrations étant identiques, nous ne traiterons qu'un seul cas. Montrons par exemple $R^1_{1,2,3,12,13,123}/S_2 = R^1_{123}$.

Nous avons vu lors de la classification que $R^1_{1,2,3,12,13,123}$ était isomorphe à

$$R^1_{12,13,123} \subset H_{12} \times H_{13} \times H^1 \times H_{123}$$

et l'action de S_2 sur cette variété est:

$$\varepsilon.(p_{12}, p_{13}, p^1, p_{123}) = (p_{13}, p_{12}, p^1, p_{123}),$$

où ε est l'élément de S_2 différent de l'identité.

Quand la caractéristique du corps est première au cardinal d'un groupe G, quand ce groupe G agit sur un schéma projectif Y en laissant un sous-schéma Z invariant, le schéma quotient Z/G est naturellement un sous-schéma de Y/G. Dans notre cas, cela veut dire qu'on a:

$$\begin{array}{rcl} R^1_{12,13,123}/S_2 \hookrightarrow (H_{12} \times H_{13} \times & H^1 & \times H_{123})/S_2 \\ & = & \\ (H_{12} \times H_{13})/S_2 \times & H^1 & \times H_{123} \end{array}$$

car S_2 n'agit pas sur les deux derniers facteurs.

Il existe un morphisme naturel

$$\varphi : H^1 = \mathbb{H}^{2,2} \to (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)/S_2 = (H_{12} \times H_{13})/S_2$$

définissant une sous-variété

$$V \hookrightarrow (H_{12} \times H_{13})/S_2 \times H^1 \times H_{123},$$

formée par les (p, q, r) tels que $p = \varphi(q)$. La projection

$$V \to H^1 \times H_{123}$$

est un isomorphisme. Le quotient $R^1_{12,13,123}/S_2$ est une sous-variété de V comme on le vérifie en un point général. On peut donc le projeter par un isomorphisme sur $H^1 \times H_{123}$. En résumé le morphisme quotient

$$R^1_{1,2,3,12,13,123} \to H^1 \times H_{123}$$

s'écrit comme composée:

$$\begin{array}{rcl} R^1_{1,2,3,12,13,123} \to R^1_{12,13,123} \subset H_{12} \times H_{13} & \times & H^1 \times H_{123} \\ & \downarrow & \\ (H_{12} \times H_{13})/S_2 & \times & H^1 \times H_{123} \\ & \downarrow & \\ H^1 & \times & H_{123} \end{array}$$

C'est donc simplement un morphisme d'oubli et l'image de $R^1_{1,2,3,12,13,123}$ par ce morphisme d'oubli est R^1_{123}. ∎

7. Lissité

Le but de cette section est de montrer que parmi les onze variétés de triplets construites, sept sont lisses et quatre sont singulières.

Théorème 60. *Pour X lisse de dimension au moins deux, les variétés* $R^{3,123}_{1,2,3,12,123}$*,* $R^{123}_{1,123}$*,* $R_{1,123}$*,* $R_{1,2,3,12,123}$ *sont singulières. Si X est lisse, les sept autres variétés de triplets sont lisses.*

Démonstration: nous allons utiliser le diagramme du théorème 57 qui résume les différentes variétés existantes et leurs relations.

Commençons par traiter le cas des variétés lisses. La variété de Le Barz R_{max} est lisse [13], de même que $R_{123} = \mathbb{H}^3$. Les variétés $R_{3,12,123}$, R^1_{123} et R^{123}_{123} sont lisses d'après les propositions 36, 37 et 38. D'après l'étude des quotients, la variété $R^{3,123}_{3,12,123}$ est le quotient de la variété de Le Barz $R_{1,2,3,12,13,23,123}$ par l'action du groupe symétrique S_2 définie par

$$\epsilon.(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123}) = (p_2, p_1, p_3, p_{12}, p_{23}, p_{13}, p_{123}).$$

Le lieu fixe de cette action est le diviseur E_{12} où les doublets p_{13} et p_{23} coïncident. Ce diviseur étant lisse par [13], le quotient est lisse. La dernière variété dont on veut montrer la lissité est $R^1_{1,2,3,12,13,123}$, ce qui est l'objet de la proposition 61 qui suit.

Montrons maintenant la singularité des quatre autres variétés de triplets. La singularité de $R_{1,123}$ a été établie dans [1]. D'après la classification, $R_{1,2,3,12,123}$ est isomorphe à $R_{1,12,123}$ et la singularité de cette dernière variété a également été établie dans [1].

Pour établir la singularité de $R^{123}_{1,123} \simeq R^{123}_{3,123}$, il nous suffit de montrer que le morphisme $R^{3,123}_{3,12,123} \to R^{123}_{3,123}$ admet des fibres non schématiquement réduites à un point. En effet, ce morphisme est birationnel et fini, de source lisse, et par [5], corollaire 18.17, toutes les fibres d'un morphisme fini d'une variété localement de Cohen-Macaulay dans une variété régulière ont même longueur. Considérons alors un sous-schéma $[p_{123}]$, de support p_3, isomorphe à $Spec\ k[x,y]/(x^2, xy, y^2)$. Les doublets inclus dans $[p_{123}]$ forment un $\mathbb{P}^1$. Soit p_{12} un point de ce $\mathbb{P}^1$ et $[p^{123}]$ le sous-schéma ponctuel de $\mathbb{P}^1$ de longueur trois supporté par p_{12}. J'affirme que la fibre F au dessus de $\hat{t} = (p_3, p_{123}, p^{123}) \in R^{123}_{3,123}$ est de degré trois. On remarque tout d'abord que cette fibre s'identifie à un sous-schéma de $\mathbb{H}^{2,2}$. En effet, la fibre est à priori un sous-schéma de $\mathbb{H}^{2,2} \times \mathbb{H}^2$. Mais la projection de F sur la première composante $\mathbb{H}^{2,2}$ est un isomorphisme car la deuxième composante est le résiduel de la première composante dans $[p^{123}]$. Il nous reste à montrer que F est de longueur trois.

Puisque F est le lieu schématique formé par les doublets de doublets inclus dans $[p^{123}]$, $F = \mathbb{H}^2(\mathbb{H}^2([p^{123}]))$. Il nous suffit donc de montrer que si $C = Spec\ k[t]/t^3$ est curviligne, alors $\mathbb{H}^2(C)$ est encore un schéma curviligne de degré trois et d'appliquer cette proposition à $C = [p^{123}]$. Or

$$\mathbb{H}^2(C) \hookrightarrow \mathbb{H}^2(Spec\ k[t])$$

s'identifie au lieu des sous-schémas de $Spec\ k[t]$ inclus dans C. En outre, un sous-schéma d'équation $t^2 + at + b$ est inclus dans C ssi $b = a^2$ et $a^3 = 0$. D'où

$$\mathbb{H}^2(C) \simeq Spec\ k[a,b]/(a^2 - b, a^3) \simeq C.$$

De même, la fibre du morphisme $R_{max} \to R^{3,123}_{1,2,3,12,123}$ au dessus d'un point général est schématiquement réduite à un point, tandis qu'au dessus du point spécial $(p_3, p_3, p_3, p_{12}, p_{123}, p^3, p^{123})$, elle s'identifie au lieu formé par les doublets p_{23} inclus dans p^3, où elle est donc de degré deux. Puisque R_{max} est lisse, cette variation de la longueur des fibres assure la singularité de $R^{3,123}_{1,2,3,12,123}$. ∎

Proposition 61. *Pour X lisse, $R^1_{1,2,3,12,13,123}(X)$ est lisse.*

Démonstration: nous allons montrer que la variété $R_{1,2,3,12,13,123}$, qui est isomorphe à $R^1_{1,2,3,12,13,123}$ d'après le théorème de classification, est lisse. Il suffit de vérifier la lissité en un point $\hat{t} = (p_1, p_1, p_1, p_{12}, p_{12}, p_{123})$ pour lequel $[p_{123}]$ est un schéma ponctuel non curviligne d'après la proposition 34. Les techniques employées dans la section 4.2.2 se révèleraient trop longues ici et nous emploierons plutôt un calcul d'espace tangent. Nous ferons le calcul pour X de dimension au moins deux, les cas de dimension inférieure étant faciles et laissés au lecteur.

Montrons que l'espace tangent T en $\hat{t}$ est de la dimension attendue $3.dim(X)$. Puisque la lissité se vérifie par un calcul local, on peut supposer que X est un espace projectif. Remarquons que le triplet complet $\hat{t}$ définit un plan P: l'unique plan contenant $[p_{123}]$. Un point $\hat{t}_0$ au voisinage de $\hat{t}$ admet un triplet $(p_{123})_0$ qui n'est pas inclus dans une droite, et définit donc également un plan. En particulier, toute déformation infinitésimale de $\hat{t}$ induit une déformation de P. En termes algébriques, on a une application linéaire de T dans l'espace tangent T'' en P à la grassmannienne contenant P, qui est clairement surjectif. Le noyau de cette application est l'espace des déformations de $\hat{t}$ incluses dans $\mathbb{P}^2$, c'est à dire l'espace tangent T' à $R_{1,2,3,12,13,123}(\mathbb{P}^2)$ en $\hat{t}$. La grassmannienne étant de dimension $3.(dim(X) - 2)$, un calcul de dimensions sur la suite exacte

$$0 \to T' \to T \to T'' \to 0$$

montre que T a la dimension attendue ssi T' est de dimension six, c'est à dire si $R_{1,2,3,12,13,123}(\mathbb{P}^2)$ est lisse. On s'est donc ramené au cas où X est de dimension deux.

On peut alors supposer que les trois points p_i ont pour équation $I_i = (x, y)$, les deux doublets ont pour équation $I_{ij} = (x^2, y)$ et le triplet a pour équation $I_t = (x^2, xy, y^2)$. L'espace tangent au schéma de Hilbert en un ideal I est naturellement isomorphe à $Hom(I, R/I)$. Rappelons comment décrire l'espace tangent à un lieu d'incidence dans un produit de schémas de Hilbert [1]. Si J est un idéal pour lequel on a une inclusion $i : I \hookrightarrow J$, notons $p : R/I \to R/J$ la projection naturelle.

L'espace tangent en (I, J) au lieu d'incidence formé par les $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ pour lesquels $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ est le noyau de l'application

$$\begin{array}{rcl} Hom(I, R/I) \oplus Hom(J, R/J) & \rightarrow & Hom(I, R/J) \\ (f, g) & \mapsto & p \circ f - g \circ i. \end{array}$$

De même, si I, J, K sont trois idéaux vérifiant $JK \subset I$, l'espace tangent en (I, J, K) au lieu d'incidence formé par les $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ vérifiant $\mathcal{J}\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ est défini dans le produit des espaces tangents comme étant le noyau d'un morphisme. Plus précisément, si

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in Hom(I, R/I) \oplus Hom(J, R/J) \oplus Hom(K, R/K),$$

notons $\widetilde{\beta\gamma}$ le morphisme composé:

$$J \otimes K \rightarrow R/JK \rightarrow R/I$$

où la première flèche envoie un élément $j \otimes k$ sur $j\gamma(k) + \beta(j)k$ et la deuxième flèche est la projection. Notons $\tilde{\alpha}$ la composition:

$$J \otimes K \rightarrow JK \rightarrow I \stackrel{\alpha}{\rightarrow} R/I$$

où les deux premieres flèches sont le produit et l'injection. L'espace tangent au lieu d'incidence est le noyau du morphisme $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \widetilde{\beta\gamma} - \tilde{\alpha}$.

Remarquons que chaque espace tangent $Hom(I, R/I)$ s'identifie à un sous-espace de matrices. En effet, choisissons des générateurs $f_1, \ldots, f_n$ du R-module I, et V l'espace vectoriel engendré par ces générateurs. Le morphisme de restriction

$$\begin{array}{rcl} Hom_{R-modules}(I, R/I) & \rightarrow & Hom_{espaces\ vectoriels}(V, R/I) \\ f & \mapsto & f_{|V} \end{array}$$

est injectif par construction et identifie $Hom(I, R/I)$ à un espace de matrices via un choix de bases. De même, un élément d'un produit d'espaces tangents peut être caractérisé par un ensemble de matrices. En termes de cette identification, être dans le noyau des applications linéaires se traduit par des équations linéaires sur les coefficients des différentes matrices. En particulier, l'espace tangent en $\hat{t}$ à $R_{1,2,3,12,13,123}(\mathbb{P}^2) \subset (\mathbb{P}^2)^3 \times \mathbb{H}^2(\mathbb{P}^2)^2 \times \mathbb{H}^3(\mathbb{P}^2)$ peut être décrit dans un produit d'espaces de matrices par équations linéaires, au moyen d'un calcul pénible mais tout à fait élémentaire et explicite. On montre ainsi que l'espace tangent en $\hat{t}$ à $R_{1,2,3,12,13,123}(\mathbb{P}^2)$ est de dimension six et plus précisément que l'espace six-dimensionnel de déformations infinitésimales de $\hat{t}$ est donné par la famille d'idéaux:

- $I_{123} = (x^2 + (o + d)\epsilon x + b\epsilon y, xy + c\epsilon x + d\epsilon y, y^2 + 2c\epsilon y)$,
- $I_{12} = (x^2 + (o + d)\epsilon x, y + i\epsilon x + c\epsilon)$,
- $I_{13} = (x^2 + (o + d)\epsilon x, y + m\epsilon x + c\epsilon)$,
- $I_1 = (x + o\epsilon, y + c\epsilon)$,
- $I_2 = (x + d\epsilon, y + c\epsilon)$,
- $I_3 = (x + d\epsilon, y + c\epsilon)$,

où les coefficients o, b, c, d, i, m peuvent varier indépendemment. ■

8. Comparaison aux constructions classiques

Nous allons dans cette section montrer que nos compactifications englobent les compactifications de $F(X, n)$ de Schubert-Semple-Le Barz,de Kleiman pour $n \leq 3$, et de Cheah, ainsi que leurs quotients. Pour cela nous nous contentons de rassembler ici le travail déja effectué par Le Barz et par Keel. L'ensemble des résultats de cette section est résumé par le théorème:

Théorème 62. *Les variétés*

$$R_{max},\ R^1_{1,2,3,12,13,123},\ R_{1,2,3,12,123},\ R^{1,123}_{1,23,123},\ R^{123}_{123},\ R^1_{123}$$

sont respectivement les variétés de LeBarz $\widehat{H_3}$, de Kleiman K_3, de Cheah, les quotients $\widehat{H_3}/S_2$, $\widehat{H_3}/S_3$, K_3/S_2. En outre, R_{max} s'identifie à la variété de Schubert Semple dans le cas où $X = \mathbb{P}^2$.

On peut montrer en revanche ([7]) que la compactification $X[3]$ de Fulton-MacPherson n'est isomorphe à aucune de nos variétés de triplets.

Comme il est évident d'après les définitions que notre construction englobe les schémas étudiés par Cheah ([1]), nous n'aborderons ici que les deux autres constructions.

8.1. **La variété de Schubert-Semple.** Cette compactification W_6^* de $F(\mathbb{P}^2, 3)$ est définie comme la sous-variété de

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{G}(2, \mathbb{P}^5)$$

formée par les $(p_1, p_2, p_3, D_{12}, D_{13}, D_{23}, \Sigma)$ tels que:

- la droite D_{ij} contient les points p_i et p_j,
- Σ est un réseau de coniques de $\mathbb{P}^2$ contenant les coniques d'idéal $I(D_{ij}).I(D_{jk})$.

Schubert voulait à des fins énumératives une variété universelle lisse paramétrant les triangles du plan, éventuellement dégénérés.Mais une construction de cette variété dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{P}^{2\,*} \times \mathbb{P}^{2\,*}$ donnerait une variété singulière. L'introduction du réseau de coniques est un moyen géométrique de désingulariser cette variété.

Comme l'a montre Le Barz, $R_{1,2,3,12,13,23,123}(X)$ coïncide avec la construction de Schubert-Semple dans le cas où $X = \mathbb{P}^2$. Le point

$$(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{123}) \in X \times X \times X \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^3$$

correspond au point de la construction de Schubert-Semple dont les droites D_{ij} sont les droites qui contiennent le schéma $[p_{ij}]$, et dont le réseau de coniques est formé par les coniques contenant $[p_{123}]$.

D'après l'étude des passages au quotient, le quotient de $R_{1,2,3,12,13,23,123} \simeq R_{max}$ par S_3 est R^{123}_{123} et le quotient par S_2 est $R^{3,123}_{3,12,123}$.

8.2. **Les variétés de Kleiman.** Ces compactifications X_r de $F(X, r)$ ont été introduites dans [12] et elles ont été abondamment étudiées depuis ([14],[4],[18],[9] par exemple).

Leur définition est donnée par récurrence sur r. On pose $X_0 = Spec\, k$, $X_1 = X$ et

$$X_{r+1} = Bl_\Delta\ (X_r \times_{X_{r-1}} X_r),$$

où Δ est la diagonale. Géométriquement, un point de X_r correspond à un r-uplet ordonné $(p_1, \ldots, p_r)$. Chaque p_i est soit un point de X, soit un point infiniment voisin (ie. un point situé sur une surface $\tilde{X}$ obtenue par éclatement successifs de points).

Pour $r = 2$, les variétés $X_2 = Bl_\Delta(X \times X)$ et $R_{1,12}$ sont isomorphes.

Keel a montré l'isomorphisme $R_{1,2,3,12,13,123} \simeq X_3$ [11]. D'après la classification et l'étude des quotients, $X_3/S_2 \simeq R^1_{1,2,3,12,13,123}/S_2 = R^1_{123}$.

References

[1] Jan Cheah. Cellular decompositions for nested Hilbert schemes of points. *Pacific J. Math.*, 183(1):39–90, 1998.

[2] A Collino and W Fulton. Intersection rings of spaces of triangles. *Mém. Soc. Math. France*, (38):75–117, 1989. Colloque en l'honneur de Pierre Samuel.

[3] Danielle Dias and Patrick Le Barz. *Configuration spaces over Hilbert schemes and applications*, volume 1647 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[4] Igor Dolgachev and David Ortland. Point sets in projective spaces and theta functions. *Astérisque*, (165):210 pp. (1989), 1988.

[5] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[6] L Evain. Collisions de gros points sur une surface. *En préparation.*

[7] L Evain. *Collisions de trois gros points sur une surface algébrique.* PhD thesis, PhD., Nice, 1997.

[8] William Fulton and Robert MacPherson. A compactification of configuration spaces. *Ann. of Math. (2)*, 139(1):183–225, 1994.

[9] Brian Harbourne. Iterated blow-ups and moduli for rational surfaces. In *Algebraic geometry (Sundance, UT, 1986)*, volume 1311 of *Lecture Notes in Math.*, pages 101–117. Springer, Berlin, 1988.

[10] Tyrell J.E. *Mathematika*, 1959.

[11] Sean Keel. Functorial construction of Le Barz's triangle space with applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 335(1):213–229, 1993.

[12] Steven L. Kleiman. Multiple-point formulas. I. Iteration. *Acta Math.*, 147(1-2):13–49, 1981.

[13] Patrick Le Barz. La variété des triplets complets. *Duke Math. J.*, 57(3):925–946, 1988.

[14] Ziv Ran. Curvilinear enumerative geometry. *Acta Math.*, 155(1-2):81–101, 1985.

[15] Joel Roberts and Robert Speiser. Enumerative geometry of triangles. I. *Comm. Algebra*, 12(9-10):1213–1255, 1984.

[16] H. Schubert. Anzahlgeometrische behandlung des dreieckes. *Math. Ann.*, 1880.

[17] J. G. Semple. The triangle as a geometric variable. *Mathematika*, 1:80–88, 1954.

[18] Charles Walter. Collisions of three fat points on an algebraic surface. *Prépublication 412, Univ. Nice*, pages 1–7, 1995.

Université d'Angers Faculté des sciences Département de maths. 2, Boulevard Lavoisier 49045 Angers Cedex 01 FRANCE

E-mail address: laurent.evain@univ-angers.fr