CHAPITRE 1

Introduction

Un système hamiltonien est un système différentiel de la forme:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}}$$

avec $q = q(t)$, $p = p(t)$ et $H = H(q, p, t)$.

Les systèmes hamiltoniens permettent d'exprimer l'équation du mouvement dans n'importe quel système mécanique. Par exemple considérons une particule dans l'espace de coordonnées (q_1, q_2, q_3) soumise à une force potentielle

$$F = -\nabla U = (-\frac{\partial U}{\partial q_1}, -\frac{\partial U}{\partial q_2}, -\frac{\partial U}{\partial q_3})$$

U est l'énergie potentielle du système. Soit $T = m\frac{\dot{q}^2}{2}$ son énergie cinétique. Le lagrangien du système est par définition:

$$\mathcal{L} = T - U$$

D'après le principe fondamental de la dynamique on a:

$$m\ddot{q} = -\nabla U$$

Plaçons nous dans l'espace de dimension 6 de coordonnées (q, p) tel que le long des trajectoires de la particule $m\dot{q} = p$ (cet espace est appelé l'espace des phases). Dans ces coordonnées $\mathcal{L}$ s'écrit:

$$\mathcal{L}(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} - U(q)$$

Donc:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{cases}$$

Donc le long des trajectoires du mouvement comme

$$\begin{cases} p = m\dot{q} \\ -\frac{\partial U}{\partial q} = m\ddot{q} \end{cases}$$

il vient:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}}$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange du système.

Introduisons l'opérateur:

$$H = \frac{p^2}{m} - \mathcal{L}$$

H vérifie:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{2p}{m} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{cases}$$

donc le long des trajectoires:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

En fait on a:

$$m\ddot{q} = \nabla U \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

L'équation du mouvement et le système hamiltonien du mouvement sont deux choses équivalentes.

Définissons le crochet (dit crochet de Poisson) sur l'ensemble des fonctions lisses sur l'espace des phases:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Considérons une fonction lisse f sur l'espace des phases. Le long des trajectoires on a:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \\ &= \{f, H\} \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\dot{f} = 0 \text{ le long des trajectoire} \Leftrightarrow \{f, H\} = 0$$

En particulier comme $\{H, H\} = 0$ H est une loi de conservation du mouvement (encore appelée intégrale première).

Le but de ce cours est d'étudier les systèmes de Calgero-Moser: n points (de masse 1) mobiles sur une droite ne se rencontrant jamais: $q_i \neq q_j$ si $i \neq j$:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2} + U(q_1, \dots, q_n)$$

0.0.1. THEOREME. *Il y a 4 choix possibles de U pour que le système*

$$\dot{f} = \{f, H\}$$

soit intégrable:

1. *système rationnel:*

$$U = \sum_{i \neq j} \frac{g^2}{(q_i - q_j)^2}$$

2. *système trigonométrique (compact):*

$$U = \sum_{i \neq j} \frac{g^2}{sin^2(\frac{q_i - q_j}{2})}$$

3. *système hyperbolique (ou trigonométrique non compact):*

$$U = \sum_{i \neq j} \frac{g^2}{sh^2(\frac{q_i - q_j}{2})}$$

4. *système elliptique:*

$$U = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}(q_i - q_j)$$

où $\mathcal{P}$ *est la fonction de Weierstrass.*

CHAPITRE 2

Groupes de Lie

0.0.2. DEFINITION. *Un groupe de Lie réel ou complexe est une variété lisse réelle ou complexe G munie d'une structure de groupe lisse i.e. les applications*

$$\begin{cases} G \times G \to G & (g,h) \mapsto gh \\ G \to G & g \mapsto g^{-1} \end{cases}$$

sont lisses.

1. Exemples

1.1. Sous groupes matriciels.

L'ensemble $M_n(K)$ des matrices carrées de rang n à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{K}^{n^2}$ et possède donc une structure de variété pour laquelle l'addition et la multiplication sont lisses.
L'application déterminant $det : M_n(K) \to K$ est une application lisse car polynômiale donc

$$GL(n,K) = \{A \in M_n(K) : \ det(A) \neq 0\}$$

est un ouvert de $M_n(K)$ donc possède une structure de variété. C'est de plus un groupe multiplicatif. La multiplication sur $GL(n,K)$ est bien sûr lisse. De plus comme pour tout $A \in GL(n,K)$

$$A^{-1} = \frac{comm(A)^t}{det(A)}$$

le passage à l'inverse est lisse: $GL(n,K)$ est un groupe de Lie non abélien. Etudions plus précisément la différentiabilité de l'application déterminant:

1. Soit I la matrice identité de $M_n(K)$. Soit la norme
$$\|M\| = max\{|A_{ij}|\}$$
A partir de la formule
$$det(I+H) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^n} \varepsilon(\sigma)(I+H)_{1\sigma(1)} \dots (I+H)_{n\sigma(n)}$$
il est facile de voir que
$$det(I+H) = 1 + tr(H) + o(\|H\|)$$
donc:
$$\boxed{d_I(det)(H) = tr(H)}$$
2. Soit maintenant A quelconque dans $GL(n,K)$:
$$\begin{aligned} det(A+H) &= det(A(I + A^{-1}H)) \\ &= det(A)det(I + A^{-1}H) \\ &= det(A)(1 + tr(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H)) \end{aligned}$$
et donc:
$$\boxed{d_A(det)(H) = det(A)tr(A^{-1}H)}$$

Ainsi l'application déterminant restreinte à $GL(n,K)$ est une submersion. Donc:

$$SL(n,K) = \{A \in M_n(K) : \ det(A) = 1\}$$

est une sous variété de $GL(n,K)$ mais c'est aussi un sous groupe. Donc $SL(n,K)$ est un groupe de Lie.

1.2. La sphère S^n.

1. Le cercle S^1 est muni naturellement d'une structure de groupe de Lie:
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \ \theta \in [0, 2\pi[\}$$
en posant:
$$\begin{cases} e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta} \end{cases}$$
2. $S^3 = \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x^2+y^2+s^2+t^2 = 1\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^4$. Autrement dit c'est une sous variété réelle de C^2:
$$S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ z\bar{z} + w\bar{w} = 1\}$$
S^3 peut être aussi considérée comme une sous variété réelle de $\mathbb{C}^4 = M_2(\mathbb{C})$:
$$S^3 = \{\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : \ z\bar{z} + w\bar{w}\}$$
Or:
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\bar{w'} & \bar{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zz' - w\bar{w'} & zw' + w\bar{z'} \\ -\bar{w}z' - \bar{w'}\bar{z'} & -\bar{w}w' + \bar{z}z' \end{pmatrix} \in S^3 \\ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix})^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \in S^3 \end{cases}$$
Ainsi S^3 est un groupe:
$$\begin{cases} (z,w).(z',w') = (zz' - w\bar{w'}, zw' + w\bar{z'}) \\ (z,w)^{-1} = (\bar{z}, -w) \end{cases}$$
Ces applications sont clairement lisses sur S^3 donc S^3 est un groupe de Lie réel, le plus souvent noté $SU(2)$.
3. Un procédé analogue permet de munir S^7 d'une structure de groupe de Lie. Soit $\mathbb{H}$ l'algèbre des quatenions: $\mathbb{H}$ est le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ muni de la structure d'algèbre:
$$\begin{cases} ij = k \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1 \end{cases}$$
Notons pour $q = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta$ $\bar{q} = \alpha - i\beta - j\gamma - k\delta$. $S^7 \subset \mathbb{R}^8$ peut s'écrire:
$$S^7 = \{(q,l) \in \mathbb{H}^2 : \ q\bar{q} + l\bar{l} = 1\}$$
ou encore:
$$S^7 = \{\begin{pmatrix} q & l \\ -\bar{l} & \bar{q} \end{pmatrix} : \ q\bar{q} + l\bar{l} = 1\} \subset M_2(\mathbb{H})$$

On peut vérifier alors que S^7 peut être muni d'une structure de groupe de Lie, noté le plus souvent $SH(2)$.

En fait les seules sphères qui sont des groupes de Lie sont S^1, S^3 et S^7. Mais ce résultat est très difficile à montrer.

2. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie réel de dimension n. On note $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel réel de dimension n:

$$\boxed{\mathcal{G} = T_e G}$$

où e est l'élément neutre de G. Le but de ce paragraphe est de munir $\mathcal{G}$ d'une structure d'algèbre de Lie.

2.1. Produit cartésien de variétés.

Soit M et N deux variétés lisses de dimensions respectives m et n. $M \times N$ est une variété lisse de dimension $m+n$, un atlas différentiable de $M \times N$ étant $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)_{(i,j)\in I\times J}$ lorsque $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ est un atlas de M et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ est un atlas de N. Notons $\pi_M : M \times N \to M$ et $\pi_N : M \times N \to N$ les projections canoniques. π_M et π_N sont lisses puisque:

$$\begin{cases} \varphi_i \times \varphi_j \circ \pi_M \circ \varphi_i^{-1}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_m) \\ \varphi_i \times \varphi_j \circ \pi_N \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

2.1.1. PROPOSITION. *L'application $\Phi : T(M \times N) \to TM \times TN$ définie par:*

$$\Phi(Z) = (T\pi_M(Z), T\pi_N(Z))$$

est un difféomorphisme lisse.

Preuve

Soit $q = (x, y) \in M \times N$ et $Z \in T_q(M \times N)$. En coordonnées locales Z s'écrit:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

donc:

$$T\pi_M(Z) = \sum_{i=1}^{m} T\pi_M(Z)(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{m} Z(x_i \circ \pi_M) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

De même $T\pi_N(Z) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Et donc l'expression de Φ dans un système de cartes est:

$$\Phi(x, y, X, Y) = (x, X, y, Y)$$

et donc Φ est lisse.
Notons pour $x \in M$ $i_a : N \to M \times N$, $y \mapsto (x, y)$ et $i_y : M \to M \times N$, $x \mapsto (x, y)$.
Définissons $\Psi : TM \times TN \to T(M \times N)$ $(X, Y) \mapsto Z$ où:

$$Z(f) = X(f \circ i_y) + Y(f \circ i_x)$$

pour $(X,Y) \in T_xM \times T_yN$. Si $X = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ alors:

$$\begin{cases} X(x_i \circ i_y) = X(x_i) = X_i & X(y_i \circ i_y) = X(cst) = 0 \\ Y(x_i \circ i_x) = Y(cst) = 0 & Y(y_i \circ i_x) = Y(y_i) = Y_i \end{cases}$$

Ainsi l'expression de Ψ dans un système de coordonnées locales est:

$$\Psi(x, X, y, Y) = (x, y, X, Y)$$

donc Ψ est lisse et Φ est un difféomorphisme d'inverse Ψ.

□

2.2. Champs de vecteurs invariants à gauche.

Soit G un groupe de Lie. Notons pour $g \in G$ les endomorphismes sur G:

$$\begin{cases} L_g : h \mapsto gh \\ R_g : h \mapsto hg \end{cases}$$

Pour tout $g \in G$ L_g et $L_g : G \to G$ sont lisses. Soit $g \in G$. D'après les axiomes d'un groupe de Lie l'application $L : G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$ est une application lisse. Son application tangente $TL : T(G \times G) \to TG$ est lisse. Soit $s : G \to TG$ la section nulle et $i : T_eG \hookrightarrow TG$ l'inclusion canonique (qui est une immersion). L'application $s \times i : G \times \mathcal{G} \to TG \times TG$ est lisse. Soit $\phi : G \times \mathcal{G} \to TG$ définie par:

$$\phi(g, X) = T_eL_g(X)$$

On a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} TG \times TG & T(G \times G) \arrow[l, "\Phi"', "\cong"] \arrow[d, "TL"] \\ G \times \mathcal{G} \arrow[u, "s \times i"] \arrow[r, "\phi"] & TG \end{tikzcd}$$

En effet pour $(g, X) \in G \times \mathcal{G}$ $Z = \Phi^{-1} \circ s \times i(g, X) \in T_{(g,e)}(G \times G)$ est défini par:

$$Z(f) = X(f \circ i_g)$$

donc $TL(Z) \in T_{L(g,e)}G = T_gG$ est défini par:

$$TL(Z)(f) = X(f \circ L \circ i_g) = X(f \circ L_g) = T_eL_gX = \phi(g, X)$$

et donc $\varphi = TL \circ \Phi^{-1} \circ s \times i$ est lisse. Soit alors pour $X \in \mathcal{G}$ $\tilde{X} : G \to TG$ défini par:

$$\tilde{X}(g) = \phi(g, X) = T_eL_g(X)$$

D'après ce qui précède $\tilde{X}$ est une section lisse i.e. $\tilde{X}$ est un champ de vecteurs sur G.

2.2.1. DEFINITION. *Soit X un champ de vecteurs sur un groupe de Lie G. X est dit invariant à gauche si pour tout $g \in G$*

$$\boxed{TLg(X) = X}$$

i.e. pour tout $g \in G$, pour tout $h \in G$ et tout germe de fonction en gh X vérifie:

$$X_h(f \circ L_g) = X_{gh}(f)$$

Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur G. $\mathcal{I}$ est clairement un espace vectoriel réel.

2.2.2. PROPOSITION. *L'application $\phi : \mathcal{I} \to \mathcal{G}$, $X \mapsto X_e$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Preuve

ϕ est clairement linéaire donc il s'agit de montrer qu'elle est bijective. Soit $X \in \mathcal{G}$ et $\tilde{X}$ le champ de vecteur associé. Soit $g, h \in G$ et f germe de fonctions en gh:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_h(f \circ L_g) &= T_e L_h(X)(f \circ L_g)\\ &= X(f \circ L_g \circ L_h)\\ &= X(f \circ L_{gh})\\ &= T_e L_{gh}(X)(f)\\ &= \tilde{X}_{gh}(f)\end{aligned}$$

et donc $\tilde{X} \in \mathcal{I}$. De plus:

$$\tilde{X}_e = T_e L_e(X) = X$$

donc $\phi(\tilde{X}) = X$. Réciproquement soit $Y \in \mathcal{I}$ et $X = Y_e$:

$$\tilde{X}(g) = T_e L_g(X) = T_e L_g(Y_e) = Y_g$$

et donc $\phi(\tilde{Y}) = Y$: ϕ est un isomorphisme.

□

2.3. Crochets de Lie sur $\mathcal{G}$.

2.3.1. PROPOSITION. *$\mathcal{I}$ est une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G.*

Preuve

Soit X et $Y \in \mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}T_h L_g([X,Y])(f) &= [X,Y]_h(f \circ L_g)\\ &= X_h(k \mapsto Y_k(f \circ L_g)) - Y_h(k \mapsto X_k(f \circ L_g))\\ &= X_h(k \mapsto T_k L_g(Y)(f)) - Y_h(k \mapsto T_k L_g(Y)(f))\\ &= X_h(k \mapsto Y_{gk}(f)) - Y_h(k \mapsto X_{gk}(f))\\ &= T_h L_g(X)(k \mapsto Y_k(f)) - T_h L_g(Y)(k \mapsto X_k(f))\\ &= X_{gh}(k \mapsto Y_k(f)) - Y_{gh}(k \mapsto X_k(f))\\ &= [X,Y]_{gh}(f)\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{I}$ est une sous algèbre de Lie de $D(G)$.

□

2.3.2. COROLLAIRE. *Le crochet $[\ ,\ ] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ défini par:*

$$\boxed{[X,Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e}$$

est un crochet de Lie.

3. L'application exponentielle

3.1. Flot d'un champ de vecteurs invariant à gauche.

Soit M une variété lisse et X un champ de vecteurs sur M. Rappelons le théorème d'existence et d'unicité du flot associé à X:

3.1.1. THEOREME. *Il existe un voisinage ouvert U de $\{0\} \times M$ dans $\mathbb{R} \times M$ et une application lisse $\phi : U \to M$ tels que:*

1. *pour tout $x \in M$ il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que*
$$U \cap \mathbb{R} \times \{x\} =]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[$$
2. *pour tout $x \in M$*
$$\phi(0, x) = x$$
3. *pour tout $x \in M$ l'application $\varphi_x :]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[\to M$ est une courbe intégrale de X i.e.:*
$$\varphi_x'(t) = X(\varphi_x(t)) \ \ \forall\, t \in]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[$$
4. *si $\gamma : (I, 0) \to (M, x)$ est une autre courbe intégrale de X alors*
$$\gamma|_{I \cap]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[} = \varphi_x|_{I \cap]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[}$$

Φ est appelé le flot de X. X est dit complet si $U = \mathbb{R} \times M$.

3.1.2. PROPOSITION. *Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche sur un groupe de Lie G. Alors X est complet. De plus pour tout $x \in G$ et tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$:*

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_x(t) = x.\varphi_e(t) \\ \varphi_e(s+t) = \varphi_e(s).\varphi_e(t) \end{cases}}$$

où (φ_x) est le flot de X.

Preuve

Notons $\gamma = \varphi_e :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$. Soit pour $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ $\beta_s :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$ définie par
$$\beta_s(t) = \gamma(s)\gamma(t)$$
On a bien sûr $\beta_s(0) = \gamma(s)$ et pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:
$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(f \circ \beta_s(u))|_{u=t} &= \frac{d}{du}(f \circ \gamma(s)\gamma(u))|_{u=t} \\ &= \frac{d}{du}(f \circ L_{\gamma(s)} \circ \gamma(u))|_{u=t} \\ &= X_{\gamma(t)}(f \circ L_{\gamma(s)}) \\ &= T_{\gamma(t)} L_{\gamma(s)} X(f) \\ &= X_{\gamma(s)\gamma(t)}(f) \\ &= X_{\beta_s(t)}(f) \end{aligned}$$
Ainsi β_s est une courbe intégrable de X de condition initiale $(0, \gamma(s))$.
Soit pour $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ $\alpha_s :]-\varepsilon + |s|, \varepsilon - |s|[\to G$ définie par
$$\alpha_s(t) = \gamma(s+t)$$

On a bien sûr $\alpha_s(0) = \gamma(s)$. De plus:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(f \circ \alpha_s(u))|_{u=t} &= \frac{d}{du}(f \circ \gamma(s+u))|_{u=t} \\ &= \frac{d}{du}(f \circ \gamma(u))|_{u=t+s} \\ &= X_{\gamma(t+s)}(f) \\ &= X_{\alpha_s(t)}(f)\end{aligned}$$

Ainsi α_s est une courbe intégrable de X de condition initiale $(0, \gamma(s))$. Donc par unicité α_s se prolonge en β_s sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Et donc γ se prolonge sur $]-2\varepsilon, 2\varepsilon[$. En recommençant le raisonnement on constate que γ est défini sur $\mathbb{R}$ et que:

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$$

Soit maintenant $x \in G$. Soit $\gamma_x : \mathbb{R} \to G$ défini par:

$$\gamma_x(t) = x.\gamma(t)$$

$\gamma_x(0) = x$ et:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(f \circ \gamma_x(u))|_{u=t} &= \frac{d}{du}(f \circ x\gamma(u))|_{u=t} \\ &= \frac{d}{du}(f \circ L_x \circ \gamma(u))|_{u=t} \\ &= X_{\gamma(t)}(f \circ L_x) \\ &= T_{\gamma(t)}L_x X(f) \\ &= X_{x\gamma(t)}(f) \\ &= X_{\gamma_x(t)}(f)\end{aligned}$$

Ainsi γ_x est une courbe intégrable de X de condition initiale $(0, x)$. Donc pour tout $x \in G$

$$\varphi_x = x.\gamma$$

□

3.1.3. REMARQUE. *Le flot d'un élément X de $\mathcal{G}$ est le flot du champ complet $\tilde{X}$.*

3.2. Un exemple: cas des groupes matriciels.

Soit $G = GL(n, \mathbb{R})$ ou un sous groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R}^n)$. Soit E_{ij} la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf le coéfficient situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1. Un système de coordonnées (global) de $M_n(\mathbb{R})$ est (x_{ij}) avec $x_{ij}(A) = A_{ij}$. ($A = \sum\limits_{i,j} A_{ij}E_{ij}$). Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ $T_A M_n(\mathbb{R})$ s'identifie canoniquement à $M_n(\mathbb{R})$ en posant:

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = E_{ij}$$

Soit $X \in \mathcal{G}$ et soit $\tilde{X}$ le champ de vecteurs invariant à gauche sur G associé. Pour tout $A \in G$ $\tilde{X}(A) \in T_A G$ peut être considéré comme une matrice via l'identification ci-dessus:

$$\tilde{X}(A)_{ij} = \tilde{X}(A)(x_{ij})$$

Or:

$$\tilde{X}(A)(x_{ij}) = T_I L_A(X)(x_{ij}) = X(x_{ij} \circ L_A)$$

Mais:

$$x_{ij} \circ L_A(B) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(A)x_{kj}(B)$$

donc:

$$\tilde{X}(A)(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(A)X(x_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}X_{kj}$$

i.e. le champ de vecteur $\tilde{X}$ s'écrit matriciellement:

$$\boxed{\tilde{X}_A = A.X}$$

Dès lors le flot γ de $\tilde{X}$ en I doit vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{cases} \gamma(0) = I \\ \gamma'(t) = \gamma(t).X \end{cases}}$$

On sait que la solution de cette équation différentielle est:

$$\boxed{\gamma(t) = e^{tX} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(tX)^n}{n!}}$$

et donc puisque le flot de $\tilde{X}$ vérifie

$$\Phi(t, A) = A.\gamma(t)$$

le flot d'un élément X de $\mathcal{G}$ est donc:

$$\boxed{\Phi(t, A) = Ae^{tX}}$$

3.3. Application exponentielle.

3.3.1. DEFINITION. *Soit G un groupe de Lie et $\mathcal{G} = T_eG$. L'application $exp : \mathcal{G} \to G$ est par définition:*

$$\boxed{exp(X) = \gamma_e(1)}$$

où $\gamma : \mathbb{R} \times G \to G$ est le flot associé à X.

3.3.2. REMARQUE. *1. exp est une application lisse*
2. si G est un groupe de Lie matriciel alors:

$$\boxed{exp(X) = e^X}$$

3.3.3. LEMME. *Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G} = T_eG$ et $X \in \mathcal{G}$. Soit $\gamma : \mathbb{R} \times G \to G$ le flot de X. Alors:*

$$\boxed{exp(tX) = \gamma_e(t)}$$

Preuve
Soit $\alpha : \mathbb{R} \to G$ défini par:

$$\alpha(s) = \gamma_e(ts)$$

Soit f germe de fonction au voisinage de $\alpha(s)$:

$$\begin{aligned}
\alpha'(s)(f) &= \frac{d}{du}(f \circ \alpha(u))|_{u=s} \\
&= \frac{d}{du}(f \circ \gamma_e(tu))|_{u=s} \\
&= t\frac{d}{dv}(f \circ \gamma_e(v))|_{v=ts} \\
&= t\tilde{X}(\gamma_e(ts))(f) \\
&= t\tilde{X}(\alpha(s))(f)
\end{aligned}$$

et donc le flot de $t\tilde{X}$ est $\delta : \mathbb{R} \times G \to G$ défini par:

$$\delta(s, g) = g\gamma_e(st) = \gamma(st, g)$$

Dès lors:

$$exp(tX) = \delta_e(1) = \gamma_e(t)$$

□

3.3.4. LEMME. *$exp'(0) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est l'application identique.*

Preuve
Par définition $exp' = T_0 exp : T_0\mathcal{G} \cong \mathcal{G} \to T_{exp(0)}G$. Or $\tilde{0}$ est la section nulle $G \to TG$. Le flot associé à la section nulle est $\gamma : \mathbb{R} \times G \to G$, $(t, g) \mapsto g$. Donc $exp(0) = \gamma_e(1) = e$. Ainsi $exp'(0)$ est bien à valeurs dans $\mathcal{G}$.
$\mathcal{G}$ est un espace vectoriel de base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. C'est donc une variété, une carte étant:

$$\varphi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto (X_1, \dots X_n)$$

Autrement dit un système de coordonnées locales de $\mathcal{G}$ est $(X_1, \dots, X_n)$. $T_0\mathcal{G}$ est donc l'espace vectoriel de base $(\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n})$ qui s'identifie canoniquement à $\mathcal{G}$ via l'identification:

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Calculons l'expression de l'application linéaire $T_0 exp$ dans ces bases. Soit γ le flot associé à $\frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned} T_0 exp(\frac{\partial}{\partial X_i})(x_i) &= \frac{\partial}{\partial X_i}(x_i \circ exp) && \text{en } 0 \\ &= \frac{\partial}{\partial dt}(x_i \circ exp \circ \varphi^{-1}(\varphi(0) + te_i))|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial dt}(x_i \circ exp(t\frac{\partial}{\partial x_j}))|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial dt}(x_i \circ \gamma_e(t))|_{t=0} && \text{d'après 3.3.3} \\ &= \gamma_e'(0)(x_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) && \text{en } \gamma_e(0) = e \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

et donc $T_0 exp(\frac{\partial}{\partial X_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ i.e. modulo l'identification $T_0\mathcal{G} \cong \mathcal{G}$ $exp'(0) = T_0 exp$ est l'identité.

□

3.3.5. LEMME. *Soit G un groupe de Lie connexe et U voisinage ouvert de e dans G. Alors:*

$$G = \bigcup_{n \geq 1} U_n$$

avec $U_1 = U$ et $U_{n+1} = \{a; b : a \in U_n \text{ et } b \in U\}$.

Preuve

G étant une variété connexe G est connexe par arcs (G est réunion de boules non disjointes). Soit $a \in G$. Soit $\gamma : [0,1] \to G$ continue telle que $\gamma(0) = e$ et $\gamma(1) = a$. Pour tout $t \in [0,1]$ $\gamma(t) = \gamma(t).e \in L_{\gamma(t)}(U)$. Dès lors:

$$\gamma([0,1]) \subset \bigcup_{t \in [0,1]} L_{\gamma(t)}(U)$$

D'après le lemme de Lebesgue il existe $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_p = 1$ tel que

$$\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset L_{\gamma(t_k)}(U)$$

Soit $a_k = \gamma(t_k)$. $a_1 = \gamma(t_1).e \in U = U_1$. $a_2 = \gamma(t_2) \in L_{a_1}(U) \subset U_2$. Et par récurrence $a = a_p \in U_p$.

□

3.3.6. REMARQUE. *D'après 3.3.4 et d'après le théorème d'inversion local il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathcal{G}$ et un voisinage ouvert W de e dans G tel que l'application*

$$\varphi : U \to W,\ X \mapsto exp(X)$$

soit un difféomorphisme lisse. D'après 3.3.5 si G est connexe alors $G = \bigcup_{n \geq 1} W_n$. Donc pour tout $g \in G$ il existe $X_1, \ldots, X_p \in U \subset \mathcal{G}$ tels que:

$$\boxed{g = e^{X_1}.\ldots.e^{X_p}}$$

3.4. Application exponentielle et crochet de Lie.
Soit l'application lisse $\mu : G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$. Soit $V' = \mu^{-1}(W) \cap W \times W$ voisinage ouvert de (e,e) dans $G \times G$. Soit $V"$ voisinage ouvert de e dans G tel que $V" \times V" \subset V'$. Comme $V' \times V' \subset W \times W$ $V' \subset W$. Soit alors $V = \varphi^{-1}(V") \subset U$ voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{G}$ et soit $\nu : V \times V \to \mathcal{G}$ définie par:

$$\nu(X,Y) = \varphi^{-1} \circ \nu(\varphi(X), \varphi(Y))$$

ν est l'unique application définie au voisinage de $(0,0)$ vérifiant:

$$\boxed{e^{\nu(X,Y)} = e^X e^Y}$$

ν est une application lisse définie sur un voisinage ouvert de $(0,0)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G} = \mathbb{R}^{2n}$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$. D'après la formule de Taylor ν peut s'écrire pour tout $X, Y \in V$ (quitte à réduire V):

$$\nu(X,Y) = \nu(0,0) + \nu_1(X,Y) + \frac{1}{2}\nu_2(X,Y) + R_3(X,Y)$$

où $\nu_1 : \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est une application linéaire, $\nu_2 : \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est un polynôme homogène de degré 2 i.e. $\nu_2 = (\nu_2^1, \ldots, \nu_2^n)$ où $\nu_2^i(X_1, \ldots, X_n, Y_1, Y_n)$ est un polynôme homogène de degré 2 et R_3 une application lisse dont le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 en $(0,0)$.
$exp(\nu(0,0)) = exp(0)exp(0)$. Donc exp étant un difféomorphisme sur V $\nu(0,0) = 0$.
De plus:

$$\begin{cases} exp(\nu(0,Y)) = exp(0)exp(Y) = exp(Y) \\ exp(\nu(X,0)) = exp(X)exp(0) = exp(X) \end{cases}$$

donc $\nu(X,0) = X$ et $\nu(0,Y) = Y$. Dès lors d'après l'unicité du développement de Taylor:

$$\begin{cases} \nu_1(X,0) = X = \nu_1(0,X) \\ \nu_2(X,0) = 0 = \nu_2(0,X) \end{cases}$$

Or ν_1 est linéaire:

$$\nu_1(X,Y) = \nu_1(X,0) + \nu_1(0,Y) = X + Y$$

au voisinage de 0 et donc $\nu_1(X,Y) = X + Y$ pour tout $X, Y \in \mathcal{G}$.
Pour tout i ν_2^i est un polynôme homogène de degré 2:

$$\nu_2^i = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} X_j X_k + \beta_{j,k}^i X_j Y_k + \gamma_{j,k}^i Y_j Y_k$$

Mais $\nu(X,0) = \nu(0,Y) = 0$ pour tout $X, Y \in V$. Donc pour tout i:

$$\nu_2^i = \sum_{j,k} \beta_{j,k}^i X_j Y_k$$

i.e. $\nu_2 : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est bilinéaire. Enfin pour tout $X \in V$:

$$exp(\nu(X,X)) = exp(X)exp(X) = \gamma(e)(1)\gamma_e(1) = \gamma_e(1+1) = \gamma_e(2) = exp(2X)$$

et donc $\nu(X,X) = 2X = \nu_1(X,X)$. Donc pour tout $X \in V$ $\nu_2(X,X) = 0$ i.e. ν_2 est antisymétrique. Ce qui permet d'énoncer la proposition suivante:

3.4.1. PROPOSITION. *Il existe une unique application bilinéaire antisymétrique $\nu_2 : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ telle que pour tout X, Y au voisinage de 0:*

$$exp(X)exp(Y) = exp(X + Y + \nu_2(X,Y) + R_3(X,Y))$$

R_3 étant une fonction lisse sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dont le développement de Taylor s'annule jusqu'à l'ordre 2 en $(0,0)$.

3.4.2. LEMME. *Soit X et $Y \in \mathcal{G}$ de flots respectifs α et $\beta : \mathbb{R} \times G \to G$. Alors le flot de $[X,Y]$ est $\gamma : \mathbb{R} \times G \to G$ défini pour $t \geq 0$ par:*

$$\boxed{\gamma(t,a) = a\alpha_e(-\sqrt{t})\beta_e(-\sqrt{t})\alpha_e(\sqrt{t})\beta_e(\sqrt{t})}$$

Preuve

Pour $a \in G$ et pour un germe de fonction f en a on a:

$$\begin{aligned}\tilde{(X)}_a(f) &= T_e L_a(X)(f) \\ &= X(f \circ L_a) \\ &= \alpha'_e(f \circ L_a) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ L_a \circ \alpha_e(t))|_{t=0}\end{aligned}$$

Mais $L_a \circ \alpha_e(t) = a.\alpha_e(t) = \alpha_a(t) = \alpha(t,a)$. Donc:

$$\tilde{X}_a(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha(t,a))|_{t=0}$$

et de même:

$$\tilde{Y}_a(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \beta(t,a))|_{t=0}$$

Dès lors:

$$\begin{aligned}&[\tilde{X},\tilde{Y}]_a(f) \\ &= \tilde{X}_a(\tilde{Y}f) - \tilde{Y}_a(\tilde{X}f) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\tilde{Y}_{\alpha(t,a)}(f) - \tilde{Y}_a(f) + \tilde{X}_a(f) - \tilde{X}_{\beta(t,a)}(f)}{t} \\ &= \lim_{s,t \to 0} \frac{f(\beta(s,\alpha(t,a))) - f(\alpha(t,a)) + f(a) - f(\beta(s,a))}{st} \\ &+ \lim_{s,t \to 0} \frac{f(\alpha(s,a)) - f(a) + f(\beta(t,a)) - f(\alpha(s,\beta(t,a)))}{st}\end{aligned}$$

D'après les propriétés des flots associés à des champs de vecteurs invariants à gauche on a:

$$\begin{cases}\alpha(s,\beta(t,a)) = a\beta(t,e)\alpha(t,e) \\ \beta(s,\alpha(t,a)) = a\alpha(t,e)\beta(s,e)\end{cases}$$

et donc en prenant $s = t$ ci-dessus il vient:

$$[\tilde{X},\tilde{Y}]_a(f) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a\alpha_e(t)\beta_e(t)) - f(a\beta_e(t)\alpha_e(t))}{t^2}$$

Prenons maintenant $a(u) = \alpha_e(-u)\beta_e(-u) \in G$. On a:

$$\lim_{u \to 0} a(u) = e$$

donc comme l'application $a \mapsto [\tilde{X}, \tilde{Y}]_a(f)$ est lisse au voisinage de e il vient:

$$[X, Y](f) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e(f) = \lim_{u \to 0} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{a(u)}(f)$$

et donc:

$$[X, Y](f) = \lim_{u \to 0} \lim_{t \to 0} \frac{f(a(u)\alpha_e(t)\beta_e(t)) - f(a(u)\beta_e(t)\alpha_e(t))}{t^2}$$

Cette limite étant finie on peut prendre $t = u$: il vient:

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a(t)\alpha_e(t)\beta_e(t)) - f(a(t)\beta_e(t)\alpha_e(t))}{t^2} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha_e(-t)\beta_e(-t)\alpha_e(t)\beta_e(t)) - f(e)}{t^2} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha_e(-\sqrt{t})\beta_e(-\sqrt{t})\alpha_e(\sqrt{t})\beta_e(\sqrt{t})) - f(e)}{t}
\end{aligned}$$

et donc le flot de $[X, Y]$ en e est:

$$\alpha_e(-\sqrt{t})\beta_e(-\sqrt{t})\alpha_e(\sqrt{t})\beta_e(\sqrt{t})$$

pour $t \geq 0$. D'où le résultat.

□

3.4.3. COROLLAIRE. *Soit X et $Y \in \mathcal{G}$. Alors:*

$$\boxed{[X, Y] = \nu_2(X, Y)}$$

Preuve
Soit α et β les flots associés à X et Y:

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha_e(-t)\beta_e(-t)\alpha_e(t)\beta_e(t)) - f(e)}{t^2} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(e^{-tX} e^{-tY} e^{tX} e^{tY}) - f(e)}{t^2} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(e^{t^2\nu_2(X,Y) + \cdots}) - f(e)}{t^2} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(e^{t\nu_2(X,Y)}) - f(e)}{t} \\
&= \nu_2(X, Y)(f)
\end{aligned}$$

□

3.4.4. REMARQUE. *Au voisinage de $(0, 0)$ on a:*

$$\boxed{exp(X)exp(Y) = exp(X + Y + [X, Y] + R_3(X, Y))}$$

3.5. Application aux groupe de Lie matriciels.
Soit $G = GL(n,\mathbb{R})$ ou un sous groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ et soit $\mathcal{G} \subset M_n(\mathbb{R})$ son algèbre de Lie.

3.5.1. PROPOSITION. *Soit $X, Y \in \mathcal{G}$. Alors:*

$$\boxed{[X,Y] = XY - YX}$$

Preuve
Remarquons tout d'abord que:

$$\frac{1}{2}(X + Y + \frac{XY - YX}{2})^2 = \frac{X^2}{2} + \frac{XY}{2} + \frac{YX}{2} + \frac{Y^2}{2} + R_3(X,Y)$$

Dès lors:

$$\begin{aligned}
e^X e^Y &= (I + X + \frac{X^2}{2} + R_3(X))(I + Y + \frac{Y^2}{2} + R_3(Y)) \\
&= I + X + Y + \frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y^2}{2} + R_3(X,Y) \\
&= I + X + Y + \frac{XY - YX}{2} + \frac{YX}{2} + \frac{XY}{2} + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + R_3(X,Y) \\
&= I + (X + Y + \frac{XY - YX}{2}) + \frac{1}{2}(X + Y + \frac{XY - YX}{2})^2 + R_3(X,Y) \\
&= e^{X + Y + \frac{XY - YX}{2} + R_3(X,Y)}
\end{aligned}$$

et donc $[X,Y] = \nu_2(X,Y) = XY - YX$.

$\square$

3.5.2. REMARQUE. *Ainsi une algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel est une sous algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{R})$.*

3.6. Application exponentielle et homorphismes de groupes de Lie.

3.6.1. LEMME. *Soit G un sous groupe de Lie et $\phi;\ : (\mathbb{R},+) \to (G,\times)$ un homorphisme de Lie. Alors:*

$$\boxed{\phi(t) = e^{tX} \ \textit{avec}\ X = \phi'(0) \in \mathcal{G}}$$

Preuve
On note $\phi'(x) = T_x\phi(\frac{d}{dt}) \in T_{\phi(x)}G$. Comme $\phi(0) = I$ $\phi'(0) \in T_I G = \mathcal{G}$. Soit $\tilde{X}$ le champ de vecteurs sur G invariant à gauche associé à $X =! \phi'(0)$:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi(t))|_{t=0} = T_0\phi(\frac{d}{dt})(f) = \phi'(0)(f) = X(f) = \tilde{X}(\phi(0))(f)$$

Maintenant $\phi(t+u) = \phi(t)\phi(u)$ donc:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f \circ \phi(t))|_{t=u} &= \frac{d}{dt}(f \circ \phi(u+t))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ \phi(u).\phi(t))|_{t=0} \\
&= T_I L_{\phi(u)} X(f) \\
&= \tilde{X}_{\phi(u)}(f)
\end{aligned}$$

Ainsi ϕ est le flot de $\tilde{X}$ en I. Donc d'après ce qui précède:

$$\phi(t) = e^{tX}$$

$\square$

3.6.2. PROPOSITION. *Soit G et H deux groupes de Lie, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ leurs algèbres de Lie et $\phi : G \to H$ un homomorphisme de groupe de Lie. Alors le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "\phi'(e)"] \arrow[d, "exp_G"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "exp_H"] \\ G \arrow[r, "\phi"'] & H \end{tikzcd}$$

De plus $\phi'(e) : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est un homorphisme d'algèbres de Lie:

$$\phi'(0)([X,Y]) = [\phi'(0)(X), \phi'(0)(Y)]$$

Preuve

Soit $X \in \mathcal{G}$ et γ son flot. $\phi \circ \gamma_e : (\mathbb{R}, +) \to H$ est un homorphisme de groupes de Lie. Donc d'après 3.6.1:

$$\phi \circ \gamma_e(t) = exp(tY)$$

avec:

$$\begin{aligned} Y &= (\phi \circ \gamma_e)'(0) \\ &= T_e\phi \circ T_0\gamma_e(\frac{d}{dt}) \\ &= \phi'(e)(\gamma'(e)) \\ &= \phi'(e)(X) \end{aligned}$$

et donc:

$$\phi(exp(X)) = \phi \circ \gamma_e(1) = exp(Y) = exp \circ \phi'(e)(X)$$

Donc le diagramme est bien commutatif.
Notons $\varphi = T_e\phi : \mathcal{G}\mathcal{H}$. φ est une application linéaire donc il suffit de vérifier que

$$\varphi([X,Y]_G) = [\varphi(X), \varphi(Y)]_H$$

ϕ est un homoprhisme de groupes donc:

$$\phi(e^X e^Y) = \phi(e^X)\phi(e^Y) = e^{\varphi(X)} e^{\varphi(Y)}$$

φ étant continue on peut choisir X et Y suffisamment proches de 0 tels que $\varphi(X)$ et $\varphi(Y)$ soient assez proches de 0 pour que l'on puisse écrire:

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]_G + R_3^G(X,Y)}$$

et:

$$e^{\varphi(X)} e^{\varphi(Y)} = e^{\varphi(X)+\varphi(Y)+\frac{1}{2}[\varphi(X),\varphi(Y)]_H + R_3^H(\varphi(X),\varphi(Y))}$$

et donc exp étant un difféomorphisme autour de 0 il vient:

$$\varphi(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]_G+R_3^G(X,Y))$$
$$=\varphi(X)+\varphi(Y)+\frac{1}{2}[\varphi(X),\varphi(Y)]_H+R_3^H(\varphi(X),\varphi(Y))$$

donc en comparant les degrés des termes de chaque côté de légalité on en déduit que:

$$\varphi([X,Y]_G)=[\varphi(X),\varphi(Y)]_H$$

□

3.7. Un exemple où l'application exponentielle n'est pas surjective. L'application $det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est un homorphisme de groupes de Lie. $GL(n,\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ donc une variété de dimension n^2. L'algèbre de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ est donc un sous espace vectoriel de dimension n^2 de $T_I M_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. Et donc l'algèbre de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ est $M_n(\mathbb{R})$. En particulier pour $n=1$ $\mathbb{R}$ est l'algèbre de Lie de $\mathbb{R}^*$. On a vu plus haut que $d_I det = Tr$ où Tr est l'application trace. Dès lors d'après 3.6.2 le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} M_n(\mathbb{R}) \arrow[r, "Tr"] \arrow[d, "exp"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "exp"] \\ GL(n,\mathbb{R}) \arrow[r, "det"'] & \mathbb{R}^* \end{tikzcd}$$

i.e. pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{det(e^A) = e^{Tr(A)}}$$

$SL(2,\mathbb{R})$ est la sous algèbre de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ définie comme l'image réciproque de 1 par la submersion det. Donc l'algèbre de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$ notée $sl(2,\mathbb{R})$ est le noyau de $T_I det = Tr$ i.e.:

$$\boxed{sl(2,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R} :\ Tr(A) = 0\}}$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $G \in GL(2,\mathbb{R})$. On sait que $Tr(GAG^{-1}) = Tr(A)$. De plus:

$$Ge^AG^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{GA^nG^{-1}}{n!} = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(GAG^{-1})^n}{n!} = e^{GAG^{-1}}$$

Dès lors pour tout $G \in GL(n,\mathbb{R})$:

$$Tr(e^A) = Tr(e^{GAG^{-1}})$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in sl(2,\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = x^2-(a^2+bc)$.

1. si $a^2+bc>0$ alors il existe $G \in GL(n,\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R})$ tel que

$$GAG^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

donc:

$$Tr(e^A) = Tr(e^{GAG^{-1}}) = Tr(\begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}) = e^{\alpha} + e^{-\alpha} \geq 2$$

2. si $a^2 + bc = 0$ alors $A^2 = 0$ donc:

$$Tr(e^A) = Tr(I + A) = 2$$

3. si $a^2 + bc < 0$ alors il existe $G \in GL(n, \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que:

$$GAG^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha cos(\theta) & -\alpha sin(\theta) \\ \alpha sin(\theta) & \alpha cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Mais $Tr(GAG^{-1}) = 0$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ et donc:

$$GAG^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $e^{GAG^{-1}} = \begin{pmatrix} cos(\beta) & sin(\beta) \\ -sin(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix}$. Dès lors:

$$Tr(e^A) = Tr(e^{GAG^{-1}}) = 2cos(\beta) \geq -2$$

Ainsi pour tout $A \in sl(2, \mathbb{R})$ $Tr(e^A) \geq -2$. Soit $B \in SL(2, \mathbb{R})$ donnée par;

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Tr(B) = -3$ donc B n'est pas dans l'image de exp:

$\underline{exp : sl(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R}) \text{ n'est pas surjective}}$.

4. Représentation adjointe et coadjointe.

4.0.1. DEFINITION. *Une représentation d'un groupe de Lie G dans un espace vectoriel V est un homomorphisme de groupes de Lie (i.e. un morphisme de groupes lisse)*

$$\phi : G \to GL(V)$$

Une représentation d'une algèbre de Lie dans un espace vectoriel V est un homorphisme d'algèbres de Lie:

$$\varphi : \mathcal{G} \to End(V)$$

4.0.2. REMARQUE. *Si $\phi : G \to GL(V)$ est une représentation du groupe de Lie G alors d'après 3.6.2 $\varphi = T_e\phi : \mathcal{G} \to T_{id}GL(V) = End(V)$ est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.*

4.1. Représentation adjointe.

Soit G un groupe de Lie et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Comme $geg^{-1} = 1$ l'application lisse $L_g \circ R_{g^{-1}} : G \to G$ induit une application linéaire notée $Ad(g)$:

$$\boxed{Ad(g) = T_e(L_g \circ R_g^{-1}) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}}$$

Pour g et h on a:

$$\begin{aligned} Ad(g) \circ Ad(h) &= T_e(L_g \circ R_g^{-1})T_e(L_h \circ R_h^{-1}) \\ &= T_e(L_g \circ R_g^{-1} \circ L_h \circ R_{h^{-1}})) \\ &= T_e(L_{gh} \circ R_{gh}^{-1}) \qquad\qquad = Ad(gh) \end{aligned}$$

De plus:

$$Ad(e) = T_e(L_e \circ R_e) = T_e Id = Id$$

donc pour tout $g \in G$ $Ad(g)$ est un automorphisme de $\mathcal{G}$ d'inverse $Ad(g^{-1})$ et $Ad : G \to GL(\mathcal{G})$ est un morphisme de groupes. Vérifions que l'application Ad est lisse.

D'apès les axiomes d'un groupe de Lie l'application $C : G\times \to G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ est une application lisse. Son application tangente $TC : T(G \times G) \to TG$ est lisse. Soit $s : G \to TG$ la section nulle et $i : T_eG \hookrightarrow TG$ l'inclusion canonique (qui est une immersion). L'application $s \times i : G \times \mathcal{G} \to TG \times TG$ est lisse. On a alors le diagramme commutatif de variétés suivantes:

$$\begin{tikzcd} TG \times TG & T(G \times G) \arrow[l, "\Phi"', "\cong"] \arrow[d, "TC"] \\ G \times \mathcal{G} \arrow[u, "s\times i"] \arrow[r, "Ad"] & TG \end{tikzcd}$$

En effet pour $(g, X) \in G \times \mathcal{G}$ $Z = \Phi^{-1} \circ s \times i(g, X) \in T_{(g,e)}(G \times G)$ est défini par:

$$Z(f) = X(f \circ i_g)$$

donc $TC(Z) \in T_{C(g,e)}G = \mathcal{G}$ est défini par:

$$TC(Z)(f) = X(f \circ C \circ i_g) = X(f \circ L_g \circ R_{g^{-1}}) = T_e(L_g \circ R_{g^{-1}})X = Ad(g, X)$$

et donc $Ad = TC \circ \Phi^{-1} \circ s \times i$ est lisse. Ce qui permet d'énoncer la proposition suivante:

4.1.1. PROPOSITION. *L'application $Ad : G \to GL(\mathcal{G})$ est une représentation de G dans $\mathcal{G}$ appelée représentation adjointe de G dans son algèbre de Lie.*

4.1.2. REMARQUE. *D'après 4.0.2 $ad = T_eAd : \mathcal{G} \to End(\mathcal{G})$ est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ dans elle même aussi appelée représentation adjointe.*

4.1.3. PROPOSITION. *Soit X et $Y \in \mathcal{G}$. Alors:*

$$\boxed{ad(X)(Y) = [X, Y]}$$

Preuve

Soit U voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{G}$, V voisinage ouvert de e dans G tels que $exp : U \to V$ soit un difféomorphisme et tels que pour X et $Y \in U$:

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+R_3(X,Y)}$$

Soit X et $Y \in V$. Soit $a = e^X$. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to G$ défini par:

$$\gamma(t) = ae^{tY}a^{-1}$$

et soit $\beta = exp^{-1} \circ \gamma$ défini sur un intervalle I centré en 0 et contenu dans $\gamma^{-1}(V)$:

$$\begin{aligned}\beta(t) &= exp^{-1} \circ exp(X)exp(tY)exp(-Y)\\ &= exp^{-1} \circ exp(X + tY + \frac{t}{2}[X,Y] + R_3(X,Y))exp(-X)\\ &= X + tY + \frac{t}{2}[X,Y] - X - \frac{t}{2}[Y,X] + R_3(X,Y)\\ &= tY + t[X,Y] + R_3(X,tY)\end{aligned}$$

Dès lors $\beta'(0) = T_0\beta(\frac{d}{dt}) = Y + [X,Y] + YR_3(X,0)$. donc:

$$\gamma'(0) = T_0\gamma(\frac{d}{dt}) = \underbrace{T_0 exp}_{id} \circ T_0\beta(\frac{d}{dt}) = Y + [X,Y] + YR_3(X,0)$$

Mais $\gamma = L_a \circ R_{a^{-1}} \circ \phi_e$ où ϕ est le flot de Y. Donc:

$$\gamma'(0) = T_0\gamma(\frac{d}{dt}) = T_e(L_a \circ R_{a^{-1}}) \circ T_0\phi(\frac{d}{dt}) = Ad(a)(Y) = Ad(e^X)(Y)$$

Mais d'après 3.6.2 $Ad \circ exp = exp \circ ad$. Dès lors:

$$exp(ad(X))(Y) = Y + [X,Y] + YR_3(X,0)$$

Mais $ad(X) \in End(V)$. Son exponentielle est:

$$exp(ad(X)) = Id + ad(X) + \frac{1}{2}ad(X) \circ ad(X) + R_3(X)$$

et donc $exp(ad(X))(Y) = Y + ad(X)(Y) + ...$ i.e. en comparant les degrés en X et Y: $ad(X)(Y) = [X,Y]$ pour X et Y assez petits. Comme ad est bilinéaire le r{esultat est vrai sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.

$\square$

4.2. Représentation coadjointe.

Soit $\mathcal{G}^*$ l'espace dual de $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}^*$ est appelée algèbre de Lie duale même si ce n'est pas une algèbre de Lie. Soit l'application $\Phi : End(\mathcal{G}) \to End(\mathcal{G}^*)$, $F \mapsto F^*$ où F^* est définie par:

$$\boxed{F^*(\xi) = \xi \circ F}$$

Φ est clairement linéaire et injective donc Φ est un isomorphisme vectoriel. C'est en particulier un difféomorphisme lisse d'application tangente $T_{id}\Phi = \Phi$. De plus:

$$(F \circ G)^*(\xi) = \xi \circ F \circ G = G^* \circ F^*(\xi)$$

i.e.

$$\boxed{(F \circ G)^* = G^* \circ F^*}$$

Φ n'est pas un morphisme d'algèbres mais tout de même $\Phi(GL(\mathcal{G})) \subset GL(\mathcal{G}^*)$. Ce qui permet de définir les représentations coadjointes:

4.2.1. DEFINITION. *Les représentations coadjointes de G et $\mathcal{G}$ sont:*

$$\begin{cases} Ad^* : G \to GL(\mathcal{G}^*) & g \mapsto Ad(g^{-1})^* \\ ad^* : \mathcal{G} \to End(\mathcal{G}^*) & X \mapsto -ad^*(X) \end{cases}$$

Ad^* est une représentation de groupe de Lie car $Ad^* = \Phi \circ Ad$ est lisse et est un morphismes de groupes:

$$\boxed{Ad^*(gh) = Ad^*(g)Ad^*(h)}$$

ad^* est une représentation d'algèbre de Lie. En effet:

$$\boxed{ad^*(X)(\xi)(Y) =< \xi, -ad(X)(Y) >= - < \xi, [X, Y] >}$$

Dès lors:

$$\begin{aligned} < [ad^*(X), ad^*(Y)](\xi), Z > & \\ &=< a^*(X)(T \mapsto \xi([T, Y]), Z)- < a^*(Y(T \mapsto -\xi([T, X]), Z) \\ &=< \xi, [[Z, Y], X] > - < \xi, [[Z, X], Y] > \\ &=< \xi, [[Y, X], Z] > \\ &= - < \xi, [[X, Y], Z] > \\ &=< ad^*([X, Y])(\xi), Z > \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\boxed{[ad^*(X), ad^*(Y)] = ad^*([X, Y])}$$

4.2.2. LEMME. *Soit G un groupe de Lie et $\iota : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ alors:*

$$\boxed{T_e\iota = -Id}$$

Preuve

Soit $X \in \mathcal{G}$. Soit φ_t son flot. Nous savons que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t).\varphi(-t) = \varphi(0) = e$ i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\iota(\varphi_t) = \varphi_{-t}$$

Dès lors:

$$\begin{aligned} T_e\iota(X)(f) &= X(f \circ \iota) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \iota \circ \varphi(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f(\varphi(-t)))|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}(f(\varphi(t)))|_{t=0} \\ &= -X(f) \end{aligned}$$

□

Dès lors si on note $\Phi : F \mapsto F^*$ on a:

$$\begin{aligned} T_e Ad^* &= T_e(\Phi \circ Ad \circ \iota) \\ &= T_{id}\Phi \circ T_e Ad \circ T_e \iota \\ &= -\Phi \circ ad \\ &= ad^* \end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{T_e Ad^* = ad^*}$$

CHAPITRE 3

Variétés de Poisson et variétés symplectiques

1. Variétés de Poisson

1.0.3. DEFINITION. *Un crochet de Poisson sur une variété réelle lisse M est la donnée d'une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ satisfaisant les propriétés suivantes:*

1. *antisymétrie:*

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

2. *règle de leibnitz:*

$$\{f, g.h\} = h.\{f, g\} + g.\{f, h\}$$

pour tout $f, g, h \in C^\infty(M)$

3. *règle de Jacobi:*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\}$$

pour tout $f, g, h \in C^\infty(M)$

Une variété M munie d'un crochet de Poisson $\{,\}$ est dite variété de Poisson et est notée $(M, \{,\})$.

Remarquons tout d'abord que $\{f, g\}(x)$ ne dépend que des germes de fonctions f et g au point x. Pour voir ceci considérons tout d'abord une fonction lisse g sur M, nulle sur un voisinage V de x. Soit une fonction lisse h et un voisinage ouvert $W \subset V$ de x tel que $h|_W = 1$ et $h|_{M-V} = 0$. $hg = 0$ sur M. Donc comme $\{f, \}$ est une application linéaire $\{f, gh\} = 0$ sur M. Or d'après la règle de Leibnitz on a:

$$\{f, hg\}(x) = h(x)\{f, g\}(x) + g(x)\{f, h\}(x) = \{f, g\}(x)$$

donc $\{f, g\}(x) = 0$. Soit maintenant g et h deux fonctions lisses coïncidant au voisinage de x. $g - h = 0$ au voisinage de x et donc $\{f, g\}(x) = \{f, h\}(x)$. Ainsi $\{f, g\}$ ne dépend que de la valeur de g sur un voisinage de x. Ceci nous permet d'utiliser la notion de crochet de Poisson sur des germes de fonctions.

Soit $(M, \{,\})$ une variété de Poisson et $f \in C^\infty(M)$. Soit pour $x \in M$ $X_f(x)$ l'application définie sur les germes de fonctions lisses en x par:

$$X_f(x)(g) = \{f, g\}(x)$$

D'après la bilinéarité de $\{,\}$ $X_f(x)$ est linéaire sur l'espace des germes de fonctions en x. De plus d'après la règle de Leibnitz:

$$X_f(x)(g.h) = h(x)X_f(x)(g) + g(x)X_f(x)(h)$$

Ainsi $X_f(x)$ est une dérivation: $X_f(x) \in T_xM$. Soit alors la section $X_f : M \to TM$, $x \mapsto X_f(x)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales de M. Dans ce système de coordonnées locales X_f s'écrit:

$$\begin{aligned} X_f(x) &= \sum_{i=1}^{n} X_f(x)(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\{f, x_i\}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Or f et $x_1, \ldots, x_n$ sont des germes de fonctions lisses au voisinage de x. Donc $\{f, x_1\}, \ldots, \{f, x_n\}$ sont lisses au voisinage de x et donc X_f est lisse au voisinage de x. Mais ceci pour tout $x \in M$: X_f est un champ de vecteurs sur M.

1.0.4. DEFINITION. *Soit $(M, \{,\})$ une variété de Poisson et $f \in C^\infty(M)$. Le champ de vecteur X_f défini par:*

$$\boxed{X_f(g) = \{f, g\}}$$

est appelé champ de vecteurs hamiltonien associé à l'hamiltonien f.

Soit f et $g \in C^\infty(M)$ telles que $df = dg$. Alors $f - g$ est localement constante (i.e. constante sur chaque composante connexe de M) et donc $\{f - g, h\} = 0$ pour tout h i.e. $X_f = X_g$. Ceci nous permet de définir l'application d'hamilton:

1.0.5. DEFINITION. *Soit $(M, \{,\})$ une variété de Poisson. On définit l'application d'Hamilton est l'application $J : T^*M \to TM$ définie par:*

$$\boxed{Jdf = X_f}$$

i.e. $J(d_x f) = X_f(x)$.

1.0.6. REMARQUE. *Soit $\theta = dg(x) \in T_x^*M$:*

$$< dg(x), Jdf(x) >=< dg(x), X_f(x) >= X_f(x)(g) = \{f, g\}(x)$$

Ainsi J vérifie la propriété:

$$\boxed{< dg, Jdf >= \{f, g\}}$$

Exprimons en coordonnées locales les différents objets introduits plus haut: Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales de M. Soit $(J_{ij})_{i,j=1}^n$ la matrice de l'application linéaire $J : T_x^*M \to T_xM$:

$$J(dx_i) = \sum_{j=1}^{n} X_{x_i}(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n}\{x_i, x_j\}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

donc:

$$\boxed{J_{ij} = \{x_i, x_j\}}$$

(Les J_{ij} sont des fonctions lisses en x)

$$\begin{aligned}X_f(x) &= Jd_x f\\ &= J(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)Jdx_i\\ &= \sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\end{aligned}$$

et donc:

$$\boxed{X_f = \sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}}$$

Soit f et $g \in C^\infty(M)$:

$$\{f,g\}(x) = X_f(x)(g) = \sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$$

et donc:

$$\boxed{\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}}$$

1.0.7. LEMME. *Soit $(M,\{,\})$ une variété de Poisson et $J=(J_{ij})$ l'application d'hamilton associée. Alors pour tout $i,j \in \{1,\ldots,n\}$:*

$$\boxed{J_{ij} = -J_{ji}}$$

et pour tout $i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$:

$$\boxed{\sum_{l=1}^{n} J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l} + J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l} + J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l} = 0}$$

Preuve
La première propriété résulte immédiatement de la propriété d'antisymétrie de $\{,\}$:

$$J_{ij} = \{x_i, x_j\} = -\{x_j, x_i\} = -J_{ij}$$

La deuxième découle de l'identité de Jacobi:

$$\begin{aligned}0 &= \{x_i,\{x_j,x_k\}\} + \{x_k,\{x_i,x_j\}\} + \{x_j,\{x_k,x_i\}\}\\ &= \{x_i,J_{jk}\} + \{x_k,J_{ij}\} + \{x_j,J_{ki}\}\end{aligned}$$

Or:

$$\{x_i, g\} = \sum_{u,v=1}^{n} J_{uv}\frac{\partial x_i}{\partial x_u}\frac{\partial g}{\partial x_v} = \sum_{l=1}^{n} J_{il}J_{il}\frac{\partial g}{\partial x_l}$$

et donc:

$$0 = \sum_{l=1}^{n} J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^{n} J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^{n} J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l}$$

□

2. Variétés symplectiques

2.0.8. DEFINITION. *Une forme symplectique sur une variété rélle M est une 2 -forme $\omega \in \Lambda^2(M)$ partout non dégénérée et fermée. Une variété munie d'une forme symplectique ω est dite variété symplectique et notée (M, ω).*

2.1. Structure symplectique induite par un crochet de Poisson non dégénéré.

Soit $(M, \{,\})$ une variété de Poisson telle que $\{,\}$ soit non dégénérée i.e. l'application $J : T^*M \to TM$ est un difféomorphisme (en particulier pour tout $x \in M$ $J : T_x^*M \to T_qM$ est un isomorphisme vectoriel). Soit pour $x \in M$ $\Omega_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\boxed{\Omega_x(X,Y) = < J_x^{-1}X, Y >}$$

2.1.1. LEMME. *Ω est une 2-forme symplectique sur M*

Preuve

Pour tout $x \in M$ $J_x^{-1} : T_xM \to T_x^*M$ est linéaire donc Ω_x est bilinéaire. Soit X et $Y \in T_xM$. Soit f et $g \in C^\infty(M)$ tels que:

$$\begin{cases} J_x(d_xf) = X \\ J_x(d_xg) = Y \end{cases}$$

On a:

$$\begin{aligned} \Omega_x(X,Y) &= < J_x^{-1}X, Y > \\ &= < d_xf, J_x(d_xg) > \\ &= \{g, f\}(x) \\ &= -\{f, g\}(x) \\ &= - < d_xg, J_x(d_xf) > \\ &= - < J_x^{-1}Y, X > \\ &= -\Omega_x(Y, X) \end{aligned}$$

Ainsi Ω_x est antisymétrique: $\Omega : M \to \Lambda^2(M)$ est donc bien une section. Vérifions qu'elle est lisse. Notons $J_x = (J^{ij}(x))_{i,j=1}^n$ où pour tout i, j $J^{ij} : M \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse au voisinage de x:

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_x(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) dx_i \wedge dx_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} < J_x^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} > dx_i \wedge dx_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} < \sum_{k=1}^{n} J_x^{ik} dx_k, \frac{\partial}{\partial x_j} > dx_i \wedge dx_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} J_x^{ij} dx_i \wedge dx_j
\end{aligned}$$

et donc puisque les J^{ij} sont lisses Ω est lisse au voisinage de x. Mais ceci pour tout $x \in M$: $\Omega \in \Lambda^2(M)$. Reste à montrer que Ω est fermée et non dégénérée. Soit $X \in T_x M$ tel que $i_X \Omega_x = 0$. Soit $f \in C^\infty(M)$ tel que $d_x f = X$:

$$\begin{aligned}
0 &= \Omega_x(X, \frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&=< J_x^{-1} X, \frac{\partial}{\partial x_i} > \\
&=< dxf, \frac{\partial}{\partial x_i} > \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)
\end{aligned}$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ pour tout i: $d_x f = 0$ et donc $X = 0$. Ainsi Ω_x est non dégénérée et ceci pour tout $x \in M$.
Calculons $d_x \Omega$ en coordonnées locales. Tout d'abord J étant antisymétrique d'après le lemme 1.0.7, J^{-1} est antisymétrique. Donc pour tout i, j $J^{ij} = -J^{ji}$. Donc:

$$\Omega = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} J^{ij} dx_i \wedge dx_j$$

Et donc:

$$\begin{aligned}
d\Omega &= 2 \sum_{i<j} \sum_{k} \frac{\partial J^{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \\
&= 2 \sum_{i<j<k} \frac{\partial J^{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j + 2 \sum_{i<k<j} \sum_{k} \frac{\partial J^{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \\
&\quad + 2 \sum_{k<i<j} \sum_{k} \frac{\partial J^{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \\
&= 2 \sum_{i<j<k} (\frac{\partial J^{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial J^{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial J^{jk}}{\partial x_i}) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k
\end{aligned}$$

Montrons donc que $\frac{\partial J^{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial J^{ki}}{\partial J^{jk}}\partial x_i = 0$ pour tout i, j, k. D'après le lemme 1.0.7 on pour tout u, v, w:

$$\sum_{t=1}^{n} J_{ut}\frac{\partial J_{vw}}{\partial x_t} + J_{vt}\frac{\partial J_{wu}}{\partial x_t} + J_{wt}\frac{\partial J_{uv}}{\partial x_t} = 0$$

Donc:

$$\sum_{t=1}^{n} J^{iu}J^{jv}J^{kw}(J_{ut}\frac{\partial J_{vw}}{\partial x_t} + J_{vt}\frac{\partial J_{wu}}{\partial x_t} + J_{wt}\frac{\partial J_{uv}}{\partial x_t}) = 0$$

d'où:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{u,v,w,t} J^{iu}J^{jv}J^{kw}(J_{ut}\frac{\partial J_{vw}}{\partial x_t} + J_{vt}\frac{\partial J_{wu}}{\partial x_t} + J_{wt}\frac{\partial J_{uv}}{\partial x_t}) \\
&= \sum_{v,w} J^{jv}J^{kw}\sum_t \frac{\partial J_{vw}}{\partial x_t}\underbrace{\sum_u J^{iu}J_{ut}}_{=\delta_{it}} \\
&+ \sum_{u,w} J^{iu}J^{kw}\sum_t \frac{\partial J_{wu}}{\partial x_t}\underbrace{\sum_v J^{jv}J_{vt}}_{=\delta_{jt}} \\
&+ \sum_{u,v} J^{iu}J^{jv}\sum_t \frac{\partial J_{uv}}{\partial x_t}\underbrace{\sum_w J^{kw}J_{wt}}_{=\delta_{kt}} \\
&= \sum_{v,w} J^{jv}J^{kw}\frac{\partial J_{vw}}{\partial x_i} + \sum_{u,w} J^{iu}J^{kw}\frac{\partial J_{wu}}{\partial x_j} + \sum_{u,v} J^{iu}J^{jv}\frac{\partial J_{uv}}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Or:

$$\sum_b J^{ab}J_{bc} = \delta_{ac} \Rightarrow \sum_b \frac{\partial J^{ab}}{\partial x_d}J^{bc} + \sum_c J^{ab}\frac{\partial J_{bc}}{\partial x_d} = 0$$

Dès lors:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{v,w} J^{jv}J^{kw}\frac{\partial J_{vw}}{\partial x_i} + \sum_{u,w} J^{iu}J^{kw}\frac{\partial J_{wu}}{\partial x_j} + \sum_{u,v} J^{iu}J^{jv}\frac{\partial J_{uv}}{\partial x_k} \\
&= \sum_{v,w} J^{jv}J_{wv}\frac{\partial J^{kw}}{\partial x_i} - \sum_{u,w} J^{iu}J_{wu}\frac{\partial J^{kw}}{\partial x_j} + \sum_{u,v} J^{iu}J_{vu}\frac{\partial J^{jv}}{\partial x_k} \\
&= -\sum_w \underbrace{\sum_v J^{jv}J_{vw}}_{=\delta_{jw}}\frac{\partial J^{kw}}{\partial x_i} + \sum_w \underbrace{\sum_u J^{iu}J_{uw}}_{=\delta_{iw}}\frac{\partial J^{kw}}{\partial x_j} - \sum_v \underbrace{\sum_u J^{iu}J_{uv}}_{=\delta_{iv}}\frac{\partial J^{jv}}{\partial x_k} \\
&= -\frac{\partial J^{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial J^{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial J^{ji}}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial J^{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial J^{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial J^{ij}}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

et donc $d\Omega = 0$.

□

2.2. Crochet de Poisson induit par une structure symplectique.
Considérons maintenant une variété symplectique (M, Ω). Le théorème de Darboux nous dit qu'il existe un système de coordonnés locales $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ de M dans lequel Ω s'écrit:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$$

Nous utiliserons dans la suite ce système de coordonnées dit canonique ou symplectique.

2.2.1. LEMME. *Soit $f \in C^\infty(M)$. Il existe un unique champ de vecteurs X_f sur M tel que:*

$$\boxed{i_{X_f}(\Omega) = df}$$

Preuve
L'unicité est évidente: si $i_X \Omega_x = i_Y \Omega_x$ alors pour tout Z $\Omega_x(X - Y, Z) =$ et donc, Ω_x étant non dégénérée, $X = Y$.
L'application $\Omega_x : T_x M \to T_x^* M$, $X \mapsto i_X \Omega$ est un isomorphisme donc pour tout $x \in X$ il existe $X_f(x) \in T_x M$ tel que $i_{X_f(x)} \Omega_x = d_x f$. Ainsi il existe une unique section $X_f : M \to TM$ telle que pour tout x $i_{X_f(x)} \Omega_x = d_x f$. Exprimons X_f dans le système de coordonnées symplectiques:

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i + P_i dp_i$$

donc:

$$\begin{aligned} df &= i_{X_f} \Omega \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Omega(X_f, \frac{\partial}{\partial q_i}) dq_i + \Omega_x(X_f, \frac{\partial}{\partial p_i}) dp_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} Q_i dp_i - P_i dQ_i \end{aligned}$$

donc:

$$\begin{cases} Q_i(x) = \frac{\partial f}{\partial p_i}(x) \\ P_i(x) = -\frac{\partial f}{\partial q_i}(x) \end{cases}$$

Ainsi, f étant lisse au voisinage de x, Q_i et P_i sont lisses au voisinage de x pour tout x: $X_f : M \to TM$ est une section lisse i.e. un champ de vecteurs.

$\square$

2.2.2. REMARQUE. *X_f s'écrit dans un système de coordonnées symplectiques:*

$$\boxed{X_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}}$$

2.2.3. PROPOSITION. *L'application* $\{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ *définie par*

$$\boxed{\{f,g\} = X_f(g)}$$

est un crochet de Poisson non dégénéré sur M.

Preuve
X_f étant un champ de vecteurs $X_f(g)$ est une application lisse et $X_f(\lambda g + \mu h) = \lambda X_f(g) + \mu X_f(h)$. $\{,\}$ est donc linéaire à droite. De plus:

$$i_{\lambda X_f + \mu X_g}\Omega = \lambda i_{X_f}\Omega + \mu i_{X_g}\Omega = \lambda df + \mu dg = d(\lambda f + \mu dg)$$

donc par unicité $X_{\lambda f + \mu g} = \lambda X_f + \mu X_g$. Ainsi $\{,\}$ est linéaire à gauche et donc bilinéaire. Dans un système de coordonnées symplectiques $\{,\}$ s'écrit:

$$\boxed{\{f,g\} = X_f(g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}}$$

Il est donc évident que $\{,\}$ est antisymétrique. Vérifions qu'il vérifie l'identité de Jacobi:

$$\begin{aligned}
&\{f,\{g,h\}\} \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial\{g,h\}}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial\{g,h\}}{\partial p_i} \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}\Big) - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}\Big) \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}
\end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned}
&\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}\\
&\quad=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial p_j}-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial q_j}+\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_j}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\partial q_j}+\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}-\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\partial p_j}-\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial q_j}+\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}-\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial p_j}-\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\\
&\quad=0
\end{aligned}$$

Enfin puisque X_f est un champ de vecteurs on a:

$$\{f,gh\}=X_f(gh)=hX_f(g)+gX_f(h)=h\{f,g\}+g\{f,h\}$$

et donc $\{,\}$ est un crochet de Poisson. Reste à vérifier qu'il est non dégénéré. Soit $J:T^*M\to TM$ l'application de Hamilton associée à $\{,\}$:

$$<dg,Jdf>=\{f,g\}$$

Soit $K:TM\to T^*M$ l'application lisse définie par:

$$K(X)=i_X\Omega$$

Soit $X\in T_xM$ et $f\in C^\infty(M)$ tel que $i_X\Omega_x=d_xf$ i.e. $X=X_f(x)$:

$$\begin{aligned}
J\circ K(X)(g)&=<d_xg,J\circ K(X)>\\
&=<d_xg,Ji_X\Omega_x>\\
&=<d_xg,Jd_xf>\\
&=\{f,g\}(x)\\
&=X_f(x)(g)\\
&=X(g)
\end{aligned}$$

et donc $J \circ K = Id$. Réciproquement:

$$\begin{aligned} K \circ J(d_x g)(X) &= i_{J(d_x g)}\Omega(X) \\ &= \Omega(J(d_x g), X) \\ &= -i_X \Omega(J(d_x g)) \\ &= - < d_x f, J d_x g > \\ &= -\{g, f\}(x) \\ &= \{f, g\}(x) \\ &= X_f(x)(g) \\ &= X(g) \\ &= d_x g(X) \end{aligned}$$

et donc $K \circ J = Id$. Ainsi J est un difféomorphisme d'inverse K: $\{,\}$ est non dégénéré

□

2.2.4. REMARQUE. *Soit Θ la forme symplectique induite par ce crochet de Poisson non dégénéré:*

$$\Theta_x(X, Y) =< J^{-1}X, Y >$$

D'après ce qui précède $J^{-1} = K$. Donc:

$$\Theta_x(X, Y) =< KX, Y >=< i_X\Omega, Y >= \Omega_x(X, Y)$$

et donc $\Theta = \Omega$.
Se donner une structure de Poisson non dégénérée sur une variété équivaut à se donner une structure symplectique.

3. Exemples

3.1. La sphère.

Soit la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Soit $i : S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ et soit $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ donnée par:

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

Posons $\Omega = i^*(\Omega) \in \lambda^2(S^3)$. Montrons que Ω est une forme symplectique sur S^2. $d\Omega = 0$ puisque $\Lambda^3(S^2) = 0$. Il faut donc montrer que Ω est non dégénérée. Rappelons qu'on peut choisir comme cartes de S^2:

$$\begin{cases} \phi_N : S^3 - \{N\} \to \mathbb{R}^2, & (x, y, z) \mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}) \\ \phi_S : S^3 - \{S\} \to \mathbb{R}^2, & (x, y, z) \mapsto (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}) \end{cases}$$

Ces cartes ont pour inverses:

$$\begin{cases} \phi_N^{-1} : (u, v) \mapsto (\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}) \\ \phi_S^{-1} : (u, v) \mapsto (\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, -\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}) \end{cases}$$

Dès lors $i^*(\omega)$ s'écrit dans le système de coordonnées locales (u, v) induit par ϕ_N:

$$\begin{aligned}
i^*\omega &= (x\circ i)d(y\circ i)\wedge d(z\circ i) + (y\circ i)d(z\circ i)\wedge d(x\circ i) + (z\circ i)d(x\circ i)\wedge d(y\circ i)\\
&= \frac{2u}{1+u^2+v^2}d(\frac{2v}{1+u^2+v^2})d(\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2})\\
&+ \frac{2v}{1+u^2+v^2}d(\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2})d(\frac{2u}{1+u^2+v^2})\\
&+ \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}d(\frac{2u}{1+u^2+v^2})d(\frac{2v}{1+u^2+v^2})\\
&= \frac{2u}{(1+u^2+v^2)^3}(2(1+u^2-v^2)dv - 4uvdu)\wedge(4udu+4vdv)\\
&+ \frac{2v}{(1+u^2+v^2)^3}(4udu+4vdv)\wedge(2(1-u^2+v^2)du - 4uvdv)\\
&+ \frac{u^2+v^2-1}{(1+u^2+v^2)^3}(2(1-u^2+v^2)du-4uvdv)\wedge(2(1+u^2-v^2)dv-4uvdu)\\
&= -\frac{4}{1+u^2+v^2}du\wedge dv
\end{aligned}$$

On vérifie que le r{esultat est le même même dans les coordonnées induites par ϕ_S. Et donc comme $\frac{-4}{1+u^2+v^2}\neq 0$ pour tout u, v $\imath^*(\omega)$ est non dégénérée:

$$\boxed{i^*(xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy) \text{ est une forme symplectique sur } S^2}$$

3.2. Fibré cotangent d'une variété lisse.

Soit M une variété lisse. Soit $\pi : T^*M \to M$ la projection du fibré cotangent et $T\pi : TT^*M \to TM$. La forme de Liouville est la section $\rho : T^*M \to T^*T^*M$ définie par:

$$\boxed{<\rho(\xi), X> = <\xi, T_\xi\pi(X)>}$$

pour $\xi \in T_x^*M$ et $X \in T_\xi T^*M$. Calculons l'expression de ρ dans un système de coordonnées $(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$ de T^*M. Soit $\xi = (q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n) = \sum_{i=1}^n p_i dq_i \in T_q^*M$:

$$\begin{aligned}
\rho_\xi &= \sum_{i=1}^n \rho_\xi(\frac{\partial}{\partial q_i}) + \rho_\xi(\frac{\partial}{\partial p_i})dp_i\\
&= \sum_{i=1}^n <\xi, T_x i\pi(\frac{\partial}{\partial q_i})> dq_i + <\xi, T_x i\pi(\frac{\partial}{\partial p_i})> dp_i\\
&= \sum_{i=1}^n <\xi, \frac{\partial}{\partial q_i}> dq_i + <\xi, 0> dp_i\\
&= \sum_{i=1}^n p_i dq_i
\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\boxed{\rho(q,p) = \sum_{i=1}^n p_i dq_i}$$

Dès lors:

$$\boxed{d\rho = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \text{ est une forme symplectique sur } T^*M}$$

3.3. Un exemple de structure de Poisson non symplectique.

Soit $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie n et soit $\mathcal{G}^*$ la coalgèbre de Lie duale. $\mathcal{G}^*$ est un espace vectoriel réel de dimension finie et est donc une variété lisse difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

3.3.1. THEOREME. *Il existe une structure de Poisson non symplectique sur $\mathcal{G}^*$.*

Preuve

Nous allons donner trois descriptions différentes du crochet de Poisson sur $C^\infty(\mathcal{G}^*)$.

1. Expression en coordonnées.
   $\mathcal{G}$ s'identifie à $\mathcal{G}^{**} \subset C^\infty(\mathcal{G}^*)$ par l'isomorphisme $x \mapsto f_x$ où:

$$f_x(\xi) = < \xi, x >$$

Définissons pour x et $y \in \mathcal{G}$ le crochet de f_x et f_y par:

$$\boxed{\{f_x, f_y\} := f_{[x,y]}}$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{G}$. Il existe une unique famille de réels (C_{ij}^k) tels que:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k$$

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ le système de coordonnées induit sur $\mathcal{G}^*$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i(\xi) f_i$$

Pour tout i x_i est linéaire et $x_i(f_j) = \delta_{ij}$. Donc $x_i = f_{e_i}$. Dès lors:

$$\{x_i, x_j\} = f_{[e_i,e_j]} = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k f_{e_k} = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k x_k$$

Définissons alors le crochet sur $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ par:

$$\boxed{\{f, g\} = \sum_{i,j,k=1}^{n} C_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} x_k}$$

$\{\ ,\ \}$ est antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi parce que ses coefficients sont les coefficients d'un crochet de Lie. De plus $\{\ ,\ \}$ vérifie la règle de Leibnitz:

$$\begin{aligned}\{f,gh\} &= \sum_{i,j,k=1}^{n} C_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial gh}{\partial x_j}x_k\\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} hC_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}x_k + \sum_{i,j,k=1}^{n} gC_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j}x_k\\ &= h\{f,g\}+g\{f,h\}\end{aligned}$$

et donc $\{\ ,\ \}$ est un crochet de Poisson sur $C^\infty(\mathcal{G}^*)$.

2. Définition par le gradient.
   Définissons pour $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ $\nabla f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ par:

$$\boxed{<\eta, \nabla f(\xi)>=\frac{d}{dt}f(\xi+t\eta)|_{t=0}}$$

   Remarquons que dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathcal{G}$ ∇f s'{ecrit:

$$\boxed{\nabla(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}e_i}$$

   En effet:

$$<\eta, \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)e_i> = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} eta_i\frac{d}{dt}f(\xi+tf_i)|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}f(\xi+t\eta)|_{t=0}$$

   Définissons alors le crochet de f et $g \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ par:

$$\boxed{\{f,g\}(\xi)=<\xi,[\nabla f(\xi),\nabla g(\xi)]}$$

   En coordonnées cela donne:

$$\begin{aligned}\{x_i,x_j\}(f_k) &=< f_k,[\nabla x_i(f_k),\nabla x_j(f_k)]>\\ &=< f_k,[e_i,e_j]>\\ &= C_{ij}^k\end{aligned}$$

   et donc ce crochet coïncide avec le crochet précédemment défini.

3. Crochet induit par la structure symplectique sur T^*G.
   Soit G un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathcal{G}$. G existe et est unique à isomorphisme près mais le résultat est difficile (très difficile) à démontrer).
   Définissons pour g et $h \in G$:

$$\rho_g(h)=(T_hL_g)^*: T_{gh}^*G\to T_h^*G$$

   Cette isomorphisme induit un difféomorphisme $\rho_g : T^*G \to T^*G$ d'inverse $\rho_{g^{-1}}$. Remarquons que l'application $\rho : G\times\mathcal{G}^*\to T^*G$ définie par:

$$\rho(g,\xi)=\rho_{g^{-1}}(g)(\xi)$$

est un difféomorphisme rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} G \times \mathcal{G}^* \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & T^*G \arrow[dl, "\pi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

i.e. le fibré cotangent d'un groupe de Lie G est trivial de fibre $\mathcal{G}^*$. Soit $\lambda : T^*G \to T^*T^*G$ la forme de Liouville sur T^*G:

$$< \lambda(\xi), X >=< \xi, T_\xi \pi(X) >$$

pour $\xi \in T_h^*G$ et $X \in T_\xi T^*G$. Soit $g \in G$, $\xi \in T_{gh}^*G$ et $X \in T_{\rho_g(\xi)}T^*G$:

$$\begin{aligned} < \lambda \circ \rho_g(\xi), X > &=< \rho_g(\xi), T_{\rho_g(\xi)}\pi(X) > \\ &=< (T_h L_g)^*\xi, T_{\rho_g(\xi)} X > \\ &=< \xi, T_h Lg \circ T_{\rho_g(\xi)} \\ &=< \xi, T_{\rho_g(\xi)}(L_g \circ \pi) X > \end{aligned}$$

Or $L_g \circ \pi(h, \xi) = gh$ et $\pi \circ \rho_{g^{-1}}(h, \xi) = gh$. Donc $L_g \circ \pi = \pi \circ \rho_{g^{-1}}$. Donc:

$$\begin{aligned} < \lambda \circ \rho_g(\xi), X > &=< \xi, T_{\rho_g(\xi)}(L_g \circ \pi) X > \\ &=< \xi, T_{\rho_g(\xi)}(\pi \circ \rho_{g^{-1}}) X > \\ &=< \xi, T_\xi \pi \circ T_{\rho_g(\xi)}\rho_{g^{-1}}(X) > \\ &=< \lambda(\xi), T_{\rho_g(\xi)}\rho_{g^{-1}}(\xi) X > \\ &=< \rho_{g^{-1}}^* \circ \lambda(\xi), X > \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\boxed{\lambda \circ \rho_g = \rho_{g^{-1}}^*(\lambda)}$$

Dès lors si on note $\Omega = d\lambda$ la forme symplectique canonique sur T^*G on a:

$$\boxed{\Omega \circ \rho_g = \rho_{g^{-1}}^*(\Omega)}$$

Rappelons que pour u et $v \in C^\infty(T^*G)$ le crochet de Poisson de u et v est défini par:

$$\{u, v\} = X_u(v)$$

où X_u est l'unique champ de vecteur tel que $i_{X_u}\Omega = du$. Soit $u \in C^\infty(T^*G)$, $\xi \in T^*G$, $Y \in T_\xi T^*G$ et $Z \in T_{\rho_g(\xi)}T^*G$ tel que $T_{\rho_g(\xi)}\rho_{g^{-1}}(Z) = Y$.

$$\begin{aligned} i_{T_{\rho_g(\xi)}\rho_{g^{-1}}(X_u)}\Omega_\xi(Y) &= \Omega_\xi(T_{\rho_g(\xi)}\rho_{g^{-1}}(X_u), T_{\rho_g(\xi)}\rho_{g^{-1}}(Z) \\ &= (\rho_{g^{-1}}^*\Omega)_\xi(X_u, Z) \\ &= \Omega_{\rho_g(\xi)}(X_u, Z) \\ &= d_{\rho_g(\xi)}u(Z) \\ &= d(u \circ \rho_g)(Y) \end{aligned}$$

et donc:

$$X_{u \circ \rho_g}(\xi) = T_{\rho_g(\xi)}\rho_{g^{-1}} X_u(\xi)$$

Dès lors:

$$\begin{aligned}\{u\circ\rho_g, v\circ\rho_g\}(\xi) &= X_{u\circ\rho_g}(\xi)(v\circ\rho_g)\\ &= (T_{\rho_g(\xi)}\rho_{g^{-1}}X_u)_\xi(v\circ\rho_g)\\ &= (T_{xi}\rho_g\circ T_{\rho_g(\xi)}\rho_{g^{-1}}X_u)_\xi(v)\\ &= X_u(\rho_g(\xi))(v)\\ &= \{u,v\}(\rho_g(\xi))\end{aligned}$$

et donc:

$$\boxed{\{u\circ\rho_g, v\circ\rho_g\} = \{u,v\}\circ\rho_g}$$

Soit $C^\infty(T^*G)^G$ le sous espace vectoriel des fonctions lisses stables par ρ_g:

$$C^\infty(T^*G)^G = \{u\in C^\infty(G):\ u\circ\rho_g = u\ \forall g\in G\}$$

D'après ce qui précède $C^\infty(T^*G)^G$ est stable par $\{\ ,\ \}$. Soit $\phi : C^\infty(\mathcal{G}^*)\to C^\infty(T^*G)$ définie par:

$$\phi(u) = u\circ pr_2$$

où $pr_2 : T^*G = G\times\mathcal{G}^*\to\mathcal{G}^*$ est la deuxième projection. ϕ est clairement linéaire. Soit $\xi\in T^*gG$. Soit $\eta\in\mathcal{G}^*$ tel que $\xi = \rho_{g^{-1}}(g)(\xi) = (T_gL_{g^{-1}})^*(\eta$: $pr_2(\xi) = \eta$. De plus:

$$pr_2\circ\rho_{h^{-1}}(\xi) = pr_2(\rho_{h^{-1}}\circ\rho_{g^{-1}}(\eta)) = pr_2(\rho_{(gh)^{-1}}eta) = \eta$$

et donc $u\circ pr_2\circ\rho_h = u\circ pr_2$ pour tout $h\in G$ i.e. $u\circ pr_2\in C^\infty(T^*G)^G$. Soit $i:\mathcal{G}\to T^*G$ l'inclusion canonique. Soit $\psi : C^\infty(T^*G)^G\to\mathcal{G}^*$ définie par $\psi(v) = v\circ i$. ψ est linéaire et clairement l'inverse de ϕ. Dpnc $\phi : C^\infty(\mathcal{G}^*)\to C^\infty(T^*G)^G$ est un isomorphisme. Dès lors le crochet sur $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ défini par:

$$\boxed{\{u,v\} = \phi^{-1}(\{\phi(u),\phi(v)\})}$$

est un crochet de Poisson sur $\mathcal{G}^*$. On peut vérifier que ce crochet coïncide avec les deux crochets définis précédemment.

$\square$

Remarquons que ce crochet de Poisson est à priori dégénéré. Par exemple il peut exister $u\in C^\infty(T^*G)^G$ non constant tel que pour tout $v\in C^\infty(T^*G)^G$ $\{u,v\} = 0$. En fait si G est de dimension impaire alors $\mathcal{G}^*$ est une variété de dimension impaire et n'est donc pas symplectique. Le crochet de Poisson est alors nécessairement dégénéré.

3.3.2. DEFINITION. *Une Casimir sur une variété de Poisson* (M,Π) *est une fonction* $f\in C^\infty(M)$ *telle que pour tout* $g\in C^\infty(M)$ $\{f,g\} = 0$.

Question: Quelles sont les fonctions Casimir d'une variété de Poisson? Nous allons nous intéresser au cas où $M = \mathcal{G}^*$ dans la suite de ce cours.

CHAPITRE 4

Action d'un groupe de Lie sur une variété

1. Définitions

1.0.3. DEFINITION. *Soit G un groupe de Lie et M une variété lisse.*

1. *Une action à gauche de G sur M est une application lisse $\lambda : G \times M \to M$ telle que:*
   (a) $\lambda(e, m) = m$ pour tout $m \in M$
   (b) $\lambda(g, \lambda(h, m)) = \lambda(gh, m)$ pour tout $g, h \in G$ et tout $m \in M$
2. *Une action à droite de G sur M est une application lisse $\mu : G \times M \to M$ telle que:*
   (a) $\mu(e, m) = m$ pour tout $m \in M$
   (b) $\mu(g, \mu(h, m)) = \mu(hg, m)$ pour tout $g, h \in G$ et tout $m \in M$

1.0.4. PROPOSITION. *Soit G un groupe de Lie et M une variété lisse. A toute action à gauche de G sur M correspond une action à droite et réciproquement.*

Preuve
Soit $\lambda : G \times M \to M$ une action à gauche. Définissons $\mu : G \times M \to M$ par:

$$\mu(g, m) = \lambda(g^{-1}, m)$$

μ est lisse puisque λ et $g \mapsto g^{-1}$ sont lisses. De plus:

$$\begin{cases} \mu(e, m) = \lambda(e^{-1}, m) = \lambda(e, m) = m \\ \mu(g, \mu(h, m)) = \lambda(g^{-1}, \lambda(h^{-1}, m)) = \lambda(g^{-1}h^{-1}, m) = \lambda((hg)^{-1}, m) = \mu(hg, m) \end{cases}$$

donc μ est une action à droite. Réciproquement si $\mu : G \times M \to M$ est une action à droite alors $\lambda : G \times M \to M$ définie par

$$\lambda(g, m) = \mu(g^{-1}, m)$$

est une action à gauche.

□

Par la suite une action sera sous entendue à gauche. On notera:

$$\lambda(g, m) = gm = g.m$$

1.0.5. DEFINITION. *Soit G un groupe de Lie et M une variété lisse. Soit $\lambda : G \times M \to M$ une action de G sur M. λ est dite:*

1. *effective si:*

$$g.m = m \;\forall m \in M \Rightarrow g = e$$

2. *libre si:*

$$g \neq e \Rightarrow g.m \neq m \;\forall m \in M$$

3. *transitive si:*

$$\forall m, n \in M \;\exists g \in G : \; n = g.m$$

1.1. Exemples.

1. G agit sur lui même par multiplication à gauche:
$$L : G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto g.h$$
Cette action est libre et transitive:
$$\begin{cases} gh = h \Rightarrow g = e \\ k = (kh^{-1})h \end{cases}$$
2. G agit sur lui même par conjugaison:
$$C : G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto ghg^{-1}$$
Cette action n'est en général ni libre, ni transitive, ni effective.
3. $GL(n, \mathbb{R})$ agit sur $M = \mathbb{R}^n - \{0\}$ par multiplication æ gauche:
$$G \times M \to M,\ (A, X) \mapsto AX$$
Cette action est effective et transitive.

1.2. Stabilisateurs et orbites.

1.2.1. DEFINITION. *Soit $\lambda : G \times M \to M$ une action d'un groupe de Lie sur une variété M.*

1. l'orbite d'un point $m \in M$ est:
$$G.m = \{g.m :\ g \in G\} \subset M$$
2. Le stabilisateur d'un point $m \in M$ est:
$$G_m = \{g \in G :\ g.m = m\} \subset G$$

1.2.2. PROPOSITION. *Le stabilisateur G_m d'un point m de M est un sous groupe fermé de G. De plus pour tout $g \in G$*
$$G_{gm} = gG_mg^{-1}$$

Preuve
L'application $G \to M$, $g \mapsto g.m$ est lisse donc continue. Or G_m est l'image réciproque par cette application de $\{m\}$ qui est fermé dans M. Donc G_m est fermé dans G.

Soit g et $h \in G_m$:
$$\begin{cases} g^{-1}.m = g^{-1}g.m = m \\ gh.m = g(.h.m) = g.m = m \end{cases}$$
donc g^{-1} et $gh \in G_m$: G_m est un sous groupe de G.

Soit $g \in G$. Soit $h \in G_{gm}$:
$$g^{-1}hg.m = g^{-1}h(gm) = g^{-1}gm = m$$
et donc $g^{-1}hg \in G_m$ i.e. $h \in gG_mg^{-1}$: $G_{gm} \subset gG_mg^{-1}$. Soit $h \in G_m$:
$$ghg^{-1}gm = ghm = gm$$
et donc $ghg^{-1} \in G_{gm}$: $G_{gm} = gG_mg^{-1}$.

$\square$

1.2.3. LEMME (Théorème du rang constant). *Soit X et Y des variétés lisses et $f : X \to Y$ une application différentiable telle que pour tout $x \in X$ $D_x f$ est de rang constant k. Soit $y \in f(X)$. $f^{-1}(y)$ est une sous variété de X de codimension k.*

Preuve
Soit $S = f^{-1}(y)$. S est une sous variété de codimension k si et seulement si pour tout $x \in S$ il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $S \cap U$ est une sous variété de codimension k. Soit donc $x \in X$. Le problème étant local on peut supposer que $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = \mathbb{R}^m$. $T_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de rang k. Donc il existe des décompositions $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \oplus \mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{m-k} \oplus \mathbb{R}^k$ telles que $\pi \circ T_x f \circ i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ soit un isomorphisme, où i et π sont respectivement l'inclusion et la projection canoniques. Dès lors $det(\pi \circ T_x f \circ i) \neq 0$. Mais l'application $x \mapsto det(\pi \circ T_x f \circ i)$ est continue. Donc il existe un voisinage de x dans lequel $det(\pi \circ T_z f \circ i) \neq 0$. Dès lors au voisinage de x $T_z(\pi \circ f) = \pi \circ T_z f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est surjective. Et donc $\pi \circ f$ est une submersion au voisinage de x. Soit $L = (\pi \circ f)^{-1}(\pi(y))$, sous variété de codimension k de X. Considérons $\tilde{f} : L \to Y$ la restriction de fà L. Soit $z \in Z$. On a $T_z f(h) = 0 \Rightarrow \pi \circ T_z f(h) = 0$. Donc $Ker(T_z f) \subset Ker(\pi \circ T_z f) = T_z L$. Mais $T_z f$ est de rang k. Donc $Ker(T_z f) = T_z L$ et donc $T_z \tilde{f} = 0$. Dès lors $\tilde{f}$ est constante: $f(z) = f(x) = y$. Ainsi au voisinage de x $f^{-1}(y) = L$ sous variété de codimension k de X.

□

1.2.4. PROPOSITION. *G_m est un sous groupe de Lie de G dont l'algèbre de Lie est $\mathcal{G}_m = Ker(T_e\phi)$ où $\phi : G \to M$ est l'application définie par:*

$$\phi(g) = g.m$$

Preuve
D'après la proposition 1.2.2 G_m est un sous groupe fermé de G. Montrons que c'est une sous variété de G. Soit $\phi : G \to M$, $g \mapsto g.m$. On a pour g et $h \in G$:

$$\phi \circ L_g(h) = (gh).m = g.(hm) = \lambda_g \circ \phi(h)$$

avec $\lambda_g(x) = g.x$. Autrement dit:

$$\phi \circ L_g = \lambda_g \circ \phi$$

Dès lors:

$$T_g\phi \circ T_e L_g = T_e(\phi \circ L_g) = T_e(\lambda_g \circ \phi) = T_m \lambda T_e \phi$$

Mais $T_e L_g$ et $T_m \lambda_g$ sont des isomorphismes d'inverses respectifs $T_g L_{g^{-1}}$ et $T_{gm}\lambda_{g^{-1}}$. Et donc $T_g\phi$ et $T_e\phi$ ont même rang pour tout $g \in G$. Ainsi d'après le théorème du rang constant (lemme 1.2.3) $G_m = \phi^{-1}(m)$ est une sous variété de G. De plus $T_e G_m \subset Ker(T_e\phi)$. En effet soit $X \in T_e G_m$ et $f \in C^\infty(M)$:

$$T_e\phi(X)(f) = X(f \circ \phi) = 0$$

puisque $f \circ \phi$ est constant sur G_m. Mais $dim(T_e G_m) = dim Ker(T_e\phi)$. Donc $\mathcal{G}_m = Ker(T_e\phi) = T_e G_m$.

□

1.2.5. THEOREME. *Soit $\lambda : G \times M \to M$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété M et soit $m \in M$. Il existe une structure de variété sur $G.m$ telle que l'application $G \to G.m$, $g \mapsto g.m$ soit une submersion et l'inclusion $i : G.m \hookrightarrow M$ soit une immersion.*

Preuve

(La démonstration est un peu compliquée et n'a pas grand chose à voir avec les systèmes intégrables ...)

Munissons $G.m$ d'une topologie séparée. L'application $\phi : G \to G.m$ est surjective, un antécédant d'un point $g.m$ de $G.m$ étant g^{-1}. Soit g et $h \in G$ tels que $g^{-1}h \in G_m$. Alors:

$$g.m = gg^{-1}h.m = h.m$$

Donc ϕ passe au qutient modulo G_m et induit une application surjective Φ : $G/G_m \to G.m$, G/G_m étant l'ensemble des classes à droites modulo G_m. Ce n'est pas un groupe, ni une variété mais c'est un espace topologique muni de la topologie quotient. Soit $[g]$ et $[h] \in G/G_m$ tels que $\Phi([g]) = \Phi([h])$. Alors $g.m = h.m$ et donc $g^{-1}h.m = g^{-1}g.m = m$ i.e. $g^{-1}h \in G_m$ i.e. $[g] = [h]$. Et donc $\Phi : G/G_m \to G.m$ est bijective. Munissons alors $G.m$ de la topologie quotient sur $G./G_m$:

$$\begin{aligned} U \text{ est un ouvert de } G.m &\Leftrightarrow \Phi^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } G/G_m \\ &\Leftrightarrow \phi^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } G \end{aligned}$$

L'application $\phi : G \to G.m$ est bien sûr continue pour cette topologie. Soit V ouvert de M. Soit $U = i^{-1}(V) = V \cap G.m$:

$$\phi^{-1}(U) = \phi^{-1}(G.m \cap V) = \phi^{1}(G.m) \cap \phi^{-1}(V) = \phi^{-1}(V)$$

or $\phi : G \to M$ est lisse donc $\phi^{-1}(V)$ est un ouvert de G. Donc $i^-1(V)$ est un ouvert de $G.m$: i est continue. Soit maintenant a et $b \in G.m$, $a \neq b$. Notons $a' = i(a)$ et $b' = i(b)$. M étant séparé il existe un ouvert U_a de M contenant a' et un ouvert U_b de M contenant b' tels que $U_a \cap U_b = \oslash$. $i^{-1}(U_a)$ est un ouvert de $G.m$ contenant a, $i^{-1}(U_b)$ est un ouvert de $G.m$ contenant b et:

$$i^{-1}(U_a) \cap i^{-1}(U_b) = i^{-1}(U_a \cap U_b) = i^{-1}(\oslash) = \oslash$$

et donc la topologie sur $G.m$ est séparée.

Construisons maintenant un atlas sur $G.m$. G_m est une sous variété de codimension d de G. Donc il existe un voisinage ouvert U de e dans G et un difféomorphisme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^{n-d} \xrightarrow{\xi} U$ tel que $G_m \cap U = \xi(\mathbb{R}^{n-d})$ et $\xi(0) = e$. Notons $i : \mathbb{R}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ l' immersion canonique. Posons $\mu = \xi \circ i : \mathbb{R}^d \to U$. μ est une immersion donc $Im(T_0\mu) = T_0\xi(\mathbb{R}^d)$ est un sous espace vectoriel de dimension d de $\mathcal{G} = T_eG$. De plus $T_eG_m = T_0\xi(\mathbb{R}^{n-d})$. Donc:

$$T_eG = T_eG_m \oplus Im(T_0\mu)$$

Or $T_eG_m = Ker(T_e\phi)$. Donc $T_0(\phi \circ \mu) = T_e\phi \circ T_0\mu$ est injective. Il existe donc une projection π telle que $\pi \circ T_0(\phi \circ \mu) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ soit inversible: $det(\pi \circ T_0(\phi \circ \mu)) \neq 0$. Il existe donc une boule ouverte B_d centrée en 0 dans $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $t \in B_d$ $det(\pi \circ T_t(\phi \circ \mu)) \neq 0$. Ainsi pour tout $t \in B_d$ $T_t(\phi \circ \mu)$ est injective. Et donc

$\phi \circ \mu : B_d \to M$ est une immersion. De plus $\mu(B_d) \cap G_m = \{e\}$. Donc $\phi \circ \mu$ est injective: c'est un plongement. Définissons $\Psi : B_d \times G_m \to G$ par:

$$\Psi(t, g) = \mu(t).g$$

Ψ est bien sûr lisse. Soit (t_1, g_1) et (t_2, g_2) tels que $\Psi(t_1, g_1) = \Psi(t_2, g_2)$. Alors:

$$\begin{aligned}
\phi \circ \mu(t_1) &= \mu(t_1).m \\
&= \mu(t_1).g_1 m \\
&= \phi \circ \Psi(t_1, g_1) \\
&= \phi \circ \Psi(t_2, m_2) \\
&= \mu(t_2).g_2 m \\
&= \mu(t_2) m \\
&= \phi \circ \mu(t_2)
\end{aligned}$$

donc $t_1 = t_2$. Dès lors $\mu(t_1)g_1 = \mu(t_1)g_2$ et donc $g_1 = g_2$. Ainsi Ψ est injective. Montrons maintenant que pour tout $(t, g) \in B_d \times G_m$ $T_{(t,g)}\Psi : T_x\mathbb{R}^d \oplus T_g G_m \to T_{\mu(t)g}G$ est un isomorphisme. Pour t fixé $\Psi_t = L_{\mu(t)}$. Nous avons vu plus haut que $\phi \circ L_a = \lambda_a \circ \phi$. Donc:

$$T_e L_{\mu(t)g}(T_e G_m) = T_e L_{\mu(t)g}(Ker T_e \phi) = Ker T_{\mu(t)g}\phi$$

Mais pour t fixé $\Psi_t(g) = L_{\mu(t)}(g)$. Donc:

$$\begin{aligned}
T_{t,g}\Psi(0 \oplus T_g G_m) &= T_g L_{\mu(t)}(T_g G_m) \\
&= T_e L_{\mu(t)g}(T_e G_m) \\
&= Ker(T_{\mu(t)g}\phi)
\end{aligned}$$

D'un autre côté $\phi \circ \Psi(t, g) = \phi \circ \mu(t)$. Donc:

$$T_{\Psi(t,g)}\phi(T_{t,g}\Psi(T_d\mathbb{R}^d \oplus 0)) = T_t(\phi \circ \mu)(\mathbb{R}^d)$$

Or $T_t(\phi \circ \mu)(\mathbb{R}^d)$ est de dimension d. Donc $T_{t,g}\Psi(T_d\mathbb{R}^d \oplus 0)$ est nécessairement de dimension d et transverse à $Ker T_{\Psi(t,g)}\phi = T_{t,g}\Psi(0 \oplus T_g G_m)$. Et donc $T_{t,g}\Psi$ est surjective i.e. un isomorphisme. Ainsi Ψ est injectif et est un difféomorphisme local en tout point donc Ψ est un difféomorphisme sur son image qui est un voisinage ouvert de e dans G. Son inverse s'écrit $\pi_1 \times \pi_2 : U \to B_d \times G_m$, π_1 et π_2 étant des submersions.

Définissons pour $g \in G$ $\rho_g : B_d \to M$, $t \mapsto \phi(g.\mu(t))$. On a:

$$\rho_g = \lambda_g \circ \phi \circ \mu$$

donc comme $\lambda_g : M \to M$ est un difféomophisme $\rho_g : B_d \to M$ est un plongement. De plus pour $g \in U$ on a:

$$\begin{aligned}
\rho_g \circ \pi_1(h) &= g.\mu \circ \pi_1(h).m \\
&= g.\mu \circ \pi_1(h).\pi_2(h).m \\
&= L_g \circ \phi \circ \Psi(\pi_1(h), \pi_2(h)) \\
&= L_g \circ \phi(h)
\end{aligned}$$

Donc le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "L_g", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_1"'] & L_g(U) \arrow[d, "\phi"'] \\ B^d \arrow[r, "\rho_g"'] & \rho_g(B^d) \end{tikzcd}$$

En particulier $\phi^{-1}(\rho_g B_d) = L_g(U)$ qui est un ouvert de G. Donc $\rho_g(B_d) \subset G.m$ est un ouvert de $G.m$ par définition de la topologie sur $G.m$. Définissons alors l'atlas sur $G.m$ comme $\{(B_d, \rho_g)\}_{g \in G}$.

1. soit $g.m \in G.m$. $g.m = \rho_g(0)$ donc $g.m \in \rho_g(B_d)$: $\{\rho_g(B_d)\}_{g \in G}$ est un recouvrement de $G.m$.
2. soit g et $h \in G$ tels que $\rho_g(B_d) \cap \rho_h(B_d) \neq \oslash$. ρ_g et ρ_h étant des homéomorphismes il existe des ouverts W_g et W_h de B_d tels que

$$\rho_g(B_d) \cap \rho_h(B_d) = \rho_g(W_g) = \rho_h(W_h)$$

Soit $g' \in G_m$:

$$\rho_g(t) = g.\mu(t).m = g.\mu(t).g'.m = g.Psi(t, g').m = L_g \circ \Psi(t, g')$$

et donc:

$$L_g \circ \Psi(W_1 \times G_m) = L_g \circ \Psi(W_2 \times G_m)$$

Soit alors $\tau : W_1 \to W_2$ définie par:

$$\tau = \pi_1 \circ L_{h^{-1}} \circ L_g \circ \psi$$

τ est un difféomorphisme d'inverse:

$$\tau^{-1} = \pi_1 \circ L_{g^{-1}} \circ L_h \circ \psi$$

De plus:

$$\begin{aligned} \rho_h \circ \tau(t) &= h.\psi(\tau(t)).m \\ &= h.\phi \circ \psi(\tau(t)) \\ &= h.\phi \circ \Psi(\tau(t), \pi_2(h^{-1} g \psi(t))) \\ &= h.h^{-1} g \psi(t) \\ &= \rho_g(t) \end{aligned}$$

et donc $\rho h^{-1} \circ \rho_g = \tau$. Les changements de cartes sont lisses: $G.m$ est une variété.
3. $\rho_g : B_d \to M$ est un plongement donc $i \circ \rho_g^{-1}$est lisse et $i : G.m \to M$ est une immersion.
4. $\rho_g^{-1} \circ \phi(h) = \rho_g^{-1} \circ \rho_h(0) = \pi_1 \circ L_{g^{-1}} \circ L_h \circ \psi$ donc $\phi : G \to G.m$ est un plongement lisse.

□

1.3. Action infinitésimale associée.
Soit $\lambda : G \times M \to M$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété M. Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G. Soit $X \in \mathcal{G}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to G$ son flot: $\phi(t) = exp(tX)$. Il existe un unique champ de vecteurs X_M sur M dont le flot est l'application $\varphi_M : \mathbb{R} \to M$ définie par:

$$\varphi_m(t) = \varphi(t).m$$

Autrement dit à un élément X de $\mathcal{G}$ on associe le champ de vecteurs sur M $X_M : M \to TM$ défini par:

$$X_M(m)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi(t).m)|_{t=0}$$

L'application $\lambda_* : \mathcal{G} \to D(M)$, $X \mapsto X_M$ est appelée action infinitésimale de $\mathcal{G}$ sur M.

1.3.1. PROPOSITION. *L'application $\lambda_* : \mathcal{G} \to D(M)$ est un antihomomorphisme d'algèbre de Lie i.e. λ_* est linéaire et pour tout $X, Y \in \mathcal{G}$:*

$$\boxed{\lambda_*([X,Y]) = -[\lambda_* X, \lambda_* Y]}$$

Preuve
Soit X et $Y \in \mathcal{G}$ de flots respectifs φ et ψ. Le flot de $\alpha X + \beta Y$ est $\alpha\varphi + \beta\psi$. Dès lors:

$$\begin{aligned}
\lambda_*(\alpha X + \beta Y)(m)(f) &= \frac{d}{dt}(f(\alpha\varphi(t).m + \beta\varphi(t).m))|_{t=0} \\
&= \alpha\frac{d}{dt}(f(\varphi(t).m))|_{t=0} + \beta\frac{d}{dt}(f(\varphi(t).m))|_{t=0} \\
&= \alpha\lambda_*(X)(m)(f) + \beta\lambda_*(Y)(m)(f)
\end{aligned}$$

et donc λ_* est linéaire. Soit X et $Y \in \mathcal{G}$. Considérons $f \in C^\infty(G)$:

$$\begin{aligned}
[X,Y](f) &= X(k \mapsto Y(f \circ L_k)) - Y(k \mapsto X \circ L_k) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(e^{tX}.e^{tY}) - f(e^{tY}e^{tX})}{t^2}
\end{aligned}$$

Soit maintenant $m \in M$ et $\phi_m : G \to M$, $g \mapsto g.m$. On a:

$$\lambda_*(X)_m(f) = \frac{d}{dt}f(e^t X.m)|_{t=0} = X(f \circ \phi_m)$$

et en fait pour tout $A \in \mathcal{G}$ $\lambda_*(A)_m(f) = A(f \circ \phi_m)$. Dès lors:

$$\begin{aligned}
[\lambda_* X, \lambda_* Y]_m(f) &= \lambda_*(X)_m(x \mapsto \lambda_*(Y)_x(f)) - \lambda_*(Y)_m(x \mapsto \lambda_*(X)_x(f)) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\lambda_*(Y)(e^{tX}.m)(f) - \lambda_*(Y)_m(f)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(e^{tY}e^{tX}.m) - f(e^{tX}e^{tY}.m)}{t^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f \circ \phi_m(e^{tY}e^{tX}) - f \circ \phi_m(e^{tX}e^{tY})}{t^2} \\
&= -[X,Y](f \circ \phi_m) \\
&= -\lambda_*([X,Y])_m(f)
\end{aligned}$$

et donc $\lambda_*([X,Y]) = -[\lambda_* X, \lambda_* Y]$.

□

1.3.2. REMARQUE. *On a démontré que:*

$$\lambda_*(X)_m(f) = X(f \circ \phi_m)$$

Autrement dit:

$$\boxed{\lambda_*(X)_m = T_e\phi_m(X)}$$

1.3.3. PROPOSITION. *Soit $m \in M$. Alors:*

$$\boxed{T_mG.m = \{\lambda_*(X)_m : X \in \mathcal{G}\}}$$

Preuve
L'application $\phi_m : G \to G.m$ est une submersion. Donc $T_e\phi_m : \mathcal{G} \to T_mG.m$ est surjective. Donc:

$$T_mG.m = \{T_e\phi_m(X) : X \in \mathcal{G}\}$$

Soit $X \in \mathcal{G}$:

$$T_e\phi_m(X)(f) = X(f \circ \phi_m) = \lambda_*(X)_m(f)$$

et donc:

$$T_mG.m = \{T_e\phi_m(X) : X \in \mathcal{G}\} = \{\lambda_*(X)_m : X \in \mathcal{G}\}$$

□

1.3.4. THEOREME (Palais). *Soit G un groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et soit M une variété lisse compacte telle qu'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $\xi : \mathcal{G} \to D(M)$. Il existe une unique action $\lambda : G \times M \to M$ de G sur M telle que $\lambda_* = \xi$.*

Preuve
Admis ...

□

1.3.5. PROPOSITION. *Soit $\lambda : G \times M \to M$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété M. Alors pour tout $m \in M$ on a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "\lambda_*"] \arrow[d, "exp"'] & D(M) \arrow[d, "exp"] \\ G \arrow[r, "\lambda_m"'] & M \end{tikzcd}$$

i.e. pour tout $X \in \mathcal{G}$:

$$\boxed{\lambda_m(e^{tX}) = e^{t\lambda_*(X)_m}}$$

Preuve
Soit $X \in \mathcal{G}$ de flot en e $\varphi_t = e^{tX}$. Le flot de $\lambda_*(X)$ en m est $\varphi_t.m$, ce qui exprime exactement la commutativité du diagramme.

□

2. Orbites coadjointes

Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ sa coalgèbre de Lie. Soit Π le crochet de Poisson sur $\mathcal{G}^*$.

2.0.6. PROPOSITION. *$Ad^* : G\times\mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$, $(g,\xi) \mapsto Ad^*(g)(\xi)$ est une action à gauche de G sur sa coalgèbre de Lie.*

Preuve
Rappelons que $Ad^* : G \to GL(\mathcal{G}^*)$ est une application lisse vérifiant:

$$Ad^*(gh) = Ad^*(g) \circ Ad^*(h)$$

donc:

$$\begin{cases} Ad^*(e) = Ad^*(e) \circ Ad^*(e) \Rightarrow Ad^*(e) = Id \text{ i.e.} Ad^*(e)(\xi) = \xi \forall \xi \in \mathcal{G}^* \\ Ad^*(g, Ad^*(h,\xi)) = Ad^*(g) \circ Ad^*(h)(\xi) = Ad^*((gh))(\xi) \end{cases}$$

et donc Ad^* est une action à gauche.

□

2.1. Orbites coadjointes et fonctions Casimir.

Notons comme prédemment pour $X \in \mathcal{G}$ $f_X \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ définie par $f_X(\xi) = \xi(X)$.

2.1.1. LEMME. *Soit $X \in \mathcal{G}$, $f \in C^\infty(\mathcal{G})^*$ et $\xi \in \mathcal{G}^*$. Alors:*

$$\boxed{\frac{d}{dt}(f(Ad^*_{e^tX}(\xi)))_{t=0} = \{f, f_X\}(\xi)}$$

Preuve
Exprimons tout d'abord $\{f, f_X\}(\xi)$ en coordonnées locales. Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées sur $\mathcal{G}^*$ induit par la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{G}$ (la base dans laquelle sont définis les C^k_{ij}): $x_i(\xi) = \xi_k$. Dans ces coordonnées f_X s'écrit:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)$$

donc $\frac{\partial f_X}{\partial x_i}(\xi) = X_i$ pour tout ξ. Et donc d'après la définition du crochet de Poisson sur $\mathcal{G}^*$:

$$\{f, f_X\}(\xi) = \sum_{i,j,k=1}^{n} C^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) X_i \xi_k$$

Soit maintenant $\varphi : \mathbb{R} \to G$ le flot de X: $\varphi(t) = e^{tX}$. Soit $\psi_\xi : G \to \mathcal{G}^*$, $g \mapsto Ad^*_g(\xi)$:

$$f(Ad^*_{e^tX}(\xi)) = f \circ \psi_\xi \circ \varphi(t)$$

donc:

$$\frac{d}{dt}(f(Ad^*_{e^tX}(\xi)))_{t=0} = T_0(f \circ \psi_\xi \circ \varphi)(\frac{d}{dt})$$

Or $T_0(f \circ \psi_\xi \circ \varphi) = T_\xi f \circ T_e\psi_\xi \circ T_0\varphi$ et $T_0\varphi(\frac{d}{dt}) = X$ puisque φ est le flot de X. Calculons $T_e\psi_\xi : \mathcal{G} \to T_\xi\mathcal{G}^* \cong \mathcal{G}^*$. $\psi_\xi = i_\xi \circ Ad^*$ avec $i_\xi : GL(\mathcal{G}^*) \to \mathcal{G}^*$, $F \mapsto F(\xi)$. i_ξ est linéaire et lorsque on identifie $T_\xi\mathcal{G}^*$ à $\mathcal{G}^*$ $T_e i_\xi$ s'identifie à i_ξ. Dès lors:

$$T_e\psi_\xi = i_\xi \circ T_e Ad^* = i_\xi \circ ad^*$$

Rappelons que $ad^* : \mathcal{G} \to End(\mathcal{G}^*)$ vérifie:

$$< ad^*(X)(\xi), Y > = < \xi, [Y, X] >$$

On a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(Ad^*_{e^tX}(\xi)))_{t=0} &= T_0(f \circ \psi_\xi \circ \varphi)(\frac{d}{dt}) \\ &= T_0 f \circ i_\xi \circ ad^*(X) \\ &= T_0 f(ad^*(X)(\xi)) \end{aligned}$$

Exprimons $ad^*(X)(\xi) \in \mathcal{G}^*$ en coordonnées:

$$ad^*(X)(\xi)(e_i) = < \xi, [e_i, X] > = < \xi, \sum_{j,k=1}^n C_{ij}^k X_j e_k > = \sum_{j,k=1}^n C_{ij}^k X_j \xi_k$$

Dès lors modulo l'identification de $\mathcal{G}^*$ et de $T_\xi \mathcal{G}^*$:

$$ad^*(X)(\xi) = \sum_{i,j,k=1}^n C_{ij}^k X_j \xi_k \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et donc:

$$\frac{d}{dt}(f(Ad^*_{e^tX}(\xi)))_{t=0} = T_0 f(ad^*(X)(\xi)) = \sum_{i,j,k=1}^n C_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) X_i \xi_k = \{f, F_X\}(\xi)$$

□

2.1.2. LEMME. *Soit $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$. Alors $f \in Cas(C^\infty(\mathcal{G}^*))$ si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{G}$ $\{f, f_X\} = 0$.*

Preuve

Si $f \in Cas(C^\infty(\mathcal{G}))$ alors pour tout g $\{f, g\} = 0$. En particulier pour $g = f_X$. Réciproquement supposons que $\{f, f_X\} = 0$ pour tout $X \in \mathcal{G}$. Soit $g \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ et $\xi \in \mathcal{G}^*$. Soit $X \in \mathcal{G}$ défini par:

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\xi) e_i$$

On a:

$$\begin{aligned} 0 &= \{f, f_X\}(\xi) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n C_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) X_j \xi_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n C_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi) \xi_k \\ &= \{f, g\}(\xi) \end{aligned}$$

Mais ceci pour tout $\xi \in \mathcal{G}^*$: $\{f, g\} = 0$ et ceci pour tout g: f est une fonction Casimir.

□

2.1.3. THEOREME (Lie Berezin Kostant Sauriau). *Soit G un groupe de Lie connexe et $\mathcal{G}^*$ sa coalgèbre de Lie munie du crochet de Poisson canonique. Alors:*

$$\boxed{Cas(C^\infty(\mathcal{G}^*)) = C^\infty(\mathcal{G}^*)^{Ad^*_G}}$$

avec $C^\infty(\mathcal{G}^*)^{Ad^*_G} = \{f \in C^\infty(\mathcal{G}^*) : \; f \circ Ad^*_g = f \; \forall \, g \in G\}$.

Preuve

Remarquons tout d'abord que comme G est connexe tout élément g de G s'écrit comme un produit fini $g = e^{X_1} \ldots e^{X_p}$. Dès lors $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)^{Ad^*_G}$ si et seulement si $f \circ Ad^*_{e^X} = f$ pour tout $X \in \mathcal{G}$. En effet si $f \circ Ad^*_{e^X} = f$ pour tout $X \in \mathcal{G}$ alors:

$$f \circ Ad^*_g = f \circ Ad_{e^{X_1} \ldots e^*_{X_p}} = f \circ Ad^*_{e^{X_1}} \circ \ldots Ad^*_{e^{X_p}} = f$$

Supposons que $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)^{Ad^*_G}$. Pour tout $X \in \mathcal{G}$ on a d'après 2.1.1:

$$\{f, f_X\}(\xi) = \frac{d}{dt}(f \circ Ad^*_{e^{tX}}(\xi))_{t=0} = \frac{d}{dt}(f(\xi)) = 0$$

Dès lors d'après 2.1.2 $f \in Cas(C^\infty(\mathcal{G}^*))$.

Réciproquement supposons que $f \in Cas(C^\infty(\mathcal{G}^*))$. Soit $X \in \mathcal{G}$ et $\xi \in \mathcal{G}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f \circ Ad^*_{e^{tX}}(\xi))_{t=u} &= \frac{d}{dt}(f \circ Ad^*_{e^{(t+u)X}}(\xi))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ Ad^*_{e^{tX}}(\xi_u))_{t=0} \quad \text{avec } \xi_u = Ad^*_{e^{uX}}(\xi) \\
&= \{f, f_X\}(\xi_u) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc la fonction $u \mapsto f \circ Ad^*_{e^{uX}}(\xi)$ est constante:

$$f \circ Ad^*_{e^X}(\xi) = f \circ Ad^*_e(\xi) = f(\xi)$$

Mais ceci pour tout ξ et tout X: $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)^{Ad^*_G}$.

$\square$

2.1.4. THEOREME. *Soit $\xi \in \mathcal{G}^*$ et $\mathcal{O}_\xi$ son orbite coadjointe. Si G est connexe il existe un ouvert partout dense dans $\mathcal{G}^*$ tel que*

$$\mathcal{O}_\xi \cap U = \{\eta \in \mathcal{G}^* : \; f(\eta) = f(\xi) : \; f \in Cas(C^\infty(\mathcal{G}^*))\} \cap U$$

Preuve

La preuve est difficile. On peut cependant remarquer que si $f \in Cas(C^\infty(\mathcal{G}^*))$ alors d'après le théorème précédent f est constante égale à $f(\xi)$ sur $\mathcal{O}_\xi$. Donc:

$$\mathcal{O}_\xi \subset \{f = f(\xi) : \; f \in Cas(C^\infty(\mathcal{G}^*))\}$$

$\square$

2.2. Structure symplectique sur les orbites coadjointes.
Rappelons qu'il existe une structure de variété sur $\mathcal{O}_\xi$ pour laquelle $\phi : G \to \mathcal{O}_\xi$, $g \mapsto g.\xi$ est une submersion et $i : \mathcal{O}_\xi \hookrightarrow \mathcal{G}^*$ est une immersion.

Considérons la 1-forme sur G à coefficients dans $\mathcal{G}$ définie par:

$$\boxed{\omega_g(X) = T_g L_{g^{-1}}(X) \in \mathcal{G}}$$

2.2.1. LEMME. *ω est invariante à gauche:*

$$L_h^*\omega = \omega$$

pour tout $h \in G$.

Preuve
Soit $g \in G$ et $X \in T_gG$:

$$\begin{aligned}
L_h^*(\omega)(g)(X) &= \omega_{hg}(T_g L_h(X)) \\
&= T_{hg} L_{g^{-1}h^{-1}} \circ T_g L_h(X) \\
&= T_g L_{g^{-1}h^{-1}h}(X) \\
&= T_g L_{g^{-1}}(X) \\
&= \omega_g(X)
\end{aligned}$$

□

Rappelons que pour une k forme α sur une variété M la $k+1$ forme $d\alpha$ est définie par:

$$\begin{aligned}
d\alpha(X_1, \ldots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_i, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

En particulier si α est une 1 forme:

$$\alpha(X, Y) = X.\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y])$$

où $X.\alpha(Y)$ signifie $X(\alpha(Y))$.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathcal{G}$. On pose pour $f : G \to \mathcal{G}$ lisse:

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X(f_i) e_i$$

Ce qui permet de définir la dérivation d'une k-forme sur G à valeurs dans $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
d\alpha(X_1, \ldots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_i, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

Ainsi en ce qui nous concerne $d\omega$ est définie par:

$$d\omega(X, Y) = X.\omega(Y) - \omega(Y) - \omega([X, Y])$$

Notons pour $\alpha \in \Lambda^2(G, \mathcal{G})$:

$$[\alpha, \alpha](X, Y) = [\alpha(X), \alpha(Y)] - [\alpha(Y), \alpha(X)] = 2[\alpha(X), \alpha(Y)]$$

2.2.2. LEMME. *ω satisfait l'équation de Maurer-Cartan:*

$$\boxed{d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0}$$

Preuve
Soit X et $Y \in T_gG$. Soit $x = T_gL_{g^{-1}}X$ et $y = T_gL_{g^{-1}}Y \in \mathcal{G}$. On a $X = \tilde{x}(g)$ et $Y = \tilde{y}(g)$. Dès lors:

$$d_g\omega(X, Y) = \tilde{x}_g(\omega\tilde{y}) - \tilde{y}_g(\omega\tilde{x}) - \omega_g([X, Y])$$

Or $\omega_h(\tilde{y}) = T_hL_h^{-1}\tilde{y}_h = y$. Donc $h \mapsto \omega_h(\tilde{y})$ est constante et donc $\tilde{x}_g(\omega\tilde{y}) = 0$. De même $\tilde{y}_g(\omega\tilde{x}) = 0$. Et donc:

$$d_g\omega(X, Y) = -[\omega_g(\tilde{X}), \omega_g(\tilde{Y})] = \frac{1}{2}[\omega, \omega]_g(X, Y)$$

□

Définissons alors $\omega_\xi \in \Lambda^1(G)$ par:

$$\boxed{\omega_\xi(g)(X) =< \xi, \omega_g(X) >}$$

2.2.3. LEMME. *Pour tout $g \in G$ et X et $Y \in T_gG$ on a:*

$$\boxed{d_g\omega_\xi(X, Y) =< \xi, d_g\omega(X, Y) >}$$

Preuve
Soit x et $y \in \mathcal{G}$ tels que $X = \tilde{x}_g$ et $Y = \tilde{y}_g$. Par définiton de la dérivation extérieure on a:

$$d_g\omega_\xi(X, Y) = X(\omega_\xi\tilde{y}) - Y(\omega_\xi\tilde{x}) - \omega_\xi([X, Y])$$

Mais $h \mapsto < \xi, \omega_h\tilde{Y} >$ est constante. Donc $X(\omega_\xi\tilde{Y}) = 0$ et de même $Y(\omega_\xi\tilde{X}) = 0$. Donc:

$$d_g\omega_\xi(X, Y) = - < \xi, [X, Y] >$$

Mais d'après l'équation de Maurer-Cartan $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$. Donc:

$$d_g\omega(X, Y) =< \xi, d_g\omega(X, Y) >$$

□

2.2.4. LEMME. *Pour tout X et $Y \in \mathcal{G}$ on a:*

$$\boxed{d_e\omega(X, Y) = - < \xi, [X, Y] >}$$

Preuve
D'après l'équation de Maurer Cartan on a:

$$d_e\omega(X, Y) = -[\omega_e(X), \omega_e(Y)] = -[X, Y]$$

D'où le résultat.

□

2.2.5. LEMME. *Le noyau de $d_e\omega_\xi$ est:*

$$\boxed{Ker(d_e\omega_\xi) = T_eG_\xi = \mathcal{G}_\xi}$$

Preuve

Rappelons que $\mathcal{G}_\xi = KerT_e\phi_\xi$ où $\phi_\xi : g \mapsto g.X$. Dans le contexte de l'action coadjointe $\phi_\xi(g) = Ad^*(g)(\xi)$. Donc $T_e\phi_\xi(X) = ad^*(x)(\xi) = -i_X d_e\omega_\xi$. Et donc $Kerd_e\omega_\xi = KerT_e\phi_\xi$.

□

2.2.6. REMARQUE. *Et donc puisque $d\omega_\xi$ est invariante à gauche $Kerd_g\omega_\xi = T_gG_\xi$.*

2.2.7. LEMME. *Soit $g_\xi \in G_\xi$. Alors*

$$R^*_{g_\xi}(\omega_\xi) = \omega_\xi$$

Preuve

Soit $h \in G$ et $X \in T_hG$:

$$\begin{aligned} R_{g_\xi}(\omega_\xi(h))(X) &= \omega_\xi(hg_\xi)(T_hR_{g_\xi}(X)) \\ &=< \xi, \omega_{hg_\xi}(T_hR_{g_\xi}(X)) > \\ &=< \xi, T_{hg_\xi}L_{g_\xi^{-1}h^{-1}} \circ T_hR_{g_\xi}(X) > \\ &=< \xi, T_h(L_{g_\xi^{-1}} \circ L_{h^{-1}} \circ R_{g_\xi^{-1}})(X) > \\ &=< \xi, T_e(L^{-1}_{g_\xi} \circ R_{g_\xi}) \circ T_hL_{h^{-1}}(X) > \\ &=< \xi, Ad_{g_\xi^{-1}}(T_hL_{h^{-1}}(X) > \\ &=< Ad^*_{g_\xi}(\xi), \omega_h(X) > \\ &=< \xi, \omega_h(X) > \\ &= \omega_\xi(h)(X) \end{aligned}$$

□

Soit la submersion $\phi : G \to \mathcal{O}_\xi$, $g \mapsto g.\xi = Ad^*_g(\xi)$:

$$\begin{cases} T_{g\xi}\mathcal{O}_\xi = ImT_g\phi \\ T_gG_\xi = T_g\phi^{-1}(\xi) = KerT_g\phi \end{cases}$$

Notons $\theta = d\omega_\xi \in \Lambda^2(G)$.

2.2.8. LEMME. *Soit $g \in G$, et X et $Y \in T_gG$ tels que $T_g\phi(X) = T_g\phi(Y)$. Alors pour tout $Z \in T_gG$ $\theta_g(X, Z) = \theta_g(Y, Z)$*

Preuve

$X - Y \in KerT_g\phi = T_gG_\xi = Kerd_g\omega_\xi = Ker\theta_g$. Donc $\theta_g(X - Y, Z) = Z$ pour tout Z.

□

2.2.9. LEMME. *Soit g et $h \in G$ tels que $g\xi = h\xi$ et $X_1, X_2 \in T_gG$ et $Y_1, Y_2 \in T_hG$ tels que $T_g\phi(X_i) = T_h\phi(Y_i)$ pour $i = 1, 2$. Alors:*

$$\theta_g(X_1, X_2) = \theta_h(Y_1, Y_2)$$

Preuve

$g\xi = h\xi$ donc il existe $g_\xi \in G_\xi$ tel que $g = hg_\xi$. Soit pour $i = 1, 2$ $Z_i = T_h R_{g_\xi}(Y_i) \in T_g G$. $\phi \circ R_{g_\xi} = \phi$ puisque $g_\xi \in G_\xi$. Dès lors:

$$T_g\phi(Z_i) = T_h(\phi \circ R_{g_\xi})(Y_i) = T_h\phi(Y_i) = T_g\phi(X_i)$$

Dès lors d'après le lemme précédent $\theta_g(X_1, X_2) = \theta_g(Z_1, Z_2)$. Mais:

$$\begin{aligned}
\theta_g(Z_1, Z_2) &= \theta_{hg\xi}(T_h R_{g_\xi}(Y_1), T_h R_{g_\xi}(Y_2)) \\
&= R^*_{g_\xi}(\theta)(Y_1, Y_2) \\
&= R^*_{g_\xi}(d\omega_\xi)(Y_1, Y_2) \\
&= d(R^*_{g_\xi}\omega_\xi)(Y_1, Y_2) \\
&= d_h\omega_\xi(Y_1, Y_2) \\
&= \theta_h(Y_1, Y_2)
\end{aligned}$$

et donc $\theta_g(X_1, X_2) = \theta_h(Y_1, Y_2)$.

□

2.2.10. THEOREME. *Il existe une unique forme Ω_ξ sur $\mathcal{O}_\xi$ telle $\phi^(\Omega_\xi) = d\omega_\xi$. De plus cette forme est une forme symplectique sur $\mathcal{O}_\xi$.*

Preuve

D'après ce qui précède la définition

$$\Omega_\xi(g.\xi)(\bar{X}, \bar{Y}) = \theta_g(X, Y)$$

avec $\bar{X} = T_g\phi(X)$ et $\bar{Y} = T_g\phi(Y)$ est valide car indépendante du choix de g, X et Y. On définit ainsi de manière unique Ω_ξ.

ϕ est une submersion: localement c'est la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^q$: localement il existe $i : \mathcal{O}_\xi \to G$ telle que $\phi \circ i = id$. Donc localement $i^* \circ \phi^* = id$: ϕ^* est localement injective. Dès lors $d\Omega_\xi = 0$ si et seulement si $d\phi^*(\Omega_\xi) = 0$. Mais $d\phi^*(\Omega_\xi) = \phi^*(d^2\omega_\xi) = 0$. Donc Ω_ξ est fermée.

Soit $X \in T_gG$ telle que pour tout $Y \in T_gG$ $d_g\omega_\xi(X, Y) = 0$. Alors $X \in Ker d_g\omega_\xi = T_gG_\xi$. Donc $\bar{X} = T_g\phi(X) = 0$ puisque $Ker T_g\phi = T_gG_\xi$. Ω_ξ est non dégénérée.

□

CHAPITRE 5

Application Moment

1. Introduction: le moment cinétique

Notons dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$ le vecteur position $\bar{r} = (q_1, q_2, q_3)$ et le vecteur vitesse $\dot{\bar{r}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = (p_1, p_2, p_3)$. Le moment cinétique est défini par:

$$\boxed{L = \bar{r} \times \dot{\bar{r}}}$$

où $\times$ désigne ici le produit vectoriel.

Rappelons que dans un système dynamique on a:

$$\begin{cases} E_T = \frac{1}{2} < \dot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}} > +U \\ \frac{\partial U}{\partial r} = \dot{\bar{r}} \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \frac{dE_T}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{< \dot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}} >}{2} + \frac{dU}{dt} \\ &= < \ddot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}} > + < \frac{\partial U}{\partial r}, \dot{\bar{r}} > \\ &= < \ddot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}} > - < \ddot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}} > \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans un système dynamique il y a conservation de l'énergie: c'est la première loi de conservation.

De la même façon:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \bar{r} \times \ddot{\bar{r}} + \dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}} \\ &= -\bar{r} \times \frac{\partial U}{\partial r} \end{aligned}$$

Ainsi il y a conservation du moment cinétique le long des trajectoires si et seulement si le système est à symétrie centrale (i.e. F et r sont colinéaires avec $F = -\nabla U$).

Interprétons mathématiquement ce moment cinétique.

Soit $so(3)$ l'algèbre de Lie des matrices $3 - 3$ antisymétriques. $so(3)$ est un espace vectoriel de dimension 3 de base:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.0.11. LEMME. *Le crochet de Lie vérifie sur $so(3)$:*

$$\boxed{\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 \\ [X_2, X_3] = X_2 \\ [X_3, X_1] = X_1 \end{cases}}$$

Preuve

C'est un simple (très simple) calcul matriciel.

□

1.0.12. LEMME. *La forme de Killing $K : so(3) \times so(3) \to \mathbb{R}$, $(X,Y) \mapsto tr(XY)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.*

Preuve
La bilinéarité et la symétrie de K est évidente donc il s'agit de vérifier que K est non dégénérée: soit $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$ tel que $K(X,Y) = 0$ pour tout Y. Il est facile de vérifier que:

$$\begin{cases} K(X,X_1) = -2\lambda_1 \\ K(X,X_2) = -2\lambda_2 \\ K(X,X_3) = -2\lambda_3 \end{cases}$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ i.e. $X = 0$.

□

1.0.13. REMARQUE. *$so(3)^*$ s'identifie alors canoniquement à $so(3)$ par l'isomorphisme $X \mapsto i_X K$. Le crochet de Poisson sur $so(3)$ s'écrit dans le systèmes de coordonnées (x_1,x_2,x_3) de $so(3)$ $(x_i(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3) = \lambda_i)$:*

$$\{f,g\}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i,j,k=1}^{3} C_{ij}^k \frac{\partial f}{x_i}\frac{\partial g}{x_j} x_k$$

et donc vu l'expression des C_{ij}^k (d'après 1.0.11) il vient:

$$\boxed{\begin{aligned}\{f,g\} = {} & (\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1})x_3 \\ & + (\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_2})x_1 \\ & + (\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_3})x_2\end{aligned}}$$

Considérons le moment cinétique comme une application de $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ dans $so(3)^* = so(3) = \mathbb{R}^3$:

$$\Gamma(\bar{q},\bar{p}) = \bar{q} \times \bar{p} = (q_2p_3 - q_3p_2)X_1 + (q_3p_1 - q_1p_3)X_2 + (q_1p_2 - q_2p_1)X_3$$

1.0.14. PROPOSITION. *$\Gamma : T^*\mathbb{R}^3 \to so(3)^*$ est un morphisme de Poisson i.e. pour tout $f,g \in C^\infty(so(3)^*)$:*

$$\{f \circ \Gamma, g \circ \Gamma\}_{\mathbb{R}^6} = \{f,g\}_{so(3)^*} \circ \Gamma$$

Preuve
Nous verrons plus tard qu'il suffit de vérifier le résultat pour les fonctions coordonnées x_1,x_2,x_3 de $so(3)^*$.

Le crochet sur $T^*\mathbb{R}^3$ est:

$$\{u,v\} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}$$

Or:

$$\begin{cases} x_1 \circ \Gamma = (q_2p_3 - q_3p_2) \\ x_2 \circ \Gamma = (q_3p_1 - q_1p_3) \\ x_3 \circ \Gamma = (q_1p_2 - q_2p_1) \end{cases}$$

donc:

$$\begin{cases} \{x_1 \circ \Gamma, x_2 \circ \Gamma\} = q_1p_2 - q_2p_1 = x_3 \circ \Gamma = \{x_1, x_2\} \circ \Gamma \\ \{x_2 \circ \Gamma, x_3 \circ \Gamma\} = q_2p_3 - q_3p_2 = x_1 \circ \Gamma = \{x_2, x_3\} \circ \Gamma \\ \{x_3 \circ \Gamma, x_1 \circ \Gamma\} = q_3p_1 - q_1p_3 = x_2 \circ \Gamma = \{x_3, x_2\} \circ \Gamma \end{cases}$$

□

2. Définition

2.0.15. DEFINITION. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et (M, Π) une variété poissonnienne. Une application moment est une application poissonnienne $\mu : M \to \mathcal{G}^*$ i.e. une application lisse $\mu : M \to \mathcal{G}^*$ telle que pour tout $f, g \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$:*

$$\boxed{\{\mu^* f, \mu^* g\}_M = \mu^*\{f, g\}_{\mathcal{G}^*}}$$

Soit $\mu : \mathcal{G}^* \to M$ une application lisse. Définissons $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to C^\infty(M)$ par:

$$\boxed{< \tilde{\mu}(X), x >=< \mu(x), X >}$$

Réciproquement à toute application lisse $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to C^\infty(M)$ correspond une unique application $\mu : M \to \mathcal{G}^*$ défini par cette même relation.

2.0.16. PROPOSITION. *$\mu : (M, \Pi) \to \mathcal{G}^*$ est une application moment si et seulement si $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to (C^\infty(M), \{,\ \}_M)$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie.*

Preuve

Supposons que $\mu^* : C^\infty(\mathcal{G}^*) \to C^\infty(M)$ est poissonnienne. Rappelons que le crochet de Poisson sur $\mathcal{G}^*$ à été défini de manière à ce que pour tout X et $Y \in \mathcal{G}$ on ait:

$$\{f_X, f_Y\} = f_{[X,Y]}$$

avec $f_X : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ défini par:

$$< f_X, \xi >=< \xi, X >$$

De plus pour $X \in \mathcal{G}$ on a:

$$\mu^* f_X(x) = f_X(\mu(x)) = \mu(x)(X) = \tilde{\mu}(X)(x)$$

Soit alors X et $Y \in \mathcal{G}$ et soit $x \in M$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}([X, Y])(x) &=< \mu(x), [X, Y] > \\ &= f_{[X,Y]} \circ \mu(x) \\ &= \{f_X, f_Y\}_{\mathcal{G}^*} \circ \mu(x) \\ &= \mu^*(\{f_X, f_Y\}_{\mathcal{G}^*})(x) \\ &= \{\mu^* f_X, \mu^* f_Y\}_M(x) \\ &= \{\tilde{\mu}(X), \tilde{\mu}(Y)\}_M(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{\mu}([X, Y]) = \{\tilde{\mu}(X), \tilde{\mu}(Y)\}_M$: $\tilde{\mu}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Supposons maintenant que $\tilde{\mu}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathcal{G}$. Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ la base duale et $(x_1, \ldots, x_n)$ le système de coordonnées de $\mathcal{G}^*$ dans cette base. Soit $(m_1, \ldots, m_p)$ un système de coordonnées de M. Nous savons, d'après les propriétés du crochet de Poisson que pour f et $g \in \mathcal{G}^*$ on a:

$$\{f, g\}_{\mathcal{G}^*} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \{x_i, x_j\}_{\mathcal{G}^*}$$

et de même pour u et $v \in C^\infty(M)$:

$$\{u, v\}_M = \sum_{I,J=1}^{p} \frac{\partial u}{\partial m_I} \frac{\partial v}{\partial m_J} \{m_I, m_J\}_M$$

Notons $\mu_i = x_i \circ \mu \in C^\infty(M)$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a avec les notations précédentes $x_i = f_{X_i}$. Dès lors:

$$\begin{aligned}
\{\mu_i, \mu_j\}_M &= \{\mu^*(x_i), \mu^*(x_j)\}_M \\
&= \{\mu^*(f_{X_i}), \mu^*(f_{X_j})\}_M \\
&= \{\tilde{\mu}(X_i), \tilde{\mu}(X_j)\}_M \\
&= \tilde{\mu}([X_i, X_j]) \\
&= \mu^*(f_{[X_i, X_j]}) \\
&= \mu^*(\{f_{X_i}, f_{X_j}\}_{\mathcal{G}^*}) \\
&= \mu^*(\{x_i, x_j\}_{\mathcal{G}^*})
\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\mu^*(\{x_i, x_j\}_{\mathcal{G}^*}) = \{\mu_i, \mu_j\}_M$$

Soit alors f et $g \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$:

$$\begin{aligned}
\{\mu^*(f), \mu^*(g)\}_M &= \sum_{I,J=1}^{p} \frac{\partial f \circ \mu}{\partial m_I} \frac{\partial g \circ \mu}{\partial m_J} \{m_I, m_J\}_M \\
&= \sum_{I,J=1}^{p} (\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \mu) \frac{\partial \mu_i}{\partial m_I}) (\sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ \mu) \frac{\partial \mu_j}{\partial m_J}) \{m_I, m_J\}_M \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \mu)(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ \mu) \sum_{I,J=1}^{p} \frac{\partial \mu_i}{\partial m_I} \frac{\partial \mu_j}{\partial m_J} \{m_I, m_J\}_M \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \mu)(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ \mu) \{\mu_i, \mu_j\}_M \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \mu)(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ \mu)(\{x_i, x_j\}_{\mathcal{G}^*} \circ \mu) \\
&= \mu^*(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \{x_i, x_j\}_{\mathcal{G}^*}) \\
&= \mu^*(\{f, g\}_{\mathcal{G}^*})
\end{aligned}$$

et donc μ est poissonnienne.

$\square$

3. Action induite par une application moment

Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, (M, Π) une variété de Poisson et $\mu : M \to \mathcal{G}^*$ une application moment. Soit $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to C^\infty(M)$ l'homomorphisme d'algèbres de Lie induit.

Définissons $\chi : C^\infty(M) \to D(M)$, $f \mapsto X_f$ avec:

$$X_f(g) = \{f, g\}$$

3.0.17. LEMME. *$\chi : (C^\infty(M), \{,\}) \to (D(M), [,])$ est un homomorphisme d'al- gèbres de Lie.*

Preuve

Soit $f, g, h \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}\chi(\{f,g\})(h) - [\chi(f), \chi(g)](h) &= \{\{f,g\},h\} - \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{f,h\}\} \\ &= -\{h,\{f,g\}\} - \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{h,f\}\} = 0\end{aligned}$$

et donc $\chi(\{f,g\}) = [\chi(f), \chi(g)]$.

□

Dès lors $\Theta = \chi \circ \tilde{\mu} : \mathcal{G} \to D(M)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Si on supposoe que G est simplement connexe et M compact d'après le théorème de Palais il existe une unique action $\lambda : G \times M \to M$ telle que $\lambda_* = -\Theta$.

3.0.18. PROPOSITION. *Si G est connexe alors λ_* est poissonnienne i.e. pour tout $g \in G$ et tout $u, v \in C^\infty(M)$ on a:*

$$\boxed{\{\lambda_g^*(u), \lambda_g^*(v)\} = \lambda_g^*(\{u,v\})}$$

avec $\lambda_g(m) = gm$.

Preuve

Remarquons tout d'abord que si λ_g et λ_h sont poissonniens alors λ_{gh} l'est aussi. En effet $\lambda_{gh} = \lambda_g \circ \lambda_h$. Dès lors:

$$\begin{aligned}\lambda_{gh}^*(\{u,v\}) &= \lambda_h^* \circ \lambda_g^*(\{u,v\}) \\ &= \lambda_h^*(\{\lambda_g^*(u), \lambda_g^*(v)\}) \\ &= \{\lambda_h^* \circ \lambda_g^*(u), \lambda_h^* \circ \lambda_g^*(v)\} \\ &= \{\lambda_{gh}^*(u), \lambda_{gh}^*(v)\}\end{aligned}$$

Or G étant connexe tout élément g de G s'écrit $g = e^{X_1} \ldots e^{X_p}$, avec $X_1, \ldots, X_p \in \mathcal{G}^*$. Il suffit donc de vérifier la proposition pour $g = e^X$, $X \in \mathcal{G}$. Notons $g_t = e^{-tX}$. Soit $a \in M$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\lambda_{g_t}^*(u)_a)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(u(e^{-tX}.a))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(u(e^{t\Theta_a(X)}))|_{t=0} \\ &= \Theta_a(X)(u) \\ &= \{\tilde{\mu}(X), u\}_a\end{aligned}$$

Dès lors:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\{\lambda^*_{g_t}(\{u,v\})_m - \{\lambda^*_{g_t}(u),\lambda^*_{g_t}(v)\}_m]_{t=0}&\\ &= \{\tilde{\mu}(X),\{u,v\}\}_m - \{\{\tilde{\mu}(X),,u\},v\}_m - \{u,\{\tilde{\mu}(X),v\}_m\\ &= 0\end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned}\{\lambda^*_g(\{u,v\})_m - \{\lambda^*_g(u),\lambda^*_g(v)\}_m &= \{\lambda^*_{g_{-1}}(\{u,v\})_m - \{\lambda^*_{g_{-1}}(u),\lambda^*_{g_{-1}}(v)\}_m\\ &= \{\lambda^*_{g_0}(\{u,v\})_m - \{\lambda^*_{g_0}(u),\lambda^*_{g_0}(v)\}_m\\ &= \{u,v\}_m - \{u,v\}_m\\ &= 0\end{aligned}$$

□

3.0.19. PROPOSITION. *Si G est connexe et simplement connexe et M compact alors λ est G-équivariante i.e. pour tout $g \in G$ le diagramme suivant commute:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^* \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda_g} & & \downarrow{\scriptstyle Ad^*_g} \\ M & \xrightarrow[\mu]{} & \mathcal{G}^* \end{array}$$

Preuve

Soit X et $Y \in \mathcal{G}$. On a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{ad} & End(\mathcal{G}) \\ {\scriptstyle exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp} \\ G & \xrightarrow[Ad]{} & GL(\mathcal{G}) \end{array}$$

Donc $Ad_{exp(tX)}(Y) = exp(ad(tX)).Y = exp(tad(X)).Y$ avec $ad(X) \in M_n(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbb{R}^n$. Dès lors, d'après les propriétés de la dérivation matricielle on a:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Ad_{exp(tX)}(Y))|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(e^{tadX}.Y)|_{t=0}\\ &= ad(X).Y\\ &= [X,Y]\end{aligned}$$

λ_g et Ad^*_g étant des morphismes de groupes il suffit de vérifier $\mu \circ \lambda_g = Ad^*_g \circ \mu$ pour $g = e^X$. Soit $g_t = e^{-tX}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\mu(e^{-tX}.m)(Y) - Ad^*_{e^{-tX}} \circ \mu(m)(Y)]_{t=0}&\\ &= \frac{d}{dt}[\tilde{\mu}(Y)(e^{-tX}.m) - <\mu(m), Ad_{e^{tX}}(Y)>]_{t=0}\\ &= \Theta_m(X)(\tilde{\mu}(Y)) - <\mu(m),[X,Y]>\\ &= \{\tilde{\mu}(X),\tilde{\mu}(Y)\}_m - \tilde{\mu}([X,Y])_m\\ &= 0\end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned}\mu(g.m)(Y) - Ad_g^* \circ \mu(m)(Y) &= \mu(e^X.m)(Y) - Ad_{e^X}^* \circ \mu(m)(Y) \\ &= \mu(e^0.m)(Y) - Ad_{e^0}^* \circ \mu(m)(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

4. Moment induit par une action sur une variété symplectique

Soit (M, Ω) une variété symplectique, muni du crochet de Poisson induit:

$$\boxed{\{f, g\} = X_f(g) = \Omega(X_g, X_f)}$$

où X_f est l'unique champ de vecteurs tel que $i_{X_f}(\Omega) = df$.

4.0.20. LEMME. *Si $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ et si X est un champ de vecteurs sur M tel que $L_X(\Omega) = 0$ alors il existe un unique $f \in C^\infty(M)$ tel que $X = X_f$.*

Preuve
Ω est une forme fermée donc:

$$L_X(\Omega) = 0 \Leftrightarrow i_X d\Omega + di_X\Omega = 0 \Leftrightarrow di_X\Omega = 0$$

donc comme $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ $L_X(\Omega) = 0$ si et seulement il existe $f \in C^\infty(M)$ tel que $i_X(\Omega) = df$. Si g est une autre fonction comme ceci alors $df = dg$ et donc $f - g = cst$.

□

4.0.21. LEMME. *Soit $\lambda : G \times M \to M$ une action d'un groupe de Lie sur M. λ est poissonnienne si et seulement si*

$$\boxed{\lambda_g^*(\Omega) = \Omega}$$

pour tout $g \in G$.

Preuve
Remarquons tout d'abord que pour tout $X \in T_m M$ il existe $u \in C^\infty(M)$ tel que $X = X_u(m)$. Il suffit de prendre au voisinage de m u défini par:

$$u(q, p) = \sum_{i=1}^{n} Q_i p_i - P_i q_i$$

si $X = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial}{q_i} + P_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ dans un système de coordonnées canonique (q, p) de M.

Supposons maintenant que λ est poissonnienne. Soit $g \in G$, $m \in M$ et X et $Y \in T_m M$. Soit u et v tels que $X = X_u(m)$ et $Y = Y_u(m)$. Remarquons que:

$$X_{u \circ \lambda_{g^{-1}}}(m) = T_m \lambda_g(X_u)$$

En effet pour $w \in C^\infty(M)$ on a:

$$\begin{aligned} T_m\lambda_g(X_u)(w) &= X_u(m)(w \circ \lambda_g) \\ &= \{u, w \circ \lambda_g\}(m) \\ &= \{u \circ \lambda_g^{-1} \circ \lambda_g, w \circ \lambda_g\}(m) \\ &= \{u \circ \lambda_{g^{-1}}, w\}(gm) \\ &= X_{u \circ \lambda_{g^{-1}}}(gm)(w) \end{aligned}$$

Dès lors:

$$\begin{aligned} \lambda_g^*(\Omega)(X, Y) &= \Omega_{gm}(T_m\lambda_g(X_u), T_m\lambda_g(X_v)) \\ &= \Omega_{gm}(X_{u\circ\lambda_{g^{-1}}}, X_{v\circ\lambda_{g^{-1}}}) \\ &= \{u \circ \lambda_{g^{-1}}, v \circ \lambda_{g^{-1}}\}_{gm} \\ &= \{u, v\}_m \\ &= \Omega_m(X, Y) \end{aligned}$$

et ceci pour tout g, X et Y. Donc $\lambda^*(\Omega) = \Omega$.

Supposons maintenant que $\lambda^*(\Omega) = \Omega$. Montrons à nouveau que

$$X_{u\circ\lambda_{g^{-1}}}(m) = T_m\lambda_g(X_u)$$

Soit $Y \in T_{gm}M$:

$$\begin{aligned} i_{T_mL_g}(X_u)\Omega_{gm}(Y) &= \Omega_{gm}(T_mL_g(X_u), Y) \\ &= \Omega_{gm}(T_mL_g(X_u), T_mL_g \circ T_{gm}L_{g^{-1}})(Y) \\ &= \Omega_m(X_u, T_{gm}L_{g^{-1}}(Y)) \\ &= du(T_{gm}L_{g^{-1}}(Y)) \\ &= T_{gm}L_{g^{-1}}(Y)(u) \\ &= Y(u \circ L_{g^{-1}}) \\ &= d(u \circ L_{g^{-1}})(Y) \end{aligned}$$

Dès lors:

$$\begin{aligned} \{u \circ \lambda_g, v \circ \lambda_g\}_m &= \Omega_m(X_{v\circ\lambda_g}, X_{u\circ\lambda_g}) \\ &= \Omega_m(T_m\lambda_{g^{-1}}(X_u), T_m\lambda_{g^{-1}}(v)) \\ &= \Omega_{gm}(X_v, X_u) \\ &= \{u, v\}(\lambda_g(m)) \end{aligned}$$

et donc λ_g est poissonnienne.

□

4.0.22. PROPOSITION. *Soit G un groupe de Lie, (M, Ω) une variété simplectique et $\lambda : G \times M \to M$ une action poissonnienne de G sur M. Soit $\lambda_* : \mathcal{G} \to D(M)$ l'homomorphisme de Lie induit. Alors pour tout $X \in \mathcal{G}$:*

$$\boxed{L_{\lambda_*(X)}\Omega = 0}$$

Preuve

Soit $\varphi(t)$ le flot de X en e. Le flot de $\lambda_*(X)$ en $m \in M$ est $\phi(t, m) = \varphi(t).m = \lambda_{\varphi(t)}(m)$. L'action λ est poissonnienne donc pour tout $g \in G$ $\lambda_g^*(\Omega_m) = \Omega_{gm}$. Dès lors pour tout t:

$$\phi(t, m)^*(\Omega)_m = \lambda_{\varphi(t)}^*(\Omega_m) = \Omega_{\varphi(t).m}$$

et donc:

$$\begin{aligned} L_{\lambda_*(X)}(\Omega)_m &= \lim_{t\to 0} \frac{\phi(t,m)^*(\Omega_m) - \Omega_m}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\Omega_{\phi(t,m)} - \Omega_m}{t} \\ &= 0 && \text{car } \Omega \text{ est à coefficients constants} \end{aligned}$$

□

Dès lors lorsque $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{G}$ il existe un unique $f \in C^\infty(M)$ à constante près telle que:

$$\boxed{\lambda_*(Y) = -X_f}$$

En choisissant $U(Y)(x_0) = 0$ pour un certain $x_0 \in M$ on définit ainsi une application $U : \mathcal{G} \to C^\infty(M)$.

4.0.23. LEMME. *$U : \mathcal{G} \to C^\infty(M)$ est linéaire.*

Preuve

Soit Y et $Z \in \mathcal{G}$. Soit $f = U(Y)$ et $g = U(Z)$:

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 & i_{\lambda_*(Y)}\Omega = -df \\ g(x_0) = 0 & i_{\lambda_*(Z)}\Omega = -dg \end{cases}$$

donc:

$$\begin{cases} (\alpha f + \beta g)(x_0) = 0 \\ i_{\lambda_*(\alpha Y + \beta Z)}\Omega = \alpha i_{\lambda_*(Y)}\Omega + \beta i_{\lambda_*(Z)}\Omega = -\alpha df - \beta dg = -d(\alpha f + \beta g) \end{cases}$$

donc $U(\alpha Y + \beta Z) = \alpha U(Y) + \beta U(Z)$.

□

Définissons alors $\gamma : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to C^\infty(M)$ par:

$$\boxed{\gamma(Y,Z) = \{U(Y), U(Z)\} - U([Y,Z])}$$

4.0.24. LEMME. *Pour tout $Y, Z \in \mathcal{G}$ $\gamma(Y,Z)$ est une fonction constante sur M.*

Preuve

Soit Y et $Z \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} X_{U([Y,Z])} &= -\lambda_*([Y,Z]) \\ &= [\lambda_*(Y), \lambda_*(Z)] \\ &= [X_{U(Y)}, X_{U(Z)}] \\ &= X_{\{U(Y),U(Z)\}} \end{aligned}$$

et donc $X_{\gamma(Y,Z)} = 0$ donc $d(\gamma(Y,Z)) = 0$ i.e. $\gamma(Y,Z)$ est une fonction constante.

□

Dès lors γ peut être considérée comme une fonction $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$.

4.0.25. LEMME. *$\gamma : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire antisymétrique vérifiant pour tout Y, Z, T:*

$$\gamma([Y,Z],T) + \gamma([Z,T],Y) + \gamma([T,Y],Z) = 0$$

Preuve
D'après la linéarité de U on a:

$$\begin{aligned}\gamma(Y,Z) &= \{U(Y),U(Z)\} - U([Y,Z])\\ &= -\{U(Z),U(Y)\} - U(-[Z,Y])\\ &= -\{U(Z),U(Y)\} + U([Z,Y])\\ &= \gamma(Z,Y)\end{aligned}$$

De plus:

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha Y+\beta Z,T) &= \{U(\alpha Y+\beta Z),U(T)\} - U([\alpha Y+\beta Z,T])\\ &= \{\alpha U(Y)+\beta U(Z),U(T)\} - U(\alpha[Y,T]+\beta[Z,T])\\ &= \alpha\{U(Y),U(T)\}+\beta\{U(Z),U(T)\} - \alpha U([Y,T]) - \beta U([Z,T])\\ &= \alpha\gamma(Y,T)+\beta\gamma(Z,T)\end{aligned}$$

Enfin puisque $\{\ ,\ \}$ et $[\ ,\ ]$ vérifient l'identité de Jacobi et puisque $\gamma(A,B)$ est constant pour tout A,B (et donc $\{\gamma(A,B),f\}=0$ pour tout $f\in C^\infty(M)$):

$$\begin{aligned}&\gamma([Y,Z],T)+\gamma([T,Y],Z)+\gamma([Z,T],Y)\\ &\quad= \{U([Y,Z]),U(T)\} - U([[Y,Z],T]) + \{U([T,Y]),U(Z)\} - U([[T,Y],Z])\\ &\quad+ \{U([Z,T]),U(Y)\} - U([[Z,T],Y])\\ &\quad= \{-\gamma(Y,Z)+\{U(Y),U(Z)\},U(T)\} + \{-\gamma(T,Y)+\{U(T),U(Y)\},U(Z)\}\\ &\quad+ \{-\gamma(Z,T)+\{U(Z),U(T)\},U(Y)\} - U([[Y,Z],T]+[[T,Y],Z]+[[Z,T],Y])\\ &\quad= \{\{U(Y),U(Z)\},U(T)\}+\{\{U(T),U(Y)\},U(Z)\}+\{\{U(Z),U(T)\},U(Y)\}\\ &\quad= 0\end{aligned}$$

□

4.0.26. DEFINITION. *Soit V un $\mathcal{G}$-module i.e. V est un espace vectoriel et il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $\rho:\mathcal{G}\to End(V)$. On définit:*

$$\begin{cases}\mathcal{C}^0(\mathcal{G},V) = \{v\in V:\ \rho(g)(v)=0\ \forall g\in\mathcal{G}\}\\ \mathcal{C}^k(\mathcal{G},V) = \{c:\mathcal{G}^k\to V\ k\text{ - linéaires alternées}\}\quad \text{pour } k\geq 1\end{cases}$$

La différentielle d'Eulenberg MacLane est l'application linéaire $\delta:\mathcal{C}^k(\mathcal{G},V)\to\mathcal{C}^{k+1}(\mathcal{G},V)$ définie par:

$$\boxed{\begin{aligned}\delta c(X_1,\dots,X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\rho(X_i)(c(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{k+1}))\\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq k+1}(-1)^{i+j}c([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{k+1})\end{aligned}}$$

4.0.27. LEMME. $\delta^2=0$

Preuve
Vu la ressemblance avec la différentielle de de Rham il n'y a pas de raisons pour que ce ne soit pas vrai ...

□

4.0.28. REMARQUE. *Dans notre cas on prend $V = \mathbb{R}$ et $\rho = 0$. Donc d'après 4.0.25 $\gamma \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ est un cocycle au sens d'Eulenberg MacLane.*

4.0.29. THEOREME. *Il existe une application moment $\mu : M \to \mathcal{G}^*$ telle que*

$$\lambda_*(Y) = -X_{\tilde{\mu}(Y)}$$

si et seulement si γ est une cochaîne au sens d'Eulenberg MacLane.

Preuve

Supposons que $\tilde{\mu}$ existe. Pour tout $Y \in \mathcal{G}$ $X_{\tilde{\mu}(Y)} = X_{U(Y)}$ donc la fonction $\tilde{\mu}(Y) - U(Y)$ est constante. Soit alors $\beta : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\beta(Y) = \tilde{\mu}(Y) - U(Y)$$

Comme $\tilde{\mu}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie il vient:

$$\begin{aligned}
\delta\beta(Y,Z) &= \beta([Y,Z]) \\
&= \tilde{\mu}([Y,Z]) - U([Y,Z]) \\
&= \{\tilde{\mu}(Y), \tilde{\mu}(Z)\} + \gamma(Y,Z) - \{U(Y), U(Z)\} \\
&= \{U(Y) + \beta(Y), U(Z) + \beta(Z)\} + \gamma(Y,Z) - \{U(Y), U(Z)\} \\
&= \{U(Y), U(Z)\} + \gamma(Y,Z) - \{U(Y), U(Z)\} \\
&= \gamma(Y,Z)
\end{aligned}$$

et donc $\gamma = \delta\beta$.

Réciproquement supposons que $\gamma = \delta\beta$. Soit alors $\tilde{\mu} = U + \beta$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}([Y,Z]) &= U([Y,Z]) + \beta(Y,Z) \\
&= \{U(Y), U(Z)\} - \gamma(Y,Z) + \beta([Y,Z]) \\
&= \{\tilde{\mu}(Y) + \beta(Y), \tilde{\mu}(Z) + \beta(Z)\} - \gamma(Y,Z) + \delta\beta(Y,Z) \\
&= \{\tilde{\mu}(Y), \tilde{\mu}(Z)\}
\end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{\mu}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie et induit donc une application moment.

□

5. Structure modifiée

Soit $(\mathcal{G}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie et $\gamma \in \mathcal{C}^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ un cocycle au sens d'Eulenberg MacLane. Soit $c \notin \mathcal{G}$.

5.0.30. DEFINITION. *L'extension centrale de $\mathcal{G}$ associée au couple (c, γ) est l'espace vectoriel $\mathcal{G}_c = \mathcal{G} \oplus \mathbb{R}c$ muni du crochet $[\ ,\ ]_c : \mathcal{G}_c \times \mathcal{G}_c \to \mathbb{R}$ défini par:*

$$\boxed{[X + \alpha c, Y + \beta c]_c = [X,Y] + \gamma(X,Y)c}$$

5.0.31. PROPOSITION. *$(\mathcal{G}_c, [\ ,\ ]_c)$ est une algèbre de Lie.*

Preuve

Puisque $[\ ,\ ]$ et γ sont bilinéaires et antisymétriques $[\ ,\ ]_c$ est bilinéaire et antisymétrique. Vérifions l'identité de Jacobi:

$$\begin{aligned}
[[X + xc, Y + yc]_c, Z + zc]_c &= [[X,Y] + \gamma(X,Y)c, Z + zc]_c \\
&= [[X,Y],Z] + \gamma([X,Y],Z)
\end{aligned}$$

Dès lors:

$$\begin{aligned}
&[[X+xc,Y+yc]_c,Z+zc]_c+[[Z+zc,X+xc]_c,Y+yc]_c\\
&\qquad\qquad [[Y+yc,Z+zc]_c,X+xc]_c\\
&=[[X,Y],Z]+\gamma([X,Y],Z)+[[Z,X],Y]+\gamma([Z,X],Y)\\
&\qquad\qquad +[[Y,Z],X]+\gamma([Y,Z],X)\\
&=0
\end{aligned}$$

□

5.0.32. REMARQUE. *Soit $\mathcal{G}_c^*$ la coalgèbre de Lie associée. Soit $(e_1,\dots,e_n,c)$ base canonique de $\mathcal{G}_c$. Dans cette base on a:*

$$\begin{cases}[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k+\gamma_{ij}c\\ [e_i,c]=0\\ [e_i,c]=0\end{cases}$$

Dès lors dans le système de coordonnées $(x_1,\dots,x_n,y)$ de $\mathcal{G}_c^*$ induit par cette base le crochet de Poisson s'écrit:

$$\boxed{\{f,g\}_c(x,y)=\sum_{i,j=1}^n\Big(\sum_{k=1}^n C_{ij}^k x_k+\gamma_{ij}y\Big)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}}$$

Soit $i:\mathcal{G}^*\to\mathcal{G}_c^*$ l'inclusion canonique: $i(e_j^*)*e_j^*$.

5.0.33. PROPOSITION. $i:(\mathcal{G}^*,\{\ ,\ \})\to(\mathcal{G}_c^*,\{\ ,\ \})$ *est poissonnienne.*

Preuve
Soit f et $g\in C^\infty(\mathcal{G}_c^*)$:

$$\begin{aligned}
\{f,g\}_c\circ i(x)&=\sum_{i,j=1}^n\Big(\sum_{k=1}^n C_{ij}^k x_k\circ i(x)+\gamma_{ij}\underbrace{y\circ i}_{=0}\Big)\frac{\partial f}{\partial x_i}(i(x))\frac{\partial g}{\partial x_j}(i(x))\\
&=\sum_{i,j,k=1}^n C_{ij}^k x_k(x)\frac{\partial f\circ i}{\partial x_i}(x)\frac{\partial g\circ i}{\partial x_j}(x)\\
&=\{f\circ i,g\circ i\}(x)
\end{aligned}$$

□

5.0.34. REMARQUE. *Soit $i_1:\mathcal{G}^*\to\mathcal{G}_c^*$, $x\mapsto(x,1)$. (i_1 est un plongement lisse mais n'est pas linéaire) et soit $\pi:\mathcal{G}_c^*\to\mathcal{G}^*$ la projection canonique: $\pi(e_i^*)=e_i^*$ et $\pi(c^*)=0$. Soit le crochet $\{\ ,\ \}_\gamma$ défini sur $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ par:*

$$\{f,g\}_\gamma=\{f\circ\pi,g\circ\pi\}_c\circ i_1$$

En coordonnées locales $\{\ ,\ \}_\gamma$ *s'écrit:*

$$\begin{aligned}\{f,g\}_\gamma(x) &= \{f\circ\pi, g\circ\pi\}_c\circ i_1(x)\\ &= \sum_{i,j=1}^n(\sum_{k=1}^n C_{ij}^k x_k\circ i_1(x)+\gamma_{ij}\underbrace{y\circ i_1(x)}_{=1})\frac{\partial f\circ\pi}{\partial x_i}(i_1(x))\frac{\partial g\circ\pi}{\partial x_j}(i_1(x))\\ &= \sum_{i,j=1}^n(\sum_{k=1}^n C_{ij}^k x_k(x)+\gamma_{ij})\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\end{aligned}$$

i.e.:

$$\boxed{\{f,g\}_\gamma = \sum_{i,j=1}^n(\sum_{k=1}^n C_{ij}^k x_k+\gamma_{ij})\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}}$$

$\{\ ,\ \}_\gamma$ *est un crochet de Poisson. En effet:*

$$\{g,f\}_\gamma = \{g\circ\pi, f\circ\pi\}_c\circ i_1 = -\{f\circ\pi, g\circ\pi\}_c\circ i_1 = -\{f,g\}_\gamma$$

donc $\{\ ,\ \}$ *est antisymétrique.*

$$\begin{aligned}\{\lambda f+\mu g, h\}_\gamma &= \{\lambda f\circ\pi+\mu g\circ\pi\, h\}_c\circ i_1\\ &= \lambda\{f\circ\pi, h\circ\pi\}_c\circ i_1+\mu\{g\circ\pi, h\circ\pi\}_c\circ i_1\\ &= \lambda\{f,h\}_\gamma+\mu\{g,h\}_\gamma\end{aligned}$$

donc $\{\ ,\ \}$ *est bilinéaire.*

$$\begin{aligned}\{f,gh\}(x) &= \{f\circ\pi, g\circ\pi h\circ\pi\}_c\circ i_1(x)\\ &= h\circ\pi\circ i_1(x)\{f\circ\pi, g\circ\pi\}_c\circ i_1(x)+g\circ\pi\circ i_1(x)\{f\circ\pi, h\circ\pi\}_c\circ i_1(x)\\ &= h(x)\{f,g\}(x)+g(x)\{f,h\}(x)\end{aligned}$$

donc $\{\ ,\ \}$ *vérifie la règle de Leibnitz. Enfin:*

$$\begin{aligned}\{F\circ i_1\circ\pi, G\}_c\circ i_1(x) &= \sum_{i,j=1}^n(\sum_{k=1}^n C_{ij}^k x_k+\gamma_{ij})\frac{\partial F\circ i_1\circ\pi}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}\\ &= \sum_{i,j=1}^n(\sum_{k=1}^n C_{ij}^k x_k+\gamma_{ij})\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}\\ &= \{F,G\}_c\circ i_1(x)\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}\{\{f,g\}_\gamma, h\}_\gamma &= \{\{f,g\}_\gamma\circ\pi, h\circ\pi\}_c\circ i_1\\ &= \{\{f\circ\pi, g\circ\pi\}_c\circ i_1\circ\pi, h\circ\pi\}_c\circ i_1\\ &= \{\{f\circ\pi, g\circ\pi\}_c, h\circ\pi\}\circ i_1\end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned}&\{\{f,g\}_\gamma, h\}_\gamma+\{\{h,f\}_\gamma, g\}_\gamma+\{\{g,h\}_\gamma, f\}_\gamma\\ &\quad= \{\{f\circ\pi, g\circ\pi\}_c, h\circ\pi\}\circ i_1+\{\{h\circ\pi, f\circ\pi\}_c, g\circ\pi\}\circ i_1\\ &\quad+\{\{g\circ\pi, h\circ\pi\}_c, f\circ\pi\}\circ i_1\\ &\quad= 0\end{aligned}$$

i.e. $\{\ ,\ \}_\gamma$ *vérifie l'identité de Jacobi.*

Pour les mêmes raisons que précécemment le plongement $i_1 : (\mathcal{G}^*, \{\ ,\ \}_\gamma) \to (\mathcal{G}_c^*, \{\ ,\ \})$ *est poissonnien.*

6. Relèvement d'une action sur le fibré cotangent

Considérons une action $\lambda : G \times N \to N$ d'un groupe de Lie G sur une variété N. Sot T^*N le fibré cotangent de N muni de da forme symplectique canonique $\Omega = d\rho$, ρ étant la forme de Liouville.

L'action λ se relève en une action $\Lambda : G \times T^*N \to T^*N$ définie par:

$$\boxed{\Lambda(g, \xi_x) = (T_{gx}\lambda_{g^{-1}})^*(\xi_x)}$$

6.0.35. THEOREME. *L'action* Λ *est hamiltonienne est à un moment associé* $\mu : T^*N \to \mathcal{G}^*$ *défini par*

$$\boxed{< \mu(\xi_x), X >=< \xi_x, T_e\lambda_x(X) >}$$

Preuve

Montrons tout d'abord que λ est hamiltonienne. Pour cela montrons que $\Lambda_g^*(\rho) = \rho$. Rappelons que la forme de Liouville est définie par:

$$< \rho(\xi_x), X >=< \xi_x, T_{\xi_x}\pi(X) >$$

pour $X \in T_{\xi_x}T^*N$, $\pi : T^*N \to N$ étant la projection canonique. Soit $g \in G$, $\xi_x \in T_x^*N$ et $X \in T_{\xi_x}T^*N$:

$$\begin{aligned}
\Lambda_g^*(\rho_{\xi_x})(X) &= \rho_{\Lambda_g(\xi_x)}(T_{\xi_x}\Lambda_g(X)) \\
&=< \Lambda_g(\xi_x), T_{\Lambda_g(\xi_x)}\pi \circ T_{\xi_x}\Lambda_g(X) > \\
&=< \xi_x, T_{gx}\lambda_{g^{-1}} \circ T_{\Lambda_g(\xi_x)}\pi \circ T_{\xi_x}\Lambda_g(X) > \\
&=< \xi_x T_{\xi_x}(\lambda_{g^{-1}} \circ \pi \circ \Lambda_g)(X) >
\end{aligned}$$

Mais $\lambda_{g^{-1}} \circ \pi \circ \Lambda_g(\xi_y) = g^{-1}gy = y = \pi(\xi_y)$. Donc:

$$\Lambda_g^*(\rho_{\xi_x})(X) =< \xi_x, T_{\xi_x}\pi(X) >= \rho_{\xi_x}(X)$$

et donc $\Lambda_g^*(\rho) = \rho$. Et donc:

$$\Lambda_g^*(\Omega) = \Lambda_g^*(d\rho) = d\Lambda_g^*(\rho) = d\rho = \Omega$$

Ainsi Λ est hamiltonienne.

Soit $X \in \mathcal{G}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to G$ son flot. Le flot $\phi : \mathbb{R} \times T^*N \to T^*N$ de $\Lambda_*(X)$ est défini par:

$$\phi(t, \xi_x) = \Lambda(\varphi(t), \xi_x)$$

Dès lors:

$$L_{\Lambda^*(X)}\rho = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_t^*(\rho) - \rho}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\Lambda_{\varphi(t)}^*(\rho) - \rho}{t} = 0$$

et donc $i_{\Lambda_*(X)}d\rho + d(i_{\Lambda_*(X)}\rho) = 0$ soit:

$$i_{\lambda_*(X)}\Omega = -d(i_{\Lambda_*(X)}\rho)$$

Mais:

$$\begin{aligned} i_{\Lambda_*(X)}\rho(\xi_x) &= \rho_{\xi_x}(\Lambda_*(X)_{\xi_x}) \\ &=< \rho(\xi_x), T_e\Lambda_{\xi_x}(X) > \\ &=< \xi_x, T_{\xi_x}\pi \circ T_e\Lambda_{\xi_x}(X) > \\ &=< \xi_x, T_e(\pi \circ \Lambda_{\xi_x})(X) > \end{aligned}$$

Or $\pi \circ \Lambda_{\xi_x}(g) = gx = \lambda_x$. Donc:

$$i_{\Lambda_*(X)}\rho(\xi_x) =< \xi_x, T_e\lambda_x(X) >= \mu(\xi_x)(X) = \tilde{\mu}(X)(\xi_x)$$

Dès lors:

$$i_{\Lambda_*(X)}\Omega = -d\tilde{\mu}(X) = -i_{X_{\tilde{\mu}(X)}}\Omega$$

et donc comme Ω est non dégénérée il vient:

$$\Lambda_*(X) = -X_{\tilde{\mu}(X)}$$

Il reste à montrer que $\tilde{\mu}$ est un homomorphisme de Lie. Définissons pour $X \in D(T^*M)$, $F_X \in C^\infty(T^*N)$:

$$F_X(\xi_x) =< \xi_x, X(x) >$$

Dans le système de coordonnées (x, ξ) de T^*N F_X s'écrit:

$$F_X(x,\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i X_i(x)$$

Donc:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_X}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_j(x)}{\partial x_i}\xi_j \\ \frac{\partial F_X}{\partial \xi_i} = X_i(x) \end{cases}$$

Donc en coordonnées $\{F_X, F_Y\}$ s'écrit:

$$\{F_X, F_Y\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_X}{\partial \xi_j}\frac{\partial F_Y}{\partial x_j} - \frac{\partial F_X}{\partial x_j}\frac{\partial F_Y}{\partial \xi_j} = \sum_{i,j=1}^n X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}\xi_i - Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\xi_i$$

D'un autre côte $[X, Y]$ s'écrit en coordonnées:

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^n (X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Donc

$$F_{[X,Y]} = \sum_{i,j=1}^n (X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x_j})\xi_i = \{F_X, F_Y\}$$

Et donc $F : X \mapsto F_X$ est un homomorphise de Lie. Or:

$$\tilde{\mu}(X)(\xi_x) =< \xi_x, T_e\lambda_x(X) >=< \xi_x, \lambda_*(X)(x) >= F \circ \lambda_*(X)$$

Donc $\tilde{\mu} = F \circ \lambda_*$. F et λ_* étant des homomorphismes de Lie, $\tilde{\mu}$ est un homomorphime de Lie.

$\square$

7. Exemples

7.1. Relèvement de l'action de G sur lui même par multiplication à gauche.

Considérons l'action $\lambda : G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto gx$. D'après la section précédente λ se relève en une action hamiltonienne $\Lambda : G \times T^*G \to T^*G$ définie par:

$$\Lambda(g, \xi_x) = (T_{gx}\lambda_{g^{-1}})^*(\xi_x) = (T_{gx}L_{g^{-1}})^*(X)$$

et le moment associé est:

$$\mu(\xi_x) = (T_e\lambda_x)^*(\xi_x) = (T_eR_x)^*(\xi_x)$$

Mais T^*G s'identifie canoniquement à $G \times \mathcal{G}^*$ via le difféomorphisme:

$$\phi(\xi_x) = (x, (T_eL_x)^*(\xi_x))$$

dont l'inverse est:

$$\psi(x, \xi) = (T_xL_{x^{-1}})^*(\xi)$$

Déterminons l'expression de Λ et μ modulo ces identifications:

$$\begin{aligned}\Lambda(g, (x, \xi)) &= \phi(\Lambda(g, \psi(x, \xi)))\\ &= \phi(\Lambda(g, (T_xL_{x^{-1}})^*(\xi)))\\ &= \phi((T_{gx}L_{g^{-1}})^* \circ (T_xL_{x^{-1}})^*(\xi))\\ &= \phi((T_{gx}L_{x^{-1}g^{-1}})^*(\xi))\\ &= (gx, (T_eL_{gx})^* \circ (T_{gx}L_{x^{-1}g^{-1}})^*(\xi))\\ &= (gx, \xi)\end{aligned}$$

Ainsi l'action $\Lambda : G \times (G \times \mathcal{G}^*) \to G \times \mathcal{G}^*$ sécrit:

$$\boxed{\Lambda(g, (x, \xi)) = (gx, \xi)}$$

De la même façon:

$$\begin{aligned}\mu(x, \xi) &= \mu(\psi(x, \xi))\\ &= \mu((T_xL_{x^{-1}})^*(\xi))\\ &= (T_eR_x)^* \circ (T_xL_{x^{-1}})^*(\xi)\\ &= (T_eL_{x^{-1}} \circ R_x)^*(\xi)\\ &= Ad_x^*(\xi)\end{aligned}$$

et donc:

$$\boxed{\mu(x, \xi) = Ad_x^*(\xi)}$$

7.2. Relèvement de l'action de G sur lui même par multiplication à droite.

Considérons l'action $\lambda : G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto xg^{-1}$. D'après la section précédente λ se relève en une action hamiltonienne $\Lambda : G \times T^*G \to T^*G$ définie par:

$$\Lambda(g, \xi_x) = (T_{xg^{-1}}R_g)^*(X)$$

et le moment associé est:

$$\mu(\xi_x) = (T_e\lambda_x)^*(\xi_x) = (T_eL_x \circ \iota)^*(\xi_x) = -(T_eL_x)^*(\xi_x)$$

où $\iota(g) = g^{-1}$ $(T_e\iota = -id)$. Comme précédemment déterminons l'expression de Λ et μ modulo les identifications:

$$\begin{aligned}
\Lambda(g,(x,\xi)) &= \phi(\Lambda(g,\psi(x,\xi))) \\
&= \phi(\Lambda(g,(T_xL_{x^{-1}})^*(\xi))) \\
&= \phi((T_{xg^{-1}}R_g)^* \circ (T_xL_{x^{-1}})^*(\xi)) \\
&= \phi(T_{xg^{-1}}(L_{x^{-1}} \circ R_g)^*(\xi)) \\
&= (xg^{-1}, (T_eL_{xg^{-1}})^* \circ (T_{xg^{-1}}L_{x^{-1}} \circ R_g)^*(\xi)) \\
&= (xg^{-1}, (T_eL_{x^{-1}} \circ R_g \circ L_{xg^{-1}})^*(\xi)) \\
&= (xg^{-1}, (T_eL_{g^{-1}} \circ R_g)^*(\xi)) \\
&= (xg^{-1}, Ad_g^*(\xi))
\end{aligned}$$

soit:

$$\boxed{\Lambda(g,(x,\xi)) = (xg^{-1}, Ad_g^*(\xi))}$$

Et en ce qui concerne μ:

$$\begin{aligned}
\mu(x,\xi) &= \mu(\psi(x,\xi)) \\
&= \mu((T_xL_{x^{-1}})^*(\xi)) \\
&= -(T_eL_x)^* \circ (T_xL_{x^{-1}})^*(\xi) \\
&= -\xi
\end{aligned}$$

soit:

$$\boxed{\mu(x,\xi) = -\xi}$$

7.3. Action de S^1 sur $\mathbb{C}$.

Soit sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ les coordonnées canoniques (x,y) est la forme symplectique $\Omega = dx \wedge dy$. COnsidérons l'action de S^1 sur $\mathbb{C}$ définie par:

$$\lambda(e^{i\theta}, z) = e^{i\theta}z = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y) + i(\cos(\theta)y + \sin(\theta)x)$$

$\lambda_* : T_eS^1 \to D(\mathbb{C})$ est défini par:

$$\begin{aligned}
\lambda_*(\frac{d}{d\theta})(x,y) &= T_e(\lambda_{(x,y)})(\frac{d}{d\theta}) \\
&= \frac{d}{d\theta}(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y)_{\theta=0}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{d}{d\theta}(\cos(\theta)y + \sin(\theta)x)_{\theta=0}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned}
i_{\lambda_*(\frac{d}{d\theta})}\Omega &= dx(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})dy - dy(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})dx \\
&= -ydy - xdx \\
&= -d(\frac{x^2+y^2}{2})
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{\mu}$ défini par $\tilde{\mu}(\frac{d}{d\theta}) = \frac{x^2+y^2}{2}$ est un homomorphisme de Lie et défini donc le moment μ associé à λ:

$$\boxed{\mu(x+iy) = \frac{x^2+y^2}{2}}$$

(on identifie $(T_eS^1)^*$ à $\mathbb{R}$).

De la même façon l'action $\lambda : S^1 \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$(e^{i\theta}, (z_1, \ldots, z_n)) \mapsto (e^{i\theta}z_1, \ldots, e^{i\theta}z_n)$$

à pour moment associé:

$$\boxed{\mu(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$$

7.4. Action de S^1 sur S^2.

Soit sur S^2 les coordonnées cylindriques (z, φ) et soit la forme symplectique $\Omega = dz \wedge d\varphi$. Soit l'action de S^1 sur $S2$ par rotation sur le plan $z = cst$:

$$\lambda(e^{i\theta}, (z, \varphi + \theta))$$

Comme précédemment:

$$\lambda_*(\frac{d}{d\theta}) = \frac{d}{d\theta}(z)_{\theta=0}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{d}{d\theta}(\varphi+\theta)_{\theta=0}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Donc:

$$i_{\lambda_*(\frac{d}{d\theta})}\Omega = dz(\frac{\partial}{\partial\varphi})d\varphi + d\varphi(\frac{\partial}{\partial\varphi})dz = dz$$

et donc le moment associé à cette action est:

$$\boxed{\mu(z, \varphi) = z}$$

7.5. Action de S^1 sur le tore $T^2 = S^1 \times S^1$.

Soit sur le tore T^2 les coordonnées (φ_1, φ_2) et la forme symplectique $\Omega = d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$ et considérons l'action $\lambda : S^1 \times T^2 \to T^2$ définie par:

$$\lambda(e^{i\theta}, (e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})) = (e^{i\varphi_1}, e^{i(\varphi_2+\theta)})$$

Cette action est hamiltonienne:

$$\lambda_{e^{i\theta}}(\Omega) = d\varphi_1 \wedge d(\varphi_2 + \theta) = d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 = \Omega$$

et cependant il n'y a pas de moment associé. En effet:

$$i_{\lambda_*(\frac{d}{d\theta})}\Omega = i_{\frac{\partial}{\partial\varphi_2}}(d\varphi_1 \wedge d\varphi_2) = -d\varphi_1$$

et la fonction φ_1 n'est définie que localement (définie à 2π près) donc $\tilde{\mu}$ et μ n'existent pas.

7.6. Action de $Su(n)$ sur $T^*su(n)$.
Soit le groupe de Lie $G = SU(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I$ et $det(A) = 1\}$ et son algèbre de Lie $\mathcal{G} = su(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \bar{A}^t = -A$ et $Tr(A) = 0\}$. Nous montrerons dans le chapître "Intégrabilité des paires de Lax" que cette algèbre de Lie est semi-simple (i.e. que la forme de Killing est non dégénérée) et que l'action λ de G sur $T^*\mathcal{G} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^* = \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ définie par

$$\boxed{\lambda(g,(X,L)) = (gXg^{-1}, gLg^{-1})}$$

est hamiltonienne pour la forme symplectique sur $T^*\mathcal{G}$

$$\boxed{\Omega = Tr(dX \wedge dL)}$$

et que le moment

$$\boxed{\mu(X,L) = [X,L]}$$

lui est associé.

8. Moment et système hamiltonien

8.0.1. THEOREME. *Soit (H,Ω) un système hamiltonien sur une variété M invariant par une action hamiltonienne d'un groupe de Lie associé à un moment μ. Alors μ est une intégrale première du système hamiltonien (H,Ω) i.e. pour tout $X \in \mathcal{G}$:*

$$\{\tilde{\mu}(X),, H\} = 0$$

Preuve
Notons λ l'action de G sur Soit $X \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\{\tilde{\mu}(X), H\} &= \Omega(X_{\tilde{\mu}(X)}, X_H)\\ &= \Omega(X_H, \lambda_*(X))\\ &= -dH(\lambda_*(X))\\ &= -\lambda_*(X)(H)\end{aligned}$$

Or $\lambda_*(X)_x(H) = X(H \circ \lambda_x)$ et comme H est invariante par rapport à λ $g \mapsto H(gx) = H(x)$ est constante. Donc $\lambda_*(X)_x(H) = 0$ pour tout x: $\{\tilde{\mu}(X), H\} = 0$.

$\square$

CHAPITRE 6

Espace des phases réduit

1. Structure symplectique sur l'espace des phases réduit

Soit (M, Ω) une variété symplectique et $G \times M \xrightarrow{\lambda} M$ une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur M:

$$\forall\, g \in G \;\; \lambda_g^*(\Omega) = \Omega$$

Supposons de plus qu'il existe une appliquation moment $\mu : M \to \mathcal{G}^*$ associée à cette action:

$$\forall\, Y \in \mathcal{G} \;\; \lambda_*(Y) = -X_{\tilde{\mu}(Y)}$$

1.0.2. DEFINITION. *Un élément c de $\mathcal{G}^*$ est dit régulier si $M_c = \mu^{-1}(c)$ est une sous variété de M et si pour tout $x \in M_c$ $Ker(T_x\mu) = T_x M_c$.*

1.0.3. REMARQUE. *Si c est régulier alors M_c est une sous variété de M.*

1.0.4. LEMME. *Soit $G_c = \{g \in G : Ad_g^*(c) = c$. Si G est connexe et simplement connexe alors pour tout $x \in M_c$ et tout $g \in G_c$ $g.x \in M_c$.*

Preuve
On sait que lorsque G est connexe et simplement connexe μ est G-équivariante i.e. pour tout $g \in G$ le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\lambda_g"'] & \mathcal{G}^* \arrow[d, "Ad_g^*"] \\ M \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{G}^* \end{tikzcd}$$

Dès lors pour $g \in G_c$ et $x \in M_c$:

$$\mu(g.m) = \mu \circ \lambda_g(x) = Ad_g^* \circ \mu(c) = Ad_g^*(c) = c$$

□

1.0.5. REMARQUE. *Dès lors lorsque c est une valeur régulière et G est connexe et simplement connexe l'action de G sur M induit une action du sous groupe de Lie G_c de G sur la sous variété M_c.*

1.0.6. THEOREME. *Si G est connexe et simplement connexe et si de plus*

1. *c est une valeur régulière*
2. *G_c est compact*
3. *G_c opère sur M_c de façon libre et transitive*

alors il existe une structure lisse naturelle sur M_c/G_c telle que $\pi_c : M_c \to M_c/G_c$ soit une submersion.

Preuve
Admis ...

□

1.0.7. REMARQUE. *M_c/G_c est alors appelé espace des phases réduit.*

1.0.8. THEOREME (Mardsen-Weinstein). *Si G est connexe et simplement con- nexe et si de plus*

1. *c est une valeur régulière*
2. *G_c est compact*
3. *G_c opère sur M_c de façon libre et transitive*

alors il existe unee unique forme syymplectique Ω_c sur M_c/G_c telle que

$$\boxed{\pi_c^*(\Omega_c) = i_c^*(\Omega)}$$

où $\pi_c : M_c \to M_c/G_c$ est la projection canonique et $i_c : M_c \to M$ est l'inclusion canonique.

Preuve

Montrons tout d'abord le résultat suivant:

1.0.9. LEMME. *Soit $x \in M_c$. Alors*

$$T_xM_c = (T_xG.x)^\perp$$

i.e.

$$T_xM_c = \{X \in T_xM : \Omega_x(X,Y) = 0\ \forall Y \in T_xG.x\}$$

Preuve

Rappelons que $T_xM_c = T_xi(T_xM_c) \subset T_xM$ et $T_xG.x = \{\lambda_*(A)_x : A \in \mathcal{G}\}$. Soit $X = T_xi(X') \in T_xM_c$ et $Y = \lambda_*(A)_x \in T_xG.x$:

$$\begin{aligned}
\Omega_x(X,Y) &= \Omega_x(X, \lambda_*(A)_x) \\
&= -\Omega_x(X, X_{\tilde{\mu}(A)_x}) \\
&= i_{X_{\tilde{\mu}(A)_x}}\Omega_x(X) \\
&= d_x\tilde{\mu}(A)(X) \\
&= X(y \mapsto \tilde{\mu}(A)_y) \\
&= X(y \mapsto < \mu(y), A >) \\
&= T_xi(X')(y \mapsto < \mu(y), A >) \\
&= X'(y \in M_c \mapsto < \mu(y), A >) \\
&= X'(\underbrace{y \mapsto < c, A >}_{= constant}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $X \in (T_xG.x)^\perp$ i.e. $T_xM_c \subset (T_xG_c)^\perp$.

Réciproquement soit $X \in (T_xG.x)^\perp$. Comme c est une valeur régulière $T_xM_c = KerT_x\mu$. Donc $X \in T_xM_c$ si et seulement si pour tout $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ $T_x\mu(Y)(f) = 0$. Soit $Z = T_x\mu(Y)$. Montrons qu'il suffit de vérifier que $Z(f_A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{G}$ avec $f_A(\xi) = \xi(A)$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{G}$ et soit $(q_1, \ldots, q_n)$ le système de coordonnées induit par cette base dans $\mathcal{G}^*$. Dans ce système de coordonnées Z s'écrit:

$$Z = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Si $A = A_1 e_1 + \dots A_n$ alors:

$$f_A(q) =< \sum_{i=1}^n q_i e_i^*, \sum_{i=1}^n A_i e_i >= \sum_{i=1}^n A_i q_i$$

Dès lors:

$$Z(f_A) = \sum_{i=1}^n Z_i A_i$$

Soit $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$:

$$Z(f) = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial f}{\partial q_i}(c) = Z(f_{A(f)})$$

avec $A(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i}(c) e_i$. Ainsi pour tout $f \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ il existe $A = A(f) \in \mathcal{G}$ tel que $Z(f) = Z(f_A)$. Donc $X \in T_x M_c$ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{G}$ $T_x\mu(X)(f_A) = 0$.
Or:

$$\begin{aligned} T_x\mu(X)(f_A) &= X(f_A \circ \mu) \\ &= X(y \mapsto < \mu(y), A >) \\ &= X(y \mapsto \tilde{\mu}(A)_y) \\ &= d_x\tilde{\mu}(A)(X) \\ &= \Omega_x(X_{\tilde{\mu}(A)}(x), X) \\ &= \Omega_x(X, \lambda_*(A)_x) \\ &= 0 \qquad \text{puisque } \lambda_*(A)_x \in T_x G.x \end{aligned}$$

et donc $X \in T_x M_c$: $T_x M_c = (T_x G.x)^\perp$.

□

Remarquons cependant que $T_x M_c \cap T_x G.x \neq 0$. En fait:

$$T_x M_c \cap T_x G.x = T_x G_c.x$$

En effet soit $y = g.x \in G.x \cap M_c$:

$$c = \mu(g.m) = Ad_g^*(\mu(x)) = Ad_g^*(c)$$

donc $g \in G_c$ et donc $y \in G_c.x$. Réciproquement on a vu que si $g \in G_c$ alors $y = g.x \in M_c$ donc $G_c.x = G.x \cap M_c$. Et donc $T_x G_c = T_x G.x \cap T_x M_c$.

1.0.10. COROLLAIRE. *Soit* X_1, X_2, Y_1 *et* $Y_2 \in T_x M_c \subset T_x M$ *tels que*

$$\begin{cases} T_x\pi_c(X_1) = T_x\pi_c(X_2) \\ T_x\pi_c(Y_1) = T_x\pi_c(Y_2) \end{cases}$$

alors $\Omega_x(X_1, Y_1) = \Omega_x(X_2, Y_2)$.

Preuve
$X_1 - X_2 \in Ker T_x\pi_c = T_x(\pi_c^{-1}(\pi_c(x)))$ puisque π_c est une submersion. Or

$$\pi_c^{-1}(\pi_c(x)) = G_c.x$$

Donc $X_1 - X_2 \in T_x G_c.x \subset T_x G.x$. Donc comme $Y_1 \in T_x M_c$ il vient:

$$\Omega_x(X_1, Y_1) = \Omega_x(X_2, Y_1)$$

Mais de la même façon $Y_1 - Y_2 \in T_xG.x$ donc comme $X_2 \in T_xM_c$:

$$\Omega_x(X_2, Y_1) = \Omega_x(X_2, Y_2)$$

et donc $\Omega_x(X_1, Y_1) = \Omega_x(X_2, Y_2)$.

$\square$

1.0.11. LEMME. *Soit x et $y \in M_c$ tels que $\pi_c(x) = \pi_c(y)$, X_1 et $X_2 \in T_xM_c$ et Y_1 et $Y_2 \in T_yM_c$ tels que:*

$$\begin{cases} T_x\pi_c(X_1) = T_y\pi_c(Y_1) \\ T_x\pi_c(X_2) = T_y\pi_c(Y_2) \end{cases}$$

alors $\Omega_x(X_1, X_2) = \Omega_y(Y_1, Y_2)$.

Preuve

$\pi_c(y) = \pi_c(x)$ i.e. x et y sont dans la même orbite par rapport à l'action de G_c sur M_c: il existe $g \in G_c$ tel que $y = g.x$. Soit $Z_i = T_x\lambda_g(X_i) \in T_yM$ pour $i = 1, 2$. λ_g est un difféomorphisme et $\lambda_g(M_c) = M_c$ donc $T_x\lambda_g(T_xM_c) = T_yM_c$: $Z_i \in T_yM_c$ pour $i = 1, 2$. De plus $\pi_c \circ \lambda_g = \pi_c$ puisque $g \in G_c$. Dès lors:

$$T_y\pi_c(Z_i) = T_x(\pi_c \circ \lambda_g)(X_i) = T_x\pi_c(X_i) = T_y\pi_c(Y_i)$$

Donc d'après ce qui précède

$$\Omega_y(Y_1, Y_2) = \Omega_y(Z_1, Z_2)$$

Mais:

$$\Omega_y(Z_1, Z_2) = \Omega_{\lambda_g(x)}(T_x\lambda_g(X_1), T_x\lambda_g(X_2)) = \lambda_g^*(\Omega_y)(X_1, X_2) = \Omega_x(X_1, X_2)$$

puisque l'action de G sur M est hamiltonienne. Et donc:

$$\Omega_y(Y_1, Y_2) = \Omega_x(X_1, X_2)$$

$\square$

Ainsi la définition de Ω_c par

$$\Omega_{c,\bar{x}}(\bar{X}, \bar{Y}) = \Omega_x(X, Y)$$

avec $\pi_c(x) = \bar{x}$, $T_x\pi_c(X) = \bar{X}$ et $T_x\pi_c(Y) = \bar{Y}$ est valide puisque indépendante des choix de x, X et Y. Ω_c est alors clairement une deux forme bilinéaire antisymétrique sur M_c. Pour que ce soit une forme symplectique il faut vérifier qu'elle est fermée et non dégénérée. Montrons tout d'abord qu'elle est fermée:

Localement au voisinage d'un point x de M_c $M_c = \mathbb{R}^n$, $M_c/G_c = \mathbb{R}^q$ et $\pi_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est la projection canonique. Soit $j : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ l'inclusion canonique. Cette inclusion définit une section locale j définie au voisinage de $\pi_c(x)$: $\pi_c \circ j = id$. Donc $i^* \circ \pi_c^* = id^* = id$ et donc π_c^* est injective localement. Dès lors $d\Omega_c = 0$ si et seulement si $\pi_c^*(d\Omega_c) = 0$. Or:

$$\pi_c^*(d\Omega_c) = d\pi_c^*(\Omega_c) = di_c^*(\Omega) = i_c^*(d\Omega) = 0$$

et donc $d\Omega_c = 0$.

Montrons que Ω_c est non dégénérée. Soit $x \in M_c$ et $X \in T_xM_c$ tel que $\Omega_x(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in T_xM_c$. Alors $X \in (T_xM_c)^\perp \cap T_xM_c = T_xG_c.x$. Dès lors $\bar{X} = T_x\pi_c(X) = 0$: $\Omega_{c,\bar{x}}$ est non dégénérée pour tout $\bar{x} \in M_c/G_c$.

$\square$

2. Une description alternative

Supposons ici que M/G et M_c/G_c possèdent des structures lisses telles que $\pi : M \to M/G$ et $\pi_c : M_c \to M_c/G_c$ soient des submersions, c étant toujours une valeur régulière.

2.0.12. LEMME. *Soit $\mathcal{O}_c$ l'orbite coadjointe de c. Alors $\mu^{-1}(\mathcal{O}_c)$ est une sous variété de M.*

Preuve
c est une valeur régulière donc pour tout x et $y \in M_c$ $Ker(T_x\mu)$ et $Ker(T_y\mu)$ sont de même dimension. Soit maintenant $y \in \mu^{-1}(\mathcal{O}_c)$: $\mu(y) = Ad_g^*(c)$. Soit $x = g^{-1}y$: $\mu(x) = c$ donc $y \in M_c$. Or $\lambda_g : (M, x) \to (M, y)$ et $Ad_g^* : (\mathcal{G}, c) \to (M, Ad_g^*(c) = d)$ sont des difféomorphismes et:

$$(T_x\lambda_g)^{-1}(Ker\ T_y\mu) = Ker(T_x(\mu \circ \lambda_g)) = Ker(T_d Ad_g^* \circ T_x\mu) = Ker T_x\mu$$

donc $KerT_y\mu$ et $KerT_x\mu$ sont de même dimensions puisque isomorphes via $T_x\lambda_g$.

Ainsi μ est de rang constant sur $\mathcal{O}_c$. Mais $\mathcal{O}_c$ est une sous variété donc l'image récipro- que de 0 par une submersion (localement). Donc $\mu^{-1}(\mathcal{O}_c)$ est l'image réciproque de 0 par une fonction de rang constant et est donc une sous variété.

□

2.0.13. THEOREME. *L'application $\phi : \mathcal{O}_c \to M_c/G_c$, $x \mapsto p_c(g^{-1}x)$ avec $\mu(x) = Ad_g^*(c)$ est bien définie et induit un difféomorphisme*

$$\boxed{\Phi : \pi(\mu^{-1}(\mathcal{O}_c)) \to M_c/G_c}$$

Preuve
Si $\mu(x) = Ad_g^*(c) = Ad_h^*(c)$ alors $h^{-1}g \in G_c$ et donc $\pi_c(gx)\pi_c(hx)$ donc ϕ est bien définie.

Si $\pi(x) = \pi(y)$ alors il existe $g \in G$ tel que $y = gx$ donc et donc si $\mu(x) = Ad_h^*(c)$ $\mu(y) = Ad_h^*(\mu(x)) = Ad_{hg}^*(c)$. Dès lors:

$$\phi(y) = \pi_c(g^{-1}h^{-1}y) = \pi_c(g^{-1}x) = \phi(x)$$

Ainsi ϕ passe au quotient: Φ est bien définie (et lisse parce que tout est lisse ...).

Définissons $\psi : M_c \to \pi(\mu^{-1}(\mathcal{O}_c))$ par $\psi(x) = \pi(x)$. Si $\pi_c(x) = \pi_c(y)$ alors il existe $g \in G_c$ tel que $y = g_c x$. Dès lors $\pi(x) = \pi(y)$: ψ passe au quotient et induit une application lisse $\Psi : M_c/G_c \to \pi(\mu^{-1}(\mathcal{O}_c))$. Il est facile de voir que Ψ est l'inverse de Φ.

□

3. Exemples

3.1. L'action du cercle sur $\mathbb{C}^n$.

Munissons $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^(2n)$ de la forme symplectique canonique $\Omega = dq \wedge dp = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ dans le système de coordonnées $(\bar{q}+i\bar{p})$. Considérons l'action de S^1 sur $\mathbb{C}^n$ définie par:

$$\lambda(e^{i\theta}, \bar{q} + i\bar{p}) = e^{i\theta}\bar{q} + ie^{i\theta}\bar{p}$$

et considérons l'application $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R} = Lie(S^1)$ définie par:

$$\mu(\bar{q} + i\bar{p}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i^2 + p_i^2$$

Vérifions que μ est l'application moment associée à l'action λ:

1. μ est poissonnienne: si f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont lisses alors:

$$\begin{aligned}\{f \circ \mu, g \circ \mu\}(q,p) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f \circ \mu}{\partial q_i}\frac{\partial g \circ \mu}{\partial p_i} - \frac{\partial f \circ \mu}{\partial p_i}\frac{\partial g \circ \mu}{\partial q_i} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial q_i}\frac{\partial \mu}{\partial p_i} - \frac{\partial \mu}{\partial p_i}\frac{\partial \mu}{\partial q_i})(f'g') \circ \mu(q,p) \\ &= 0 \\ &= \{f, g\} \circ \mu\end{aligned}$$

2. $\tilde{\mu} : \mathbb{R} \to C^\infty(\mathbb{C}^n)$ est définie par:

$$\tilde{\mu}(t)(q,p) = \mu(q,p).t = \frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i^2 + p_i^2$$

en identifiant t et $t\frac{d}{d\theta}$. Donc:

$$X_{\tilde{\mu}(t)}(q,p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\mu}(t)}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial \tilde{\mu}(t)}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} = t\sum_{i=1}^{n} -q_i\frac{\partial}{\partial p_i} + p_i\frac{\partial}{\partial q_i}$$

Mais:

$$\begin{aligned}\lambda_*(t)(q,p) &= T_e\lambda_{(q,p)}(t\frac{d}{d\theta}) \\ &= t\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\theta}(q_i cos(\theta) - p_i sin(\theta))_{\theta=0}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{d}{d\theta}(p_i cos(\theta) + q_i sin(\theta))_{\theta=0}\frac{\partial}{\partial q_i} \\ &= t\sum_{i=1}^{n} -pi\frac{\partial}{\partial q_i} + q_i\frac{\partial}{\partial p_i} \\ &= -X_{\tilde{\mu}(t)}(q,p)\end{aligned}$$

Dès lors M_c/G_c est muni d'une structure symplectique. Or:

$$M_c = \{(z_1, \dots, z_n) : \ |z_1|^2 + \dots + \dots |z_n|^2 = 2c\} \cong S^n \qquad \text{si } c > 0$$

De plus sur S^1 le produit est commutatif donc $L_g \circ R_{g^{-1}} = id$ donc $Ad_g = id = Ad_g^*$. Dès lors pour tout $c \in \mathbb{R}$ $G_c = S^1$. Et donc:

$$M_c/G_c = S^n/S^1 \cong \mathbb{C}P^{n-1}$$

3.2. Actions d'un groupe de Lie sur sur son fibré cotangent.

Rappelons que nous avons défini deux moments sur T^*G associéss à des actions hamiltoniennes de G sur T^*G:

$$\boxed{\begin{cases} \mu(x,\xi) = Ad^*_x(\xi) \\ \lambda(g,(x,\xi)) = (gx,\xi) \end{cases}}$$

et

$$\boxed{\begin{cases} \mu(x,\xi) = -\xi \\ \lambda(g,(x,\xi)) = (xg^{-1}, Ad^*_g(\xi)) \end{cases}}$$

Soit $c \in \mathcal{G}$. Dans le premier cas il est facile de voir que l'application $M_c \to \mathcal{O}_c$, $(x,\xi) \mapsto \xi$ induit un difféomorphisme $M_c/G_c \to \mathcal{O}_c$. C'est une autre façon de voir la structure symplectique sur $\mathcal{O}_c$.

Dans le deuxième cas $M_c = G \times \{c\} = G$ et G/G_c est aussi difféomorphe à $\mathcal{O}_c$.

3.3. Le problème de Kepler.

Considérons dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$ un mobile de masse 1 soumis à une force $F = -\nabla U$ avec

$$U(q) = \frac{k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \quad k > 0$$

(en fait on doit prendre $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ pour que U soit lisse).

La fonction d'Hamilton associée à ce système est:

$$H(q,p) = T - U = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2} - \frac{k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

H est invariant par rotation, nous sommes donc tentés de considérer l'action des matrices spéciales orthogonales sur $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$:

$$\lambda : SO(3) \times T^*\mathbb{R}^3 \to T^*\mathbb{R}^3,\ (A,(\bar{q},\bar{p})) \mapsto (A\bar{q}, A\bar{p})$$

Rappelons que $SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) :\ A^tA = I \text{ et } det(A) = 1\}$. L'action λ peut s'écrire:

$$\lambda(A,X) = \bar{A}X$$

avec $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

3.3.1. LEMME. *Cette action est hamiltonienne.*

Preuve

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ $\Omega = dq \wedge dp$ s'écrit: $\Omega(X,Y) = Y^tJX$

avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Or:

$$\begin{aligned}
\bar{A}^t J \bar{A} &= \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & A^t A \\ -A^t A & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \\
&= J
\end{aligned}$$

et donc:

$$\Omega(\bar{A}X, \bar{A}Y) = Y^t \bar{A}^t J \bar{A} X = Y^t J X = \Omega(X, Y)$$

Cette action est donc hamiltonienne.

$\square$

Notons $K(X,Y) = -\frac{1}{2}tr(XY)$ la forme de Killing définie plus tôt et notons $X_i^* = i_{X_i}K$ où X_1, X_2, X_3 est la base canonique de $so(3)$. Il est facile de voir que:

$$K(X_i, \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3) = \lambda_i$$

Rappelons que nous avions défini le moment cinétique $\Gamma : T^*\mathbb{R}^3 \to so(3)^*$:

$$\Gamma(q,p) = q \times p = (q_2 p_3 - q_3 p_2) X_1^* = (q_3 p_1 - q_1 p_3) X_2^* + (q_1 p_2 - q_2 p_1) X_3^*$$

Malheureusement ce moment n'est pas tout à fait associé à notre action de $SO(3)$. Modifions le un peu et définissons l'application $\mu : T^*\mathbb{R}^3 \to so(3)^*$ par:

$$\boxed{\mu(q,p) = q \times p = (q_2 p_3 - q_3 p_2) X_3^* + (q_3 p_1 - q_1 p_3) X_2^* + (q_1 p_2 - q_2 p_1) X_1^*}$$

3.3.2. LEMME. *μ est l'application moment associée à l'action λ.*

Preuve
Il faut vérifier que μ est poissonnienne et que $\lambda_* = -X_{\tilde{\mu}}$.

1. μ est poissonnienne:

$$\begin{aligned}
\{x_1 \circ \mu, x_2 \circ \mu\} &= \{q_1 p_2 - q_2 p_1, q_3 p_1 - q_1 p_3\} \\
&= q_2 p_3 - p_2 q_3 \\
&= x_3 \circ \mu \\
&= \{x_1, x_2\} \circ \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{x_2 \circ \mu, x_3 \circ \mu\} &= \{q_3 p_1 - q_1 p_3, q_2 p_3 - q_3 p_2\} \\
&= q_1 p_2 - p_1 q_2 \\
&= x_1 \circ \mu \\
&= \{x_2, x_3\} \circ \mu
\end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned}\{x_3 \circ \mu, x_1 \circ \mu\} &= \{q_2p_3 - q_3p_2, q_1p_2 - q_2p_1\}\\ &= q_3p_1 - p_3q_1\\ &= x_2 \circ \mu\\ &= \{x_3, x_2\} \circ \mu\end{aligned}$$

2. $\lambda_* = -X_{\tilde{\mu}}$:

   $\tilde{\mu}$ est défini par $\tilde{\mu}(X)(q,p) = \mu(q,p)(X)$. Soit $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 \in so(3)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(X)(q,p) &= (q_2p_3 - q_3p_2)X_3^*(X) + (q_3p_1 - q_1p_3)X_2^*(X) + (q_1p_2 - q_2p_1)X_1^*(X)\\ &= (q_2p_3 - q_3p_2)\lambda_3 + (q_3p_1 - q_1p_3)\lambda_2 + (q_1p_2 - q_2p_1)\lambda_1\end{aligned}$$

donc:

$$\begin{cases}\frac{\tilde{\mu}(X)}{\partial q_1} = p_2\lambda_1 - p_3\lambda_2 & \frac{\tilde{\mu}(X)}{\partial p_1} = -q_2\lambda_1 + q_3\lambda_2\\ \frac{\tilde{\mu}(X)}{\partial q_2} = p_3\lambda_3 - p_1\lambda_1 & \frac{\tilde{\mu}(X)}{\partial p_2} = -q_3\lambda_3 + q_1\lambda_1\\ \frac{\tilde{\mu}(X)}{\partial q_3} = p_1\lambda_2 - p_2\lambda_3 & \frac{\tilde{\mu}(X)}{\partial p_1} = -q_1\lambda_2 + q_2\lambda_3\end{cases}$$

et donc comme $X_{\tilde{\mu}(X)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\tilde{\mu}(X)}{\partial p_i}\partial q_i - \frac{\partial\tilde{\mu}(X)}{\partial q_i}\partial p_i$ il vient:

$$\begin{aligned}X_{\tilde{\mu}(X)} = (q_3\lambda_2 - q_2\lambda_1)\frac{\partial}{\partial q_1} + (p_3\lambda_2 - p_2\lambda_1)\frac{\partial}{\partial p_1}\\ + (q_1\lambda_1 - q_3\lambda_3)\frac{\partial}{\partial q_2} + (p_1\lambda_1 - p_3\lambda_3)\frac{\partial}{\partial p_2}\\ + (q_2\lambda_3 - q_1\lambda_2)\frac{\partial}{\partial q_3} + (p_2\lambda_3 - p_1\lambda_2)\frac{\partial}{\partial p_1}\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\lambda_*(X)$. $SO(3)$ est une sous variété de $GL(3)$ dont les coordonnées sont $(a_{ij})_{i,j=1}^3$. Dans ces coordonnées X s'écrit:

$$X = \lambda_1(\frac{\partial}{\partial a_{12}} - \frac{\partial}{\partial a_{21}}) + \lambda_2(\frac{\partial}{\partial a_{31}} - \frac{\partial}{\partial a_{13}}) + \lambda_3(\frac{\partial}{\partial a_{23}} - \frac{\partial}{\partial a_{32}})$$

Or:

$$\begin{aligned}\lambda_*(X)(q,p)(q_i) &= T_e\lambda_{(q,p)}X(q_i)\\ &= X(q_i \circ \lambda_{q,p})\\ &= X(a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + a_{i3}q_3)\end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned}\lambda_*(X)(q,p)(p_i) &= T_e\lambda_{(q,p)}X(p_i)\\ &= X(p_i \circ \lambda_{q,p})\\ &= X(a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3)\end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que:

$$\begin{cases}\lambda_*(X)(q_1) = \lambda_1q_2 - \lambda_2q_3 & \lambda_*(X)(p_1) = \lambda_1p_2 - \lambda_2p_3\\ \lambda_*(X)(q_2) = \lambda_3q_3 - \lambda_1q_1 & \lambda_*(X)(p_2) = \lambda_3p_3 - \lambda_1p_1\\ \lambda_*(X)(q_3) = \lambda_2q_1 - \lambda_3q_2 & \lambda_*(X)(p_3) = \lambda_2p_1 - \lambda_3p_2\end{cases}$$

et donc:

$$\begin{aligned}\lambda_*(X) &= (-q_3\lambda_2 + q_2\lambda_1)\frac{\partial}{\partial q_1} + (-p_3\lambda_2 + p_2\lambda_1)\frac{\partial}{\partial p_1} \\ &+ (-q_1\lambda_1 + q_3\lambda_3)\frac{\partial}{\partial q_2} + (-p_1\lambda_1 + p_3\lambda_3)\frac{\partial}{\partial p_2} \\ &+ (-q_2\lambda_3 + q_1\lambda_2)\frac{\partial}{\partial q_3} + (-p_2\lambda_3 + p_1\lambda_2)\frac{\partial}{\partial p_1}\end{aligned}$$

et donc $\lambda_*(X) = -X_{\tilde{\mu}(X)}$.

□

Considérons l'élément de $so(3)^*$ $c = X_1^*$ et déterminons l'espace des phases réduit $F_c = M_c/G_c$. Pour cela il faut déterminer $M_c = \mu^{-1}(c)$ et $G_c = \{A \in SO(3) : Ad_A^*(c) = c\}$.

1. Soit $(q,p) \in T^*\mathbb{R}^3$. $(q,p) \in M_c$ si et seulement si

$$\begin{cases} q_2p_3 - q_3p_2 = 0 & (L_1) \\ q_3p_1 - q_1p_3 = 0 & (L_2) \\ q_1p_2 - q_2p_1 = 0 & (L_3) \end{cases}$$

En effectuant les transformations $L_1 \to L_1 \times p_1 + L_3 \times p_3$ puis $L_2 \to L_1 \times q_1 - L_2 \times q_2$ on constate que le système est équivalent au système:

$$\begin{cases} p_3 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_1p_2 - q_2p_1 = 1 \end{cases}$$

Donc $M_c = \{q_3 = p_3 = 0, q_1p_2 - q_2p_1 = 1\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^6$ de dimension $6 - 3 = 3$.

2. Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3 \in SO(3)$. Rappelons que $Ad_A(X) = AXA^{-1}$. Mais $A \in SO(3)$ donc $A^{-1} = A$:

$$Ad_A^*(c) = \sum_{i=1}^{3} Ad_A^*(c)(X_i)X_i^* = \sum_{i=1}^{3} X_1^*(Ad_A(X_i))X_i^* = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} tr(X_1AX_iA^t)X_i^*$$

Donc déterminer G_c c'est résoudre les système

$$\begin{cases} tr(X_1AX_1A^t) = -2 \\ tr(X_1AX_2A^t) = 0 \\ tr(X_1AX_3A^t) = 0 \end{cases}$$

Après calcul il vient:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 & (L_1) \\ a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} = 0 & (L_2) \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} = 0 & (L_3) \end{cases}$$

En effectuant les transformations $L_1 \to L_2 \times a_{12} + L_1 \times a_{13}$ puis $L_2 \to L_2 \times a_{22} - L_3 \times a_{21}$ on constate que ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} = 1 \end{cases}$$

Ainsi A s'écrit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

et vérifie

$$\begin{cases} det(A) = 1 \\ AA^t = I \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} = 1 \end{cases}$$

On vérifie sans peine que les solutions de ce systèmes sont les matrices $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$. Autrement dit:

$$G_c = SO(2) = \{ \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \}$$

Ainsi $F_c = M_c/G_c$ est une variété de dimension $3-1 = 2$. On peut paramétriser M_c par les coordonnées (r, ϕ, p_r, p_ϕ) en posant:

$$\begin{cases} q_1 = r\cos(\phi) \\ q_2 = r\sin(\phi) \\ p_1 = p_r\cos(\phi) - rp_\phi\sin(\phi) \\ p_2 = p_r\sin(\phi) + rp_\phi\cos(\phi) \end{cases}$$

(on a choisi p_r et p_ϕ tels que $p_1 = \dot{q}_1$ et $p_2 = \dot{q}_2$ si et seulement si $p_r = \dot{r}$ et $p_\phi = \dot{p}_\phi$). La condition $p_1q_2 - p_2q_1 = 1$ devient

$$p_\phi r^2 = 1$$

Autrement dit $M_c = \{p_\phi r^2 = 1\}$. et $H|_{M_c}$ s'écrit:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} = \frac{p_r^2 + r^2p_\phi^2}{2} - \frac{k}{r}$$

Le système d'Hamilton s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{p_r} = -\frac{\partial H}{\partial r} = -rp_\phi^2 - \frac{k}{r^2} = -\frac{1}{r^3} - \frac{k}{r^2} \\ \dot{p_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \\ \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r \\ \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = r^2p_\phi = -1 \end{cases}$$

De plus le long des trajectoires de notre mobile $\dot{r} = p_r$ et $\dot{\phi} = p_\phi$. Donc notre mobile vérifie le système:

$$\begin{cases} \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{r^3} - \frac{k}{r^2} \\ \frac{d\phi}{dt} = -1 \end{cases}$$

Posons $u = \frac{dr}{dt}$:

$$\frac{d\frac{u^2}{2}}{dt} = u\frac{du}{dt} = -(\frac{1}{r^3} + \frac{k}{r^2})\frac{dr}{dt}$$

et donc

$$d(\frac{u^2}{2}) = -(\frac{1}{r^3} + \frac{k}{r^2})dr$$

Donc:

$$\frac{u^2}{2} = \frac{1}{2r^2} + \frac{k}{r+}\frac{\alpha}{2}$$

et donc:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{2k}{r} + \alpha}} + \beta$$

Mais $\phi = -t + \gamma$ d'où:

$$\boxed{\phi = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{2k}{r} + \alpha}} + \delta}$$

CHAPITRE 7

Théorèmes d'Arnold-Liouville. Coordonnées action-angle

1. Théorème d'Arnold-Liouville 1

1.0.3. DEFINITION. *Un système hamiltonien* (H, Ω) *sur une variété symplectique* (M^{2n}, Ω) *est intégrable au sens de Liouville ou complètement intégrable si il existe des fonctions lisses* $H_1, \ldots, H_n$ *sur* M *telles que:*

1. $H_1 = H$
2. $\{H_i, H_j\} = 0$ *pour tout* $i, j = 1 \ldots n$.
3. *il existe un ouvert dense* W *de* M *tel que pour tout* $x \in W$ $d_x H_1, \ldots, d_x H_n$ *sont linéairement indépendantes.*

1.0.4. REMARQUE. *On note* $\bar{H} = (H_1, \ldots, H_n) : M \to \mathbb{R}^n$. *Une valeur régulière de* $\bar{H}$ *et un élément* c *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $\bar{H}^{-1}(c) \subset W$. *Comme* $H : W \to \mathbb{R}^n$ *est une submersion lorsque* c *est une valeur régulière* $\bar{H}^{-1}(c)$ *est une sous variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* n *et d'espace tangent*

$$T_x \bar{H}^{-1}(c) = Kerd_x \bar{H} = \bigcap_{i=1}^{n} d_x H_i$$

Soit (H, Ω) un système hamiltonien complètement intégrable et $\bar{H} : M \to \mathbb{R}^n$ l'application associée.

1.0.5. THEOREME (Arnold-Liouville 1). *Si* c *est une valeur de* $\bar{H}$ *et* $\bar{H}^{-1}(c)$ *est compact alors les composantes connexes de* $\bar{H}^{-1}(c)$ *sont des tores* $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Preuve

Supposons que $\bar{H}^{-1}(c)$ est connexe. Soit $X_i = X_{H_i}$: $i_{X_i} = -dH_i$.

1. $dH_i(X_j) = \{H_j, H_i\} = 0$ donc $X_j \in KerdH_i$ pour tout i. Autrement dit pour tout $x \in \bar{H}^{-1}(c)$, $X_i(x) \in T_x \bar{H}^{-1}(c)$.
2. Montrons que $[X_i, X_j] = 0$:

$$\begin{aligned}
[X_i, X_j]_x(f) &= X_i(x)(X_j(f)) - X_j(x)(X_i(f)) \\
&= X_i(x)(\{H_j, f\}) - X_j(x)(\{H_i, f\}) \\
&= \{H_i, \{H_j, f\}\} - \{H_j, \{H_i, f\}\} \\
&= \{H_i, \{H_j, f\}\} + \{H_j, \{f, H_i\}\} \\
&= \{f, \{H_j, H_i\}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. les dH_i étant linéairement indépendant les X_i sont linéairement indépendants

Ainsi $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de l'agèbre de Lie $D(\bar{H}^{-1}(c))$ et cette algèbre de Lie est commutative. Notons ϕ_i le flot de X_i considéré comme un champ de vecteurs sur $\bar{H}^{-1}(c)$ (qui est complet i.e. défini sur $\mathbb{R}$ puisque $\bar{H}^{-1}(c)$ est compact). On peut montrer que l'action de $\mathbb{R}^n$ sur $\bar{H}^{-1}(c)$ définie par:

$$\lambda((t_1, \ldots, t_n), x) = \phi_1(t_1, \phi_2(t_2, (\ldots, (\phi_n(t_n, x)) \ldots)))$$

est transitive. Dès lors cette action à une seule orbite: $\bar{H}^{-1}(c)$. Et donc $\bar{H}^{-1}(c)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n/G_x$ où $G_x = \{t \in \mathbb{R}^n : \ \lambda(t,x) = x\}$ pour un point donné x de $\bar{H}^{-1}(c)$. On peut montrer que $\mathbb{R}^n/G_x$ est séparé et compact si et seulement si G_c est discret i.e. isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. D'où le résultat.

□

2. Théorème d'Arnold-Liouville 2

Soit (H,Ω) un système hamiltonien complètement intégrable et $\bar{H} : M \to \mathbb{R}^n$ l'application associée.

2.0.6. LEMME (Guillemin-Sternberg). *Si c est une valeur régulière de $\bar{H}$ et $\bar{H}^{-1}(c)$ est compact alors il existe un voisinage ouvert U de c tel que $\Omega|_{\bar{H}^{-1}(U)}$ est exacte.*

Preuve
Un théorème de topologie différentielle nous dit qu'il existe un voisinage ouvert U de c et un champ de vecteurs X sur M tel que

1. le flot ϕ de X est défini sur $I = [0,1]$ pour tout point x de $\bar{H}^{-1}(U)$
2. $\phi_1(\bar{H}^{-1}(U)) = \bar{H}^{-1}(c)$

On a:

$$\phi_1^*(\Omega) - \phi_0^*(\Omega) = \int_0^1 \frac{d}{ds}(\phi_s^*(\Omega))_{s=t}\,dt$$

Mais:

$$\begin{aligned}\phi_t^*(L_X\Omega) &= \phi_t^*(\lim_{s\to 0}\frac{\phi_s^*(\Omega)-\Omega}{s})\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{\phi_{s+t}^*(\Omega)-\phi_t^*(\Omega)}{s}\\ &= \frac{d}{ds}(\phi_s^*(\omega))_{s=t}\end{aligned}$$

Donc:

$$\phi_1^*(\Omega) - \phi_0^*(\Omega) = \int_0^1 \phi_t^*(L_x\Omega)dt$$

Or $L_X\Omega = i_X d\Omega + di_X\Omega = di_X\Omega$. De plus $\phi_0^*(\Omega)$. Et donc:

$$\phi_1^*(\Omega) = \Omega - d\rho$$

avec $\rho = -\int_0^1 \phi_t^*(i_X\Omega)dt$. Mais $\phi_1(\bar{H}^{-1}(U)) = \bar{H}^{-1}(c)$ et $\Omega|_{\bar{H}^{-1}(c)} = 0$ (puisque $\Omega(X_i, X_j) = 0$ et que tout champ de vecteur sur $\bar{H}^{-1}(c)$ est combinaison linéaire des X_i). Dès lors:

$$\phi_1^*(\Omega)|_{\bar{H}^{-1}(U)} = \phi_1^*(\Omega|_{\bar{H}^{-1}(c)}) = 0$$

et donc $(\Omega - d\rho)|_{\bar{H}^{-1}(U)} = 0$.

□

2.0.7. THEOREME (Arnold-Liouville 2). *Sur le tore $\bar{H}^{-1}(c)$ le flot de H_i est linéaire et s'écrit dans le système de coordonnées $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $T^n = \bar{H}^{-1}(c)$:*

$$\phi_i(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (\varphi_1 + \omega_{i1}t, \ldots, \varphi_n + \omega_{in}t)$$

Preuve

Considérons le revêtement universel $\tilde{H} \xrightarrow{\pi} \bar{H}^{-1}(U)$. Nous admettrons qu'il existe des fonctions lisses $U_1, \ldots, U_n$ sur U telles que $(H_1, \ldots, H_n, U_1, \ldots, U_n)$ soit un système de coordonnées locales de $\bar{H}$. Notons dorénavant $\Omega = \Omega|_{\bar{H}}^{-1}(U)$. Considérons $\bar{H}^{-1}[U]$ comme contenu dans son revêtement universel (localement par une section triviale). Modulo ces identifications Ω s'écrit dans ces coordonnées:

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dH_i \wedge dH_j + b_{ij} dH_i \wedge dU_j + c_{ij} dU_i \wedge dU_j$$

X_i s'écrit:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial}{\partial H_j} + B_{ij} \frac{\partial}{\partial U_i}$$

Mais $dH_j(X_i) = \{H_j, H_i\} = 0$ donc $A_{ij} = 0$ pour tout i, j. Donc:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \frac{\partial}{\partial U_i}$$

La matrice B des $B_{ij} = dU_j(X_i)$ est la matrice de l'application linéaire qui envoie la famille libre des $\frac{\partial}{\partial U_i}$ sur la famille libre des X_i. Donc B est inversible. De plus:

$$\begin{aligned} -dH_i &= i_{X_i}\Omega \\ &= \sum_{k=1}^{n} B_{ik} dH_k + \sum_{u,v=1}^{n} c_{uv}(B_{iu} dU_v - B_{iv} dU_u) \\ &= \sum_{k=1}^{n} B_{ik} dH_k + \sum_{v=1}^{n} (\sum_{u=1}^{n} c_{uv} B_{iu}) dU_v \quad \text{car } c_{uv} = -c_{vu} \end{aligned}$$

Donc pour tout i et tout v:

$$\sum_{u=1}^{n} B_{iu} c_{uv} = (BC)_{iv} = 0$$

où C est la matrice des c_{uv}. Donc $BC = 0$ et donc comme B est inversible $C = 0$. Autrement dit pour tout couple i, j, $c_{ij} = 0$. Donc:

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dHi \wedge dH_j + b_{ij} dH_i \wedge dU_j$$

Mais d'après le lemme de Guillemin- Sternberg $\Omega = d\rho$ sur $H^{-1}(U)$. ρ s'écrit dans les coordonnées (H_i, U_i):

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} A_i dH_i + B_i dU_i$$

Donc

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{i=1}^{n} dA_i \wedge dH_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial H_j} dH_i \wedge dU_j + \frac{\partial B_i}{\partial U_j} dU_i \wedge dU_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} dA_i \wedge dH_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial H_j} dH_i \wedge dU_j + \sum_{i<j} (\frac{\partial B_i}{\partial U_j} - \frac{\partial B_j}{\partial U_i}) dU_i \wedge dU_j\end{aligned}$$

et donc pour tout i, j $\frac{\partial B_i}{\partial U_j} = \frac{\partial B_j}{\partial U_i}$. Donc il existe une fonction S telle que $B_i = \frac{\partial S}{\partial U_i}$. dS s'écrit:

$$dS = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial H_i} dH_i + B_i dU_i$$

donc

$$\rho - dS = \sum_{i=1}^{n} (A_i - \frac{\partial S}{\partial H_i}) dH_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i dH_i$$

et donc:

$$\Omega = d\rho = d(\rho - dS) = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dH_i$$

avec $p = \rho - dS$.

Soit $\gamma_1(c), \ldots, \gamma_n(c)$ les n cercles générateurs du tore $\bar{H}^{-1}(c)$. Posons $I_i = (\int_{\gamma_i(c)} p) \circ \pi$. A priori I_i sont des fonctions de H_j et p_j. Mais on a intégré les variables p_j. Donc $I_i = I_i(H_1, \ldots, H_n)$. Posons $S_{ij} = \frac{\partial I_i}{\partial H_j}$ et soit S la matrices des S_{ij}. On peut vérifier que:

$$S_{ij} = \frac{\partial I_i}{\partial H_j} = \int_{\gamma_i(c)} p_j$$

$S = S(H_1, \ldots, H_n)$ donc sur $\bar{H}^{-1}(c)$ S est constante. Nous admettrons qu'elle est inversible. Soit $S^{ij} = (S^{-1})_{ij}$. On a:

$$dI_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} dH_j$$

Donc:

$$\sum_{k=1}^{n} S^{ik} dI_k = \sum_{k,j=1}^{n} S^{ik} S_{kj} dH_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} dH_j = dH_i$$

Dès lors:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dH_i = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} S^{ij} dp_i) \wedge dH_j$$

Posons alors $\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} S^{ij} dp_i$. Dans ce système de coordonnées Ω s'écrit:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} d\varphi_i \wedge dI_i$$

De plus:

$$\int_{\gamma_i c} \varphi_j = \sum_{k=1}^{n} S^{kj} \int_{\gamma_i(c)} p_k = \sum_{k=1}^{n} S^{kj} S_{ik} = \delta_{ij}$$

Ceci montre que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système de coordonnées sur le tore $\bar{H}^{-1}(c)$.

Soit ϕ_i le flot de X_i: $\phi_i = (\varphi^i_j, I^i_j)_{j=1}^n$:

$$i_{X_i}\Omega = \sum_{j=1}^{n} d\varphi_j(X_i)dI_j - dI_j(X_i)d\varphi_j = \sum_{j=1}^{n} \dot{\varphi}^i_j dI_j - \dot{I}^i_j d\varphi_j$$

Mais:

$$i_{X_i}\Omega = dH_i = \sum_{j=1}^{n} S^{ij} dI_j$$

Donc le long du flot:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i_j = S^{ij} = \omega_{ij} = \text{ constant sur le tore} \\ \dot{I}^i_j = 0 \end{cases}$$

et donc le flot s'écrit sur le tore:

$$\phi_i(t, (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = (\varphi_1 + \omega_{i1}t, \ldots, \varphi_i + \omega_{in}t)$$

□

3. Coordonnées Action-angle

3.0.8. DEFINITION. *Les coordonnées I_i sont appelées les actions du système et les 1-formes $d\varphi_i$ les angles du système associées aux générateurs $\gamma_i(c)$ du tore $\bar{H}^{-1}(c)$.*

La matrice S est la matrice des période tandis que la matrice $S^{-1} = (\omega_{ij})$ est la matrice des fréquences.

On a "démontré" le théorème dit Action-angle

3.0.9. THEOREME. *Si c est une valeur régulière et $\bar{H}^{-1}(c)$ il existe un voisinage ouvert U de c et des fonctions sur $H^{-1}(U)$ $I_1, \ldots I_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ telles que*

$$\Omega|_{\bar{H}^{-1}(U)} = \sum_{i=1}^{n} dI_i \wedge d\varphi_i$$

De plus les flots des H_i sont linéaires sur le tore $\bar{H}^{-1}(c)$ et vérifient les équations d'Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{I}_j = \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_j} = 0 & \forall\ i, j \\ \dot{\varphi}_j = -\frac{\partial H_i}{\partial I_j} = \omega_{ij} = \ cst & \forall\ i, j \end{cases}$$

CHAPITRE 8

Intégrabilité des paires de Lax

1. Définition

Considérons un champ de vecteurs X sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, de flot $\gamma : \bigcup_{x \in U} I_x \to \mathbb{R}^n$, I_x étant un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0:

$$\begin{cases} \gamma_x(0) = x & \forall\, x \in u \\ \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_x(t))_{t=u} = X_{\gamma_x(u)}(f) & \forall\, x \in U, \forall\, u \in I_x, \forall\, f \in C^\infty(U) \end{cases}$$

1.0.10. DEFINITION. *Une paire de Lax de X est un couple (L, A) de matrices carrées $p - p$, à coefficients lisses sur U vérifiant:*

$$\boxed{\dot{L} = [L, A]}$$

i.e. pour tout $x \in U$ et tout $u \in I_x$:

$$\frac{d}{dt}(L \circ \gamma_x(t))_{t=u} = [L, A] \circ \gamma_x(u)$$

1.0.11. PROPOSITION. *Soit (L, A) une paire de Lax de X. Pour tout $k \geq 0$ la fonction $f_k = Tr(L^k)$ est une intégrale première de X i.e. pour tout $x \in U$ et tout $u \in I_x$:*

$$\frac{d}{dt}(f_k \circ \gamma_x(t))_{t=u} = 0$$

Preuve
Pour $k = 0$ $f_0 = p$ fonction constante donc intéressons nous au cas $k \geq 1$. Rappelons que $Tr(AB) = Tr(BA)$ dès lors:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_k \circ \gamma_x(t) &= Tr(\frac{d}{dt} L^k \circ \gamma_x(t)_{t=u}) \quad = Tr(kL^{k-1} \circ \gamma_x(u) \frac{d}{dt}(L \circ \gamma_x(t))_{t=u}) \\ &= Tr(kL^{k-1}[L, A]) \\ &= kTr(L^k A - L^{k-1} A L) \\ &= kTr(L^k A) - kTr(L^k A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

2. Système harmonique sur le cotangent de $su(n)$

Rappelons que le groupe de Lie spécial unitaire $SU(n)$ est:

$$SU(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I \text{ et } det(A) = 1\}$$

Son algèbre de Lie est

$$su(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A = -\bar{A}^t \text{ et } Tr(A) = 0\}$$

Etudions d'un peu plus près $su(n)$. $su(n)$ est un sous espace vectoriel réel (mais pas complexe) de $M_n(\mathbb{C})$. De plus il est stable par le crochet de Lie canonique sur

$M_n(\mathbb{R})$:

$$\overline{[A,B]}^t = (\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A})^t = \bar{B}^t\bar{A}^t - \bar{A}^t\bar{B}^t = BA - AB = -[A,B]$$

Ainsi $su(n)$ est une algèbre de Lie réelle. En fait c'est une algèbre de Lie semi-simple:

2.0.12. LEMME. *La forme de Killing $K : su(n) \times su(n) \to \mathbb{R}$, $(A,B) \mapsto Tr(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.*

Preuve

Il faut tout d'abord vérifier que K est bien à valeurs réelles. Pour cela explicitons K:

$$\boxed{K(A,B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}} \tag{1}$$

Ceci peut s'écrire:

$$\begin{aligned} K(A,B) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}b_{ji} + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ji}b_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}b_{ji} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \overline{a_{ij}b_{ji}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}b_{ji} + \overline{a_{ij}b_{ji}} \end{aligned}$$

Or $a_{ii} = -\overline{a_{ii}}$ et $b_{ii} = -\overline{b_{ii}}$ donc a_{ii} et b_{ii} sont des imaginaires purs et donc $a_{ii}b_{ii}$ est réel. De plus pour $i<j$ $a_{ij}b_{ji} + \overline{a_{ij}b_{ji}}$ est réel. Et donc $K(A,B) \in \mathbb{R}$.

K est clairement $\mathbb{R}$-bilinéaire et d'après (1) K est symétrique. Vérifions qu'elle est non dégénérée. Soit $A \in su(n)$ tel que pour tout $B \in su(n)$ $K(A,B) = 0$. Notons M_{uv} la matrice dont les coefficients sont $m_{ij} = \delta_{(i,j)}^{(u,v)}$. Soit $B = (1+i)M_{uv} + (-1+i)M_{vu}$: $b_{vu} = -1+i = -(1-i) = -\overline{b_{uv}}$. Donc $B \in su(n)$. Dès lors d'après (1):

$$0 = K(A,B) = (-1+i)a_{uv} + (1+i)a_{vu}$$

dès lors $a_{uv} = -a_{vu} = a_{vu}$: $a_{uv} = 0$ et ceci pour tout u,v: $A = 0$.

□

2.0.13. REMARQUE. *On identifie $su(n)$ parfois à $isu(n) = \{iA : A \in su(n)\}$ qui est aussi une algèbre de Lie réelle munie du crochet de Lie:*

$$[iA, iB]_2 = -i[A,B] \quad \textit{pour } A,B \in su(n)$$

$su(n)$ est alors l'algèbre de Lie:

$$su(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : Tr(A) = 0 \textit{ et } A = \bar{A}^t\}$$

La forme de Killing est bien sûr toujours bilinéaire symétrique non dégénérée.

Ainsi $\mathcal{G} = su(n)$ s'identifie à $\mathcal{G}^*$ via l'isomorphisme $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$, $A \mapsto i_A K$ et $T^*\mathcal{G} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$ s'identifie à $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^*$. Notons $(X, L) = (X_{11}, X_{12}, \ldots, L_{11}, \ldots)$ le système de coordonnées sur $T^*\mathcal{G}$ et définissons la 2-forme lisse Ω sur $T^*\mathcal{G}$ par:

$$\boxed{\Omega = Tr(dX \wedge dL)}$$

Explicitons cette notation: Ω est la deux forme à coefficients constants:

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} dX_{ij} \wedge dL_{ji}$$

Autrement dit pour $A \in T^*\mathcal{G}$ $\Omega_A : T_A T^*\mathcal{G} \times T_A T^*\mathcal{G} \to \mathbb{R}$ est définie par:

$$\Omega_A\Big(\sum_{i,j=1}^{n} U_{ij}\frac{\partial}{\partial X_{ij}} + V_{ij}\frac{\partial}{\partial L_{ij}}, U'_{ij}\frac{\partial}{\partial X_{ij}} + V'_{ij}\frac{\partial}{\partial L_{ij}}\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} U_{ij}V'_{ij} - U'_{ij}V_{ji}$$

Et donc si on identifie $T_A T^*\mathcal{G}$ à $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ il vient:

$$\boxed{\Omega_A((U,V),(U',V')) = Tr(UV') - Tr(U'V) \ \ \forall\, A \in T^*\mathcal{G}}$$

2.0.14. PROPOSITION. *Ω est une forme symplectique sur $T^*\mathcal{G}$.*

Preuve

Si $i_{U,V}\Omega = 0$ alors pour tout $U' \in su(n)$ $K(U', V) = -\Omega((U,V),(U',0)) = 0$ donc $V = 0$ et pour tout V' $K(U, V') = \Omega((U,V),(0,V')) = 0$ donc $U = 0$: Ω est non dégénérée.

De plus $\Omega = d\rho$ avec $\rho = Tr(LdX)$ donc Ω est fermée.

□

Considérons la fonction sur $T^*\mathcal{G}$ définie par:

$$\boxed{H(X, L) = \frac{1}{2}Tr(\lambda^2 X^2 + L^2)}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.0.15. LEMME.

$$\boxed{dH = Tr(\lambda^2 X dX + LdL)}$$

Preuve

En identifiant $T_{(X,L)}T^*\mathcal{G}$ à $T^*\mathcal{G}$ $d_{(X,L)}H$ s'écrit:

$$d_{(X,L)}H(U,V) = \sum_{i,j=1}^{n} U_{ij}\frac{\partial H}{\partial X_{ij}}(X,L) + V_{ij}\frac{\partial H}{\partial L_{ij}}(X,L)$$

Or:

$$H(X,L) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\lambda^2}{2} X_{ij}X_{ji} + \frac{1}{2}L_{ij}L_{ji}$$

donc pour tout i, j:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial X_{ij}} = \lambda^2 X_{ji} \\ \frac{\partial H}{\partial L_{ij}} = L_{ji} \end{cases}$$

et donc:

$$d_{(X,L)}H(U,V) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda^2 U_{ij}X_{ji} + V_{ij}L_{ji} = Tr(\lambda^2 UX + VL) = Tr(\lambda^2 XU + LV)$$

□

2.0.16. DEFINITION. *Le flot harmonique du système hamiltonien* (H, Ω) *est le flot du champ de vecteurs* X_H *hamiltonien pour la forme symplectique* Ω*:*

$$i_{X_H}\Omega = -dH$$

On le note $(\dot{X}, \dot{L})$*.*

2.0.17. REMARQUE. *Soit* $(X_0, L_0) \in T^*\mathcal{G}$ *et* $(X, L) : \mathbb{R} \to T^*\mathcal{G}$ *le flot de* X_H *en* (X_0, L_0)*. Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a:*

$$X_H(X(t), Y(t))(f) = \frac{d}{du}(f(X(u), L(u)))_{u=t}$$

Donc:

$$\begin{cases} X_H(X(t), L(t))(X_{ij}) = \frac{d}{du}X_{ij}(u)_{t=u} = \dot{X}_{ij}(t) \\ X_H(X(t), L(t))(L_{ij}) = \frac{d}{du}L_{ij}(u)_{t=u} = \dot{L}_{ij}(t) \end{cases}$$

i.e. $X_H(X(t), L(t)) \in T_{(X(t),L(t))}T^*\mathcal{G}$ *s'écrit:*

$$X_H(X(t), L(t)) = \sum_{i,j=1}^{n} \dot{X}_{ij}(t)\frac{\partial}{\partial X_{ij}} + \dot{L}_{ij}(t)\frac{\partial}{\partial L_{ij}}$$

Autrement dit lorsque on identifie $T_{(X(t),L(t))}T^*\mathcal{G}$ *à* $T^*\mathcal{G} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ $X_H(X(t), L(t))$ *s'identifie au couple de matrices* $(\dot{X}(t), \dot{L}(t))$*.*

2.0.18. PROPOSITION. *Le flot harmonique* $(X(t), L(t))$ *est solution du système différentiel:*

$$\boxed{\begin{cases} \dot{X} = -L \\ \dot{L} = \lambda^2 X \end{cases}}$$

Preuve

Notons $X_H(t) = X_H(X(t), Y(t))$. SOit $(U, V) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} = T^*\mathcal{G}$:

$$i_{X_H(t)}\Omega_t(U, V) = \Omega((\dot{X}, \dot{L}), (U, V)) = Tr(\dot{X}V - \dot{L}U)$$

Donc:

$$\boxed{i_{X_H(t)}\Omega = Tr(\dot{X}(t)dL - \dot{L}dX)}$$

Or $i_{X_H}\Omega = -dH$. Donc:

$$Tr(\dot{X}(t)dL - \dot{L}(t)dX) = -Tr(\lambda^2 X(t)dX + L(t)dL)$$

Et donc puisque $(A, B) \mapsto Tr(AB)$ est non dégénérée nécessairement:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -L(t) \\ \dot{L}(t) = \lambda^2 X(t) \end{cases}$$

□

Et donc le flot harmonique du système hamiltonien (H, Ω) est:

$$\boxed{\begin{cases} X(t) = X_0 \cos(\lambda t) + \frac{L_0}{\lambda} \sin(\lambda t) \\ L(t) = L_0 \cos(\lambda t) - \frac{X_0}{\lambda} \sin(\lambda t) \end{cases}}$$

pour $\lambda \neq 0$ et:

$$\begin{cases} X(t) = -L_0 t + X_0 \\ L(t) = L_0 \end{cases}$$

2.0.19. REMARQUE. *On dit que les orbites de H (ou du flot harmonique de H) sont périodiques de période $\frac{2\pi}{\lambda}$. On peut expliquer cette terminologie comme suit: D'après l'additivité du flot $\varphi = (X(t, X_0, L_0), L(t, X_0, L_0))$ de X_H, $\varphi : \mathbb{R} \times T^*\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ peut être considéré comme une action de $\mathbb{R}$ agit sur $T^*\mathcal{G}$. L'orbite d'un point (X_0, L_0) est l'ensemble des $\varphi(t, X_0, Y_0)$, t décrivant $\mathbb{R}$. Elle est périodique de période $\frac{2\pi}{\lambda}$.*

Définissons pour X et $L \in \mathcal{G}$:

$$\begin{cases} Z = L + i\lambda X \\ Z^* = L - i\lambda X \\ P = ZZ^* \end{cases}$$

Comme $\bar{Z}^t = Z^*$ et $\bar{Z^*}^t = Z$ il est clair que $\bar{P}^t = P$. De plus comme $P = L^2 + i\lambda[X, L] + \lambda X^2$ on a:

$$Tr(P) = Tr(L^2 + \lambda^2 X^2) = 2H(X, L)$$

Notons $P(t) = P(X(t), L(t))$

2.0.20. PROPOSITION. *$P(t)$ est une intégrale première du flot harmonique de H.*

Preuve

Il faut vérifier que $\dot{P}(t) = \frac{d}{dt} P \circ (X(t), L(t)) = 0$. Or:

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \dot{L}(t) + i\lambda \dot{X}(t) = \lambda^2 X(t) - i\lambda L(t) \\ \dot{Z}^*(t) = \dot{L}(t) - i\lambda \dot{X}(t) = \lambda^2 X(t) + i\lambda L(t) \end{cases}$$

et donc:

$$\dot{P} = \dot{Z}Z^* + Z\dot{Z}^* = (\lambda^2 X - i\lambda L)(L - i\lambda X) + (L + i\lambda X)(\lambda^2 X + iL) = 0$$

$\square$

Remarquons que P est un opérateur auto-adjoint pour la forme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^n$:

$$< A, PB >= \bar{B}^t \bar{P}^t A = \bar{B}^t PA =< PA, B >$$

Donc le nombre de valeur propres de $P(X, L)$ est indépendant de X et L, les valeurs propres dépendent de manière lisse de X et L et on peut choisir une base orthonormée de vecteurs propres dépendant aussi de manière lisse de X et L. Enfin comme $\overline{P(X, L)}^t = P(X, L)$, $P(X, L)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.

Soit Λ une valeur propre de $P(X,Y)$ considérée comme une fonction lisse $T^*\mathcal{G} \to \mathbb{R}$.

2.0.21. THEOREME. *Les orbites de Λ (i.e. du flot harmonique de l'hamiltonien (Λ, Ω)) sont périodiques de période $\frac{\pi}{\lambda}$.*

Preuve

Soit $\psi : T^*\mathcal{G} \to \mathbb{C}^n$ une application lisse qui à (X,L) associe un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre $\Lambda(X,L)$. Définissons l'application lisse $T : \mathcal{G} \to End(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C})$ par:

$$T(X,L)(\xi) =< \xi, \psi > \psi$$

ψ est de norme 1 donc $< \psi, \psi >= 1$ et donc $< \psi, d\psi >= 0$. De plus:

$$d(< P.\psi, \psi >) = d(< \Lambda\psi, \psi >) = d(\Lambda < \psi, \psi >) = d\Lambda$$

Mais:

$$\begin{aligned} d(< P.\psi, \psi >) &=< d(P.\psi), \psi > + < P.\psi, d\psi > \\ &=< dP.\psi, \psi > + < P.d\psi, \psi > + \Lambda \underbrace{< \psi, d\psi >}_{=0} \\ &=< dP.\psi, \psi > + < d\psi, P.\psi > \\ &=< dP.\psi, \psi > + \lambda \underbrace{< d\psi, \psi >}_{=0} \\ &=< dP.\psi, \psi > \end{aligned}$$

Or pour $f \in End(\mathbb{C}^n)$ $Tr(f \circ T) =< f(\psi), \psi >$. En effet soit une base orthonormée $(\psi_1 = \psi, \dots \psi_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Dans cette base $T(\psi_i) = \delta_{1i}\psi_1$ donc $f \circ T(\psi_i) = 0$ pour $i \neq j$ et donc $Tr(f \circ T) = f_1(\psi) =< f(\psi), \psi >$ avec $f(\psi) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\psi)\psi_i$. Dès lors:

$$d\Lambda = Tr(dP.T) = Tr(ZTdZ^* + Z^*TdZ)$$

Notons $(Z(t), Z^*(t))$ le flot de X_Λ en un point (Z_0, Z_0^*). Remarquons que $dZ \wedge dZ^* = 2i\lambda dX \wedge dL$. Donc $\Omega = \frac{-i}{2\lambda} Tr(dZ \wedge dZ^*)$. Dès lors:

$$i_{X_\Lambda}\Omega = \frac{-i}{2\lambda} Tr(\dot{Z} dZ^* - \dot{Z}^* dZ)$$

et donc puisque $i_{X_\Lambda} = -d\Lambda$ nécessairement:

$$\begin{cases} \dot{Z} = 2i\lambda TZ = 2i\lambda ZT \\ \dot{Z}^* = -2i\lambda Z^*T = -2i\lambda TZ^* \end{cases}$$

Dans une base orthogonale de vecteurs propres comprenant $\psi(X,L) = \psi(Z,Z^*)$ $P(X,L) = P(Z,Z^*)$ et $T(X,L) = T(Z,Z^*)$ sont diagonaux. Donc comme deux matrices diagonales commutent, pour tout Z et Z^* on a

$$[P(Z,Z^*), T(Z,Z^*)] = 0$$

Ainsi si on note $P(t) = P(Z, Z^*(t))$ et $T(t) = T(Z(t), Z^*(t))$:

$$[P(t), T^*(t)] = 0 \quad \forall\, t$$

Mais:

$$\dot{P}(t) = \dot{Z}(t)Z^*(t) + Z(t)\dot{Z}^*(t) = 2i\lambda(TZZ^*(t) - ZZ^*T(t)) = 2i\lambda([T(t), P(t)]) = 0$$

Donc P est constant le long de $(Z(t), Z^*(t))$. Donc ψ et T aussi. Soit U une matrice (indépendante du temps) telle que UPU^{-1} et UTU^{-1} soient diagonales. On peut même choisir U telle que $UTU^{-1} = diag(1, 0 \ldots, 0)$. Posons $\Theta(t) = UZ(t)U^{-1}$ et $\Theta^*(t) = Z^*(t)$: Θ et Θ^* vérifient:

$$\begin{cases} \dot{\Theta}(t) = \begin{pmatrix} 2i\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \Theta(t) \\ \dot{\Theta}^*(t) = \begin{pmatrix} -2i\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \Theta^*(t) \end{cases}$$

Et donc:

$$\begin{cases} \Theta(t) = \begin{pmatrix} e^{2i\lambda t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \Theta_0 \\ \Theta^*(t) = \begin{pmatrix} e^{-2i\lambda t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \Theta_0 \end{cases}$$

Ainsi les orbites de $(\Theta(t), \Theta^*(t))$ et donc de $(Z(t), Z^*(t))$ sont périodiques de périodes $\frac{\pi}{\lambda}$.

□

2.0.22. PROPOSITION. *Supposons ici que $\lambda = 0$. Soit $U \in SU(n)$. Définissons le long du flot harmonique $(X(t), L(t))$ les matrices $A(t) = U^{-1}\dot{X}(t)U(t)$ et $B(t) = U^{-1}(t)\dot{U}(t)$. Alors le couple (A, B) est une paire de Lax de l'hamiltonien X_H.*

Preuve

Comme $UU^-1 = I$, $\dot{U}U^{-1} + U\dot{U^{-1}} = 0$ et donc:

$$\dot{U^{-1}} = -U^{-1}\dot{U}U^{-1}$$

Or $UAU^{-1} = \dot{X}$ et $\ddot{X} = 0$. Donc:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{U}AU^{-1} + U\dot{A}U^{-1} - UAU^{-1}\dot{U}U^{-1} \\ &= U(U^{-1}\dot{U}A + \dot{A} - AU^{-1}\dot{U})U^{-1} \\ &= U(BA + \dot{A} - AB)U^{-1} \end{aligned}$$

et donc $\dot{A} = [A, B]$.

□

3. Système de Calgero-Moser rationnel

Définissons l'action de $G = SU(n)$ sur $M = T^*(\mathcal{G})$ par:

$$\boxed{\lambda(g,(X,L)) = (gXg^{-1}, gLg^{-1})}$$

et l'application $\mu : M \to \mathcal{G}^* \cong \mathcal{G}$ par:

$$\boxed{\mu(X,L) = [X,L]}$$

3.0.23. PROPOSITION. *μ est un moment associé à l'action hamiltonienne λ.*

Preuve

Rappelons que $\mathcal{G}^*$ s'identifie à $\mathcal{G}$ grâce à la forme de Killing $K = Tr$. Donc pour $A \in \mathcal{G}$ $\mu(X,L)(A) = Tr([X,L]A)$. Et donc:

$$\boxed{\tilde{\mu}(A)(X,L) = Tr([X,L]A) = Tr(A[X,L])}$$

Dès lors:

$$d\tilde{\mu}(A) = Tr(A.d(XL - LX)) = Tr((LA - AL)dX + (AX - XA)dL)$$

Mais:

$$-d\tilde{\mu}(A) = i_{X_{\tilde{\mu}(A)}}\Omega = Tr(dL(X_{\tilde{\mu}(A)})dX - dX(X_{\tilde{\mu}(A)})dL)$$

Et donc nécessairement:

$$\begin{cases} dL(X_{\tilde{\mu}(A)}) = -[L,A] \\ dX(X_{\tilde{\mu}(A)}) = [A,X] \end{cases}$$

D'où:

$$\boxed{X_{\tilde{\mu}(A)}(X,L) = ([A,X],[L,X])}$$

Déterminons maintenant $\lambda_*(A)$:

$$\lambda_*(A)(X,L) = T_I\lambda_{(X,L)}(A)$$

Rappelons que $Ad : G \to GL(\mathcal{G})$ vérifie $T_I Ad = ad : \mathcal{G} \to End(\mathcal{G})$ avec:

$$ad(U)(V) = [U,V]$$

Or $\lambda_{(X,L)} = (i_X Ad, i_L Ad)$ donc $T_I\lambda = (i_X ad, i_L ad)$ et donc:

$$\lambda_*(A)(X,L) = ([X,A],[L,A])$$

Ainsi $\lambda_*(A) = -X_{\tilde{\mu}(A)}$. Il reste à vérifier que λ est hamiltonienne et $\tilde{\mu}$ un homorphisme de Lie:

1. Soit $g \in G$:

$$\begin{aligned}\lambda_g^*(\Omega)((U,V),(U',V')) &= \Omega((gUg^{-1}, gVg^{-1}),(gU'g^{-1}, gV'g^{-1})) \\ &= Tr(gUV'g^{-1} - gU'Vg^{-1}) \\ &= Tr(UV' - U'V) \\ &= \Omega(U,V)\end{aligned}$$

donc λ est hamiltonienne.

2. Remarquons que pour A, B et $C \in \mathcal{G}$ on a:

$$Tr([A,B]C) = Tr(ABC - BAC) = Tr(ABC - ACB) = Tr(A[B,C])$$

Dès lors:

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\mu}(A), \tilde{\mu}(B)\}(X,L) &= \Omega(X_{\tilde{\mu}(A)}(X,L), X_{\tilde{\mu}(B)}(X,L)) \\
&= \Omega(([A,X],[A,L]),([B,X],[B,L])) \\
&= Tr([A,X][B,L] - [B,X][A,L]) \\
&= Tr(A[X,[B,L]] - A[L,[B,X]]) \\
&= Tr(A([X,[B,L]] + [L,[X,B]])) \\
&= Tr(A[B,[X,L]]) \\
&= Tr([A,B][X,L]) \\
&= \tilde{\mu}([A,B])(X,L)
\end{aligned}$$

et donc $\tilde{\mu}$ est un homomorphisme de Lie.

□

Considérons la matrice $C \in su(n)$ définie par:

$$C_{jk} = ig(1 - \delta_{jk})$$

avec $g \in \mathbb{R}$.

3.0.24. LEMME (Moser: 1975). *Soit X et $L \in su(n)$ tels que $[X,L] = C$. Il existe $U \in G_C = \{A \in SU(n) : ACA^{-1} = C\}$ tel que UXU^{-1} soit diagonale.*

Preuve

Comme X est hermitienne il existe $V \in SU(n)$ telle que $D = VUV^{-1}$ soit diagonale. Posons $Y = VCV^{-1}$ et pour $j = 1 \dots n$, $v_j = \sum_{k=1}^{n} V_{jk}$. Remarquons que $V^{-1} = \overline{V}^t$. Dès lors:

$$\sum_{l=1}^{n} V_{jl}\overline{V}_{kl} = \delta_{jk}$$

De plus comme D est diagonale, pour toute matrice A on a:

$$[D,A]_{jj} = D_{jj}A_{jj} - A_{jj}D_{jj} = 0$$

Donc comme $[D, VLV^{-1}] = DVLV^{-1} - VLV^{-1}D = V[X, L]V^{-1} = VCV^{-1} = Y$ on en déduit que $Y_{jj} = 0$ pour tout j. Or:

$$\begin{aligned}
Y_{jk} &= \sum_{l=1} Y_{jl}(C\bar{V}^t)_{lk} \\
&= \sum_{l,m=1}^{n} V_{jl}C_{lm}\bar{V}_{km} \\
&= ig \sum_{l,m=1}^{n} V_{jl}\bar{V}_{km}(1-\delta_{lm}) \\
&= ig \sum_{l,m=1}^{n} V_{jl}\bar{V}_{km} - ig\sum_{l=1}^{n} V_{jl}\bar{V}_{kl} \\
&= ig(v_j\bar{v}_k - \delta_{jk})
\end{aligned}$$

En particulier comme $Y_{ii} = 0$ $v_i\bar{v}_i = 0$. Soit alors la matrice diagonale

$$E = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{v}_n \end{pmatrix}$$

et soit $U = EV$. Comme $\bar{v}_i v_i = 1$, $E\bar{E}^t = E\bar{E} = 1$ et donc:

$$U\bar{U}^t = EV\bar{V}^t\bar{E}\bar{E}^t = I$$

Ainsi $U \in SU(n)$. De plus:

$$UXU^{-1} = EVXV^{-1}E^{-1} = EDE^{-1} = D$$

Donc UXU^{-1} est diagonale. Enfin:

$$\begin{aligned}
(UCU^{-1})_{jk} &= (EY\bar{E})_{jk} \\
&= E_{jj}(Y\bar{E})_{jk} \\
&= \bar{v}_j Y_{jk}\bar{E}_{kk} \\
&= ig\bar{v}_j v_k(v_j\bar{v}_k - \delta_{jk}) \\
&= ig(1 - \bar{v}_j v_k\delta_{jk}) \\
&= ig(1 - \bar{v}_i v_i\delta_{jk}) \\
&= ig(1 - \delta_{jk}) \\
&= C_{jk}
\end{aligned}$$

et donc $UCU^{-1} = C$.

□

3.0.25. COROLLAIRE. *$F_C = M_C/G_C$ est de dimension $2n$ est peut être paramétrée par les coordonnées $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ avec:*

$$X = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q_n \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \frac{ig}{q_j - q_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{ig}{q_j - q_k} & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Preuve
D'après le lemme de Moser on peut choisir X diagonale: $X = diag(q_1, \dots, q_n)$. De plus $[X, L] = C$. Donc pour $j \neq k$:

$$ig = C_{jk} = X_{jj} L_{jk} - L_{jk} X_{ii} = L_{jk}(q_j - q_k)$$

et donc $L_{jk} = \frac{ig}{q_j - q_k}$. Comme $[X, L]_{jj} = 0 = C_{jj}$ L_{jj} peut être choisi arbitrairement.

$\square$

3.0.26. REMARQUE. *La forme Ω_C induite par Ω sur F_c s'écrit:*

$$\begin{aligned}\Omega_C &= Tr(dX \wedge dL) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} dX_{jk} \wedge dL_{kj} \\ &= \sum_{j=1}^{n} dX_{jj} \wedge dL_{jj} \\ &= \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j\end{aligned}$$

Soit:

$$\boxed{\Omega = \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j}$$

L'hamiltonien H passe au quotient. En effet:

$$H(gXg^{-1}, gLg^{-1}) = \frac{1}{2} Tr(\lambda^2 g X^2 g^{-1} + g L^2 g^{-1}) = \frac{1}{2} Tr(\lambda^2 X^2 + L^2) = H(X, L)$$

Notons H_c la fonction induite:

$$\begin{aligned}H_c(X, L) &= \frac{1}{2}(\lambda^2 \sum_{j,k=1}^{n} X_{jk} X_{kj} + \sum_{j,k=1}^{n} L_{jk} L_{kj}) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} q_j^2 + \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{j \neq k} \frac{ig}{q_j - q_k} \frac{ig}{q_k - q_i})\end{aligned}$$

Soit:

$$\boxed{H_C = \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1}^{n} q_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{j \neq k} \frac{g^2}{(q_j - q_k)^2}}$$

Le système (F_C, H_C, Ω_C) est appelé le système de Calgero-Moser rationnel.

Les résultats de la section précédente nous permettent d'énoncer le théorème suivant:

3.0.27. THEOREME. *Les orbites du flot harmonique du système de Calgero-Moser rationnel (H_C, Ω_C) sont $\frac{2\pi}{\lambda}$-périodiques.*

3.0.28. REMARQUE. *Lorsque* $\lambda = 0$*, on peut vérifier que les valeurs propres* $\lambda_i(q,p)$ *de* $L(q,p)$ *sont en involutions:* $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$*. Dés lors les fonctions* $f_1 = Tr(L), f_2 = Tr(L^2), \dots, f_n = Tr(L^n))$ *sont en involution. Comme leurs différentielles sont linéairement indépendantes le système hamiltonien* (f_2, Ω_C) *est complètement intégrable. Mais* $f_2 = 2H_C$*. Ainsi le système de Calgero-Moser rationnel* (H_C, Ω_C) *est complètement intégrable.*

4. Systèmes complètement intégrables

Ce résultat est un début de démonstration du théorème suivant:

4.0.29. THEOREME. *Il y a 4 choix possibles de* U *pour que le système*

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + U(q)$$

soit intégrable:

1. *système rationnel:*
$$U = \sum_{i \neq j} \frac{g^2}{(q_i - q_j)^2}$$
2. *système trigonométrique (compact):*
$$U = \sum_{i \neq j} \frac{g^2}{sin^2(\frac{q_i - q_j}{2})}$$
3. *système hyperbolique (ou trigonométrique non compact):*
$$U = \sum_{i \neq j} \frac{g^2}{sh^2(\frac{q_i - q_j}{2})}$$
4. *système elliptique:*
$$U = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}(q_i - q_j)$$
où $\mathcal{P}$ *est la fonction de Weierstrass.*