Sur la symétrie des multi-valuations des courbes planes

Delphine Pol

Université d'Angers, France

Rencontres Doctorales Lebesgue 2015
Nantes, 28 octobre 2015

Directeur de thèse : Pr. Michel Granger

Table des matières

1. Préliminaires
   - Paramétrage
   - Multi-valuations
2. Symétrie
   - Courbe irréductible
   - Courbe réductible
3. Application : Idéal jacobien et résidus logarithmiques
   - Résidus logarithmiques
   - Lien avec les différentielles de Kähler

Paramétrage

Soit C une courbe définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ par une fonction analytique $f(x, y)$. On suppose f sans facteur carré (i.e. *réduite*).

Paramétrage

Soit C une courbe définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ par une fonction analytique $f(x,y)$. On suppose f sans facteur carré (i.e. *réduite*). On note :

- $\mathscr{O}_C = \mathbb{C}\{x,y\}/(f)$ **l'anneau de la courbe** C
- $Q(\mathscr{O}_C)$ **l'anneau des fractions** de $\mathscr{O}_C$. Un élément de $Q(\mathscr{O}_C)$ s'écrit $g = \frac{a}{b}$ où a et b sont analytiques et b n'est pas un diviseur de zéro de $\mathscr{O}_C$.

Paramétrage

Soit C une courbe définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ par une fonction analytique $f(x, y)$. On suppose f sans facteur carré (i.e. *réduite*). On note :

- $\mathscr{O}_C = \mathbb{C}\{x, y\}/(f)$ **l'anneau de la courbe** C
- $Q(\mathscr{O}_C)$ **l'anneau des fractions** de $\mathscr{O}_C$. Un élément de $Q(\mathscr{O}_C)$ s'écrit $g = \frac{a}{b}$ où a et b sont analytiques et b n'est pas un diviseur de zéro de $\mathscr{O}_C$.

Proposition

Toute courbe plane définie au voisinage de 0 possède un paramétrage local.

Paramétrage

Soit C une courbe définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ par une fonction analytique $f(x,y)$. On suppose f sans facteur carré (i.e. *réduite*). On note :

- $\mathscr{O}_C = \mathbb{C}\{x,y\}/(f)$ **l'anneau de la courbe** C
- $Q(\mathscr{O}_C)$ **l'anneau des fractions** de $\mathscr{O}_C$. Un élément de $Q(\mathscr{O}_C)$ s'écrit $g = \frac{a}{b}$ où a et b sont analytiques et b n'est pas un diviseur de zéro de $\mathscr{O}_C$.

Proposition

Toute courbe plane définie au voisinage de 0 possède un paramétrage local.

Exemple : Soit C définie par $f(x,y) = x^3 - y^5$.
Un paramétrage est : $x(t) = t^5$, $y(t) = t^3$

Soit $C = C_1 \cup \cdots \cup C_p$ une courbe plane avec p branches. On note φ_i un paramétrage de la branche C_i. Il induit une valuation $\mathrm{val}_i : Q(\mathscr{O}_C) \to (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ qui à $g \in Q(\mathscr{O}_C)$ associe l'ordre en t_i de $g \circ \varphi_i(t_i)$.

Soit $C = C_1 \cup \cdots \cup C_p$ une courbe plane avec p branches. On note φ_i un paramétrage de la branche C_i. Il induit une valuation $\mathrm{val}_i : Q(\mathscr{O}_C) \to (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ qui à $g \in Q(\mathscr{O}_C)$ associe l'ordre en t_i de $g \circ \varphi_i(t_i)$.

Définition

La **multi-valuation** de $g \in Q(\mathscr{O}_C)$ est

$$\mathrm{val}(g) = (\mathrm{val}_1(g), \ldots, \mathrm{val}_p(g)) \in (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})^p$$

Soit $C = C_1 \cup \cdots \cup C_p$ une courbe plane avec p branches. On note φ_i un paramétrage de la branche C_i. Il induit une valuation $\mathrm{val}_i : Q(\mathscr{O}_C) \to (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ qui à $g \in Q(\mathscr{O}_C)$ associe l'ordre en t_i de $g \circ \varphi_i(t_i)$.

Définition

La **multi-valuation** de $g \in Q(\mathscr{O}_C)$ est

$$\mathrm{val}(g) = (\mathrm{val}_1(g), \ldots, \mathrm{val}_p(g)) \in (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})^p$$

Exemple : Soit C définie par $f(x,y) = (x^3 - y^5)(x^2 - y^3)$. Cette courbe a deux branches. Un paramétrage est : $\left(\varphi_1(t_1) = (t_1^5, t_1^3), \varphi_2(t_2) = (t_2^3, t_2^2)\right)$. Pour $g = \dfrac{y}{x}$, on a donc $g = \left(\dfrac{t_1^3}{t_1^5}, \dfrac{t_2^2}{t_2^3}\right)$ et $\mathrm{val}(g) = (-2, -1)$.

Dual d'un idéal fractionnaire

Définition

Un **idéal fractionnaire** I est un sous $\mathscr{O}_C$-module de $Q(\mathscr{O}_C)$ de type fini qui contient un non diviseur de zéro.
On définit $\mathrm{val}(I) := \{\mathrm{val}(g); g \in I$ non diviseur de zéro $\}$.

Exemples : l'anneau $\mathscr{O}_C$, l'idéal jacobien $\mathscr{J}_C = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \subseteq \mathscr{O}_C$ sont des idéaux fractionnaires.

Dual d'un idéal fractionnaire

Définition

Un **idéal fractionnaire** I est un sous $\mathscr{O}_C$-module de $Q(\mathscr{O}_C)$ de type fini qui contient un non diviseur de zéro.
On définit $\mathrm{val}(I) := \{\mathrm{val}(g); g \in I$ non diviseur de zéro $\}$.

Exemples : l'anneau $\mathscr{O}_C$, l'idéal jacobien $\mathscr{J}_C = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \subseteq \mathscr{O}_C$ sont des idéaux fractionnaires.

Définition

Soit I un idéal fractionnaire. Le dual de I est :

$$I^{\vee} = \{m \in Q(\mathscr{O}_C); m \cdot I \subseteq \mathscr{O}_C\}$$

Symétrie

Définition

Le semigroupe de la courbe est $\mathrm{val}(\mathscr{O}_C)$. Il existe un élément minimal $\gamma \in \mathbb{N}^p$, appelé le **conducteur**, tel que $\gamma + \mathbb{N}^p \subseteq \mathrm{val}(\mathscr{O}_C)$.

Symétrie

Définition

Le semigroupe de la courbe est $\mathrm{val}(\mathscr{O}_C)$. Il existe un élément minimal $\gamma \in \mathbb{N}^p$, appelé le **conducteur**, tel que $\gamma + \mathbb{N}^p \subseteq \mathrm{val}(\mathscr{O}_C)$.

Proposition (E.Kunz)

Si C est une courbe plane **irréductible**, alors

$$\forall v \in \mathbb{Z}, v \in \mathrm{val}(\mathscr{O}_C) \iff \gamma - v - 1 \notin \mathrm{val}(\mathscr{O}_C) \qquad (1)$$

Symétrie

Définition

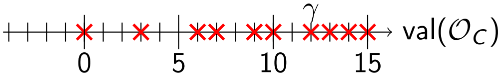
Le semigroupe de la courbe est $\mathrm{val}(\mathscr{O}_C)$. Il existe un élément minimal $\gamma \in \mathbb{N}^p$, appelé le **conducteur**, tel que $\gamma + \mathbb{N}^p \subseteq \mathrm{val}(\mathscr{O}_C)$.

Proposition (E.Kunz)

Si C est une courbe plane **irréductible**, alors

$$\forall v \in \mathbb{Z}, v \in \mathrm{val}(\mathscr{O}_C) \iff \gamma - v - 1 \notin \mathrm{val}(\mathscr{O}_C) \tag{1}$$

Exemple : $f(x,y) = x^3 - y^7$, paramétrage : $x(t) = t^7$, $y(t) = t^3$



On définit pour I idéal fractionnaire et $v \in \mathbb{Z}^p$:

$$\Delta_i(v, \mathrm{val}(I)) = \{\alpha \in \mathrm{val}(I) \ ; \ \alpha_i = v_i \text{ et } \forall j \neq i, \alpha_j > v_j\}$$

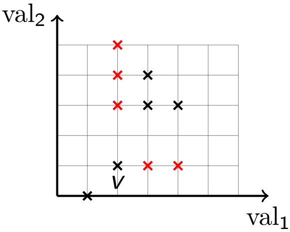
et $\Delta(v, \mathrm{val}(I)) = \bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i(v, \mathrm{val}(I))$.

On définit pour I idéal fractionnaire et $v \in \mathbb{Z}^p$:

$$\Delta_i(v, \mathrm{val}(I)) = \{\alpha \in \mathrm{val}(I) \ ; \ \alpha_i = v_i \text{ et } \forall j \neq i, \alpha_j > v_j\}$$

et $\Delta(v, \mathrm{val}(I)) = \bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i(v, \mathrm{val}(I))$.

Pour $p = 2$, on représente en rouge l'ensemble $\Delta(v, \mathrm{val}(I))$, où les croix indiquent les multi-valuations de I.

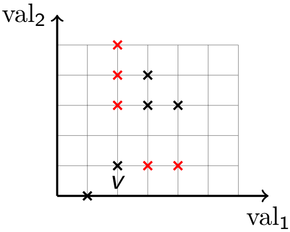


On définit pour I idéal fractionnaire et $v \in \mathbb{Z}^p$:

$$\Delta_i(v, \mathrm{val}(I)) = \{\alpha \in \mathrm{val}(I) \; ; \; \alpha_i = v_i \text{ et } \forall j \neq i, \alpha_j > v_j\}$$

et $\Delta(v, \mathrm{val}(I)) = \bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i(v, \mathrm{val}(I))$.

Pour $p = 2$, on représente en rouge l'ensemble $\Delta(v, \mathrm{val}(I))$, où les croix indiquent les multi-valuations de I.



Théorème (F.Delgado de la Mata)

Soit $C = C_1 \cup \cdots \cup C_p$ une courbe plane. Alors :

$$\forall v \in \mathbb{Z}^p, v \in \mathrm{val}(\mathscr{O}_C) \iff \Delta(\gamma - v - \underline{1}, \mathrm{val}(\mathscr{O}_C)) = \varnothing \qquad (2)$$

$f(x,y) = (x^2 - y^3)(x^3 - y^2)$

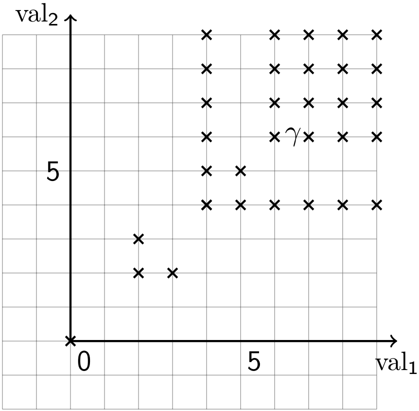


Figure : Semigroupe de C

On a :
$x = (t_1^3, t_2^2)$, $y = (t_1^2, t_2^3)$
$x^2 - y^3 = (0, t_2^4 - t_2^9)$,
$x^3 - y^2 = (t_1^9 - t_1^4, 0)$

Les croix représentent les éléments de $\mathrm{val}(\mathscr{O}_C)$.

$f(x,y) = (x^2 - y^3)(x^3 - y^2)$

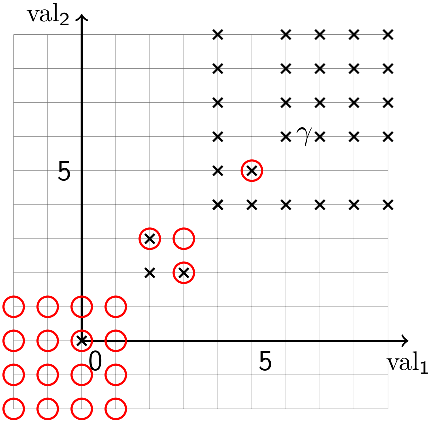


Figure : Semigroupe de C

On a :

$x = (t_1^3, t_2^2)$, $y = (t_1^2, t_2^3)$

$x^2 - y^3 = (0, t_2^4 - t_2^9)$,

$x^3 - y^2 = (t_1^9 - t_1^4, 0)$

Les croix représentent les éléments de $\mathrm{val}(\mathscr{O}_C)$.

Les cercles rouges représentent les éléments v tels que $\Delta(v, \mathrm{val}(\mathscr{O}_C)) = \emptyset$.

Généralisation

On peut en fait généraliser le Théorème de Delgado :

Généralisation

On peut en fait généraliser le Théorème de Delgado :

Théorème (P.)

Soit $C = C_1 \cup \cdots \cup C_p$ une courbe plane, et I un idéal fractionnaire. Alors :

$$\forall v \in \mathbb{Z}^p, v \in \mathrm{val}(I^\vee) \iff \Delta(\gamma - v - \underline{1}, \mathrm{val}(I)) = \varnothing$$

Généralisation

On peut en fait généraliser le Théorème de Delgado :

Théorème (P.)

Soit $C = C_1 \cup \cdots \cup C_p$ une courbe plane, et I un idéal fractionnaire. Alors :

$$\forall v \in \mathbb{Z}^p, v \in \mathrm{val}(I^\vee) \iff \Delta(\gamma - v - \underline{1}, \mathrm{val}(I)) = \varnothing$$

La preuve dans le cas irréductible est facile, mais elle est beaucoup plus subtile pour les courbes réductibles.

Remarque : Le Théorème est vrai pour les courbes Gorenstein.

Exemple : $f = (x^2 - y^3)(x^4 - y^3)$ et $\mathscr{J}_C = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

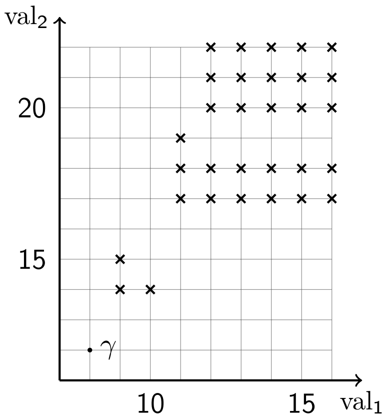


Figure : Multi-valuations de $\mathscr{J}_C$

Exemple : $f = (x^2 - y^3)(x^4 - y^3)$ et $\mathscr{J}_C = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

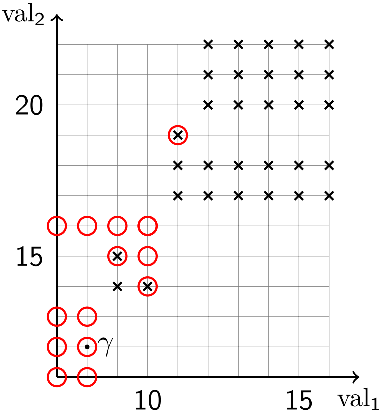


Figure : Multi-valuations de $\mathscr{J}_C$

Exemple : $f = (x^2 - y^3)(x^4 - y^3)$ et $\mathcal{J}_C = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

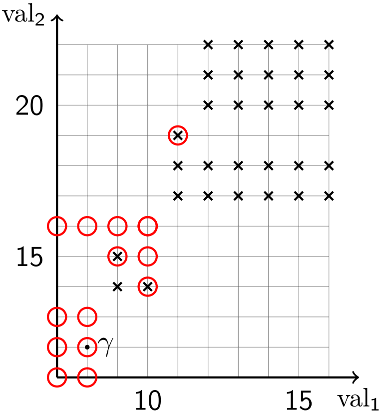


Figure : Multi-valuations de $\mathcal{J}_C$

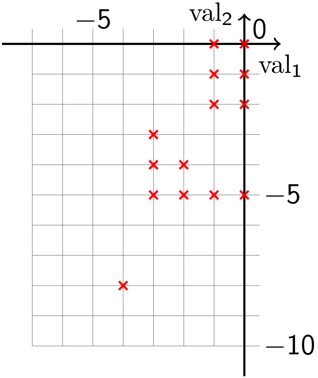


Figure : Multi-valuations de $\mathcal{J}_C^\vee$

Résidus logarithmiques

Définition

Soit $\omega = \dfrac{a(x,y)\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y}{f}$ une 1-forme méromorphe. On dit qu'elle est **logarithmique** si $f\mathrm{d}\omega$ est holomorphe.

Résidus logarithmiques

Définition

Soit $\omega = \dfrac{a(x,y)\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y}{f}$ une 1-forme méromorphe. On dit qu'elle est **logarithmique** si $f\mathrm{d}\omega$ est holomorphe.

Exemples : les 1-formes holomorphes et $\dfrac{\mathrm{d}f}{f}$ sont logarithmiques

Résidus logarithmiques

Définition

Soit $\omega = \dfrac{a(x,y)\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y}{f}$ une 1-forme méromorphe. On dit qu'elle est **logarithmique** si $f\mathrm{d}\omega$ est holomorphe.

Exemples : les 1-formes holomorphes et $\dfrac{\mathrm{d}f}{f}$ sont logarithmiques

Proposition (K.Saito)

Soit ω une 1-forme logarithmique. Il existe $g \in \mathbb{C}\{x,y\}$ non diviseur de zéro dans $\mathscr{O}_C$, $\xi \in \mathbb{C}\{x,y\}$ et η une 1 forme holomorphe tels que :

$$g\omega = \xi\frac{\mathrm{d}f}{f} + \eta$$

Propriétés de $\mathscr{R}_C$

Définition

Le résidu de $\omega = \dfrac{1}{g}\left(\xi\dfrac{\mathrm{d}f}{f} + \eta\right)$ est $\operatorname{res}(\omega) = \left.\dfrac{\xi}{g}\right|_C \in Q(\mathscr{O}_C)$.

On note $\mathscr{R}_C$ le module des résidus logarithmiques de C.

Propriétés de $\mathscr{R}_C$

Définition

Le résidu de $\omega = \frac{1}{g}\left(\xi\frac{\mathrm{d}f}{f} + \eta\right)$ est $\mathrm{res}(\omega) = \left.\frac{\xi}{g}\right|_C \in Q(\mathscr{O}_C)$.

On note $\mathscr{R}_C$ le module des résidus logarithmiques de C.

- $\mathscr{R}_C$ est un idéal fractionnaire
- (M.Granger, M.Schulze) On a $\mathscr{J}_C^\vee = \mathscr{R}_C$

Propriétés de $\mathscr{R}_C$

Définition

Le résidu de $\omega = \dfrac{1}{g}\left(\xi \dfrac{\mathrm{d}f}{f} + \eta\right)$ est $\mathrm{res}(\omega) = \dfrac{\xi}{g}\Big|_C \in Q(\mathscr{O}_C)$.

On note $\mathscr{R}_C$ le module des résidus logarithmiques de C.

- $\mathscr{R}_C$ est un idéal fractionnaire
- (M.Granger, M.Schulze) On a $\mathscr{J}_C^\vee = \mathscr{R}_C$

Corollaire

$$\forall v \in \mathbb{Z}^p, v \in \mathrm{val}(\mathscr{R}_C) \iff \Delta(\gamma - v - \underline{1}, \mathrm{val}(\mathscr{J}_C)) = \varnothing$$

Lien avec les différentielles de Kähler

Le module des différentielles de Kähler est

$$\Omega^1_C := \frac{\Omega^1_{\mathbb{C}^2}}{(f)\Omega^1_{\mathbb{C}^2} + \mathbb{C}\{x, y\}\,\mathrm{d}f}$$

Lien avec les différentielles de Kähler

Le module des différentielles de Kähler est

$$\Omega^1_C := \frac{\Omega^1_{\mathbb{C}^2}}{(f)\Omega^1_{\mathbb{C}^2} + \mathbb{C}\{x,y\}\,\mathrm{d}f}$$

Soit $\varphi_i = (x_i, y_i)$ un paramétrage de C_i, $X = (x_1(t_1), \ldots, x_p(t_p))$ et $Y = (y_1(t_1), \ldots, y_p(t_p))$.

Définition

Pour $\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y \in \Omega^1_C$, on note $\mathrm{val}(\omega) = \mathrm{val}(a \cdot X' + b \cdot Y') + \underline{1} \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^p$

Lien avec les différentielles de Kähler

Le module des différentielles de Kähler est

$$\Omega^1_C := \frac{\Omega^1_{\mathbb{C}^2}}{(f)\Omega^1_{\mathbb{C}^2} + \mathbb{C}\{x,y\}\,\mathrm{d}f}$$

Soit $\varphi_i = (x_i, y_i)$ un paramétrage de C_i, $X = (x_1(t_1), \ldots, x_p(t_p))$ et $Y = (y_1(t_1), \ldots, y_p(t_p))$.

Définition

Pour $\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y \in \Omega^1_C$, on note
$\mathrm{val}(\omega) = \mathrm{val}(a \cdot X' + b \cdot Y') + \underline{1} \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^p$

Exemple : $\mathrm{val}(\mathrm{d}g) = \mathrm{val}(g)$ pour tout $g \in \mathscr{O}_C$.

Proposition

$$\mathrm{val}(\mathscr{J}_C) = \gamma + \mathrm{val}(\Omega^1_C) - \underline{1}$$

Proposition

$$\mathrm{val}(\mathscr{J}_C) = \gamma + \mathrm{val}(\Omega^1_C) - \underline{1}$$

Par le théorème de symétrie, on a :

Proposition (P.)

$$\forall v \in \mathbb{Z}^p, v \in \mathrm{val}(\mathscr{R}_C) \iff \Delta(-v, \mathrm{val}(\Omega^1_C)) = \varnothing$$

Proposition

$$\mathrm{val}(\mathscr{J}_C) = \gamma + \mathrm{val}(\Omega^1_C) - \underline{1}$$

Par le théorème de symétrie, on a :

Proposition (P.)

$$\forall v \in \mathbb{Z}^p, v \in \mathrm{val}(\mathscr{R}_C) \iff \Delta(-v, \mathrm{val}(\Omega^1_C)) = \varnothing$$

Remarque. Les multi-valuations des différentielles de Kähler couplées avec le semigroupe de la courbe sont utilisés par A.Hefez et M.Hernandes pour la classification analytique des courbes planes avec une ou deux branches.

Merci de votre attention !

Bibliographie

- Félix Delgado de la Mata, *Gorenstein curves and symmetry of the semigroup of values*, Manuscripta Math. **61** (1988), no. 3, 285–296.
- Abramo Hefez and Marcelo E. Hernandes, *The analytic classification of plane branches*, Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), no. 2, 289–298.
- Delphine Pol, *Logarithmic residues along plane curves*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **353** (2015), no. 4, 345–349.
- ______, *On the values of logarithmic residues along curves*, ArXiv.org (2015), no. 1410.2126.