

Classification des surfaces topologiques compactes

Delphine POL
sous la direction de Frédéric MANGOLTE

18 mai 2012

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de classer les surfaces topologiques compactes et connexes, avec ou sans bord. On présentera les surfaces sous la forme d'un espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés d'un polygone dont le nombre de côtés est pair, et on introduira la notion d'orientabilité et la caractéristique d'Euler pour donner des critères permettant de déterminer si deux surfaces sont homéomorphes.

Table des matières

Introduction	3
1 Variétés topologiques et somme connexe	4
1.1 Définition d'une variété topologique	4
1.2 Quelques exemples de surfaces compactes	4
1.3 Surface construite par identification deux à deux des côtés d'un polygone	6
1.4 Somme connexe	10
1.5 Orientabilité	12
2 Classification des surfaces compactes	14
2.1 Triangulation des surfaces compactes	14
2.2 Démonstration du théorème de classification des surfaces compactes	15
2.2.1 Première étape : d'une triangulation à un polygone	15
2.2.2 Deuxième étape : élimination des paires adjacentes de première espèce	17
2.2.3 Troisième étape : identifier en un seul point tous les sommets du polygone	17
2.2.4 Quatrième étape : rendre adjacentes les paires de seconde espèce	18
2.2.5 Cinquième étape : les paires de première espèce	18
2.3 Caractéristique d'Euler d'une surface compacte	20
3 Surfaces à bord	25
3.1 Définition, exemples	25
3.2 Triangulation des surfaces compactes à bord	28
3.3 Classification des surfaces compactes à bord	30
3.4 Caractéristique d'Euler d'une surface à bord	31
Conclusion	33

Introduction

This work concerns mathematical objects called manifolds. A n -dimensional manifold is a set whose local properties in a neighbourhood of a point are the same as the euclidean space \mathbb{R}^n . A more rigorous definition is given in the first part. These objects may be subsets of \mathbb{R}^k for a certain k , such as the unit sphere of \mathbb{R}^3 , or not. Indeed, for example, the quotient space of a closed interval of \mathbb{R} obtained by identifying its two endpoints is a 1-dimensional manifold.

Some dimensions are well known by mathematicians, in particular the dimensions 1 and 2. In fact, a connected 1-dimensional manifold is either homeomorphic to an open interval of \mathbb{R} or a circle. As concerns connected and compact 2-dimensional manifolds, usually called compact surfaces, there exists a classification theorem. For higher dimensions, we do not have such a result. It has even been proved that it was impossible to find a classification theorem for n -dimensional manifolds if $n \geq 4$.

In this work, only connected 1 and 2-dimensional manifolds are studied. We first prove that the quotient space obtained by identifying pairs of edges of a polygon which has an even number of sides is a compact surface. In fact, each compact surface can be built from such a polygon, it is a consequence of a theorem proved by Tibor Rado in 1925, but we are not going to prove it. The statement of Rado's theorem is that every compact surface can be triangulated, that is to say, it is possible to cover a compact surface with a finite family of closed subsets, each of them homeomorphic to a triangle of \mathbb{R}^2 . Some other properties are required, they are given in definition 9 in section 2.1.

The proof of the classification theorem for compact surfaces developed in this work follows the demonstration given by W.S. Massey in [1]. Surfaces are regarded as quotient spaces obtained by identifying in pairs the edges of a $2n$ -gon. Thanks to the "cut and paste" method, we are going to give all possible classes of compact surfaces.

In order to distinguish between all the different classes of surfaces given in this theorem, a topological invariant is introduced : the Euler characteristic. The Euler characteristic of a compact surface can be determined thanks to a triangulation, and it can be proved that it does not depend on the chosen triangulation. A partial proof of this result is given in section 2.3. Then, with the notion of orientability and the Euler characteristic, it is possible to determine if two surfaces are homeomorphic or not. For example, the Euler characteristic of a sphere is 2, whereas the Euler characteristic of a torus is 0, so they are not homeomorphic.

In fact, the classification theorem for compact surfaces can be extended to compact surfaces with boundary. In the case of surfaces with boundary, some points have a neighbourhood whose properties are the same as the half-plane $\mathbb{R}^2 \cap \{x \geq 0\}$. Surfaces with boundary can be obtained from surfaces without boundary by making "holes" in it, that is to say by removing subsets homeomorphic to an open disc of \mathbb{R}^2 .

Thus, we obtain a classification of all possible compact surfaces, with or without boundary. The Euler characteristic (or the genus), the orientability, and the number of connected components of the boundary determine if two surfaces are homeomorphic or not.

1 Variétés topologiques et somme connexe

1.1 Définition d'une variété topologique

Commençons par donner la définition d'une variété topologique de dimension n .

Définition 1 Soit n un entier naturel. On appelle variété topologique de dimension n tout espace topologique séparé dans lequel tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à une boule ouverte de l'espace euclidien \mathbb{R}^n .

Remarque. On notera qu'il serait équivalent de demander à ce qu'en chaque point p il y ait un voisinage ouvert homéomorphe (par f) à un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n . En effet, un ouvert de \mathbb{R}^n contient une boule ouverte centrée en $f(p)$, et il suffit donc de considérer l'image réciproque de cette boule par f pour obtenir un voisinage de p homéomorphe à une boule ouverte de \mathbb{R}^n .

Donnons quelques exemples de variétés topologiques de dimension n .

Exemple 1 L'espace euclidien \mathbb{R}^n est une variété topologique de dimension n .

Exemple 2 La sphère unité $\mathcal{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$ est une variété topologique de dimension n .

En effet, la sphère \mathcal{S}^n est un sous-ensemble de l'espace euclidien \mathbb{R}^n donc il s'agit bien d'un espace topologique séparé.

On considère le point $p = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathcal{S}^n$. Montrons qu'il possède un voisinage ouvert homéomorphe à la boule unité $\mathcal{B}_n(0, 1)$ de \mathbb{R}^n .

On pose $V = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{S}^n, x_{n+1} > 0\}$.

On considère l'application f définie pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{B}_n(0, 1)$ par :

$$f((x_1, \dots, x_n)) = \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)} \right)$$

L'application f est continue, et on vérifie qu'elle est à valeurs dans V .

Montrons que f est bijective de $\mathcal{B}_n(0, 1)$ sur V .

Soit $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in V$. Comme $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$, on a $x_{n+1} = \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}$, et donc x a un unique antécédent par f , qui est (x_1, \dots, x_n) . La réciproque de f est aussi continue, et donc f est un homéomorphisme de $\mathcal{B}_n(0, 1)$ sur V .

De plus, pour tout $y \in \mathcal{S}^n$, il existe une rotation de \mathbb{R}^n qui envoie y sur p , cette rotation étant un homéomorphisme de \mathbb{R}^n , on en déduit que y a un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathcal{B}_n(0, 1)$, par exemple en prenant l'image réciproque de V par la rotation.

1.2 Quelques exemples de surfaces compactes

Définition 2 Dans la suite, on appellera surfaces les variétés de dimension 2 connexes.

Il convient d'introduire certaines surfaces qui joueront un rôle essentiel dans le théorème de classification des surfaces compactes.

Commençons par la plus simple, que nous avons déjà évoqué dans le cas de la dimension n :

Exemple 3 La sphère unité de \mathbb{R}^3 est une surface.

Un autre exemple de surface est celle d'un donut ou d'une chambre à air, c'est-à-dire un tore, comme représenté sur la figure 1(a).

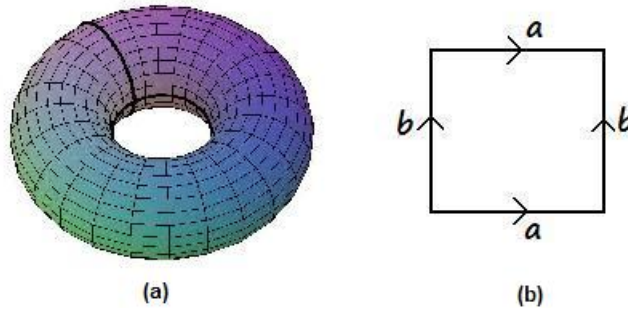


FIGURE 1 – Tores

Définition 3 On peut définir un tore comme étant un ensemble homéomorphe au sous-ensemble suivant de \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

Un tel ensemble est une surface.

Preuve. On considère un point p de \mathcal{T} privé du cercle de centre O et de rayon 1 dans le plan (O, x, y) et privé du cercle de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1 dans le plan (O, x, z) . Ces deux cercles correspondent aux cercles noirs de la figure 1(a). Soit f l'application définie pour tout $(\varphi, \theta) \in]0, 2\pi[\times]-\pi, \pi[$ par :

$$f(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} (2 + \cos \theta) \cos \varphi \\ (2 + \cos \theta) \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

On admettra que f est un homéomorphisme de $]0, 2\pi[\times]-\pi, \pi[$ sur le tore privé des deux cercles précédemment indiqués. Comme $]0, 2\pi[\times]-\pi, \pi[$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 , le point p a un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 . Pour les points situés sur les cercles qu'on a enlevés, il suffit de considérer φ ou θ entre $]-\pi, \pi[$ ou $]0, 2\pi[$ pour obtenir des voisinages ouverts de ces points homéomorphes à des ouverts de \mathbb{R}^2 .

Le tore est donc une surface. □

Remarque. Sans le justifier rigoureusement, le tore peut être obtenu en faisant tourner le cercle vertical indiqué sur la figure 1(a) le long du cercle horizontal dessiné en noir, et le tore est homéomorphe au produit direct de deux cercles, à savoir $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$.

On peut le voir aussi comme l'espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés d'un carré selon la règle indiquée sur la figure 1(b). Les côtés à identifier portent la même lettre et les flèches indiquent le sens dans lequel l'identification doit se faire. Quand on identifie les deux côtés portant la lettre a , on obtient un cylindre, et on identifie ensuite les bords du cylindre.

Le troisième exemple fondamental de surface est le plan projectif réel, que nous appellerons dans la suite plan projectif.

Définition 4 Un plan projectif réel est l'espace quotient obtenu à partir de la sphère \mathcal{S}^2 en identifiant les paires de points diamétralement opposés. Tout espace homéomorphe à ce quotient est aussi appelé plan projectif.

Remarque. Si deux points sont diamétralement opposés sur la sphère, il y en a au moins un qui se situe dans l'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathcal{S}^2, z \geq 0\}$, et si les deux sont dans H , c'est qu'ils sont à l'équateur. C'est pourquoi on considère parfois le plan projectif comme l'espace quotient obtenu en

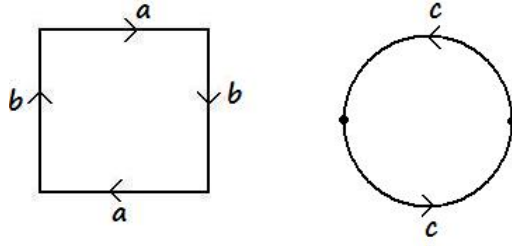


FIGURE 2 – Deux méthodes de construction d'un plan projectif

identifiant les points diamétralement opposés situés dans $H \cap \{z = 0\}$. Comme H est homéomorphe à un disque fermé, qui est lui-même homéomorphe à un carré, cela nous amène à considérer le plan projectif comme étant l'espace quotient obtenu en identifiant les côtés du carré, ou les arcs de cercle, comme indiqué sur la figure 2.

Nous n'avons pas encore prouvé que le plan projectif était bien une surface, mais nous allons prouver que de façon général, si on identifie deux à deux les côtés d'un polygone régulier dont le nombre de côtés est pair, on obtient bien une surface.

1.3 Surface construite par identification deux à deux des côtés d'un polygone

Proposition 1 *L'espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés d'un polygone régulier à $2k$ côtés est une surface compacte.*

Preuve. Soit X un polygone régulier à $2k$ côtés, et Y l'espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés du polygone, et π la surjection canonique.

L'espace quotient Y est compact car X est compact et Y est muni de la topologie quotient.

Montrons que tout point p de Y a un voisinage ouvert homéomorphe à une boule ouverte de \mathbb{R}^2 et que Y est un espace séparé.

Commençons par définir certains ouverts de Y homéomorphes à des ouverts de X .

L'espace quotient Y est muni de la topologie quotient induite par X , c'est-à-dire que $U \subset Y$ est un ouvert de Y si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X .

Soit $p \in Y$. Trois cas se présentent à nous : p peut être l'image d'un point de l'intérieur $\overset{\circ}{X}$ de X vu comme sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , l'image d'un point d'une arête de X mais distinct des sommets, ou l'image d'un sommet de X .

Premier cas, $\pi^{-1}(p)$ est dans l'intérieur de X

Alors p a un unique antécédent p_1 dans X . On considère un disque ouvert $D(p_1, r) \subset \overset{\circ}{X}$.

Soit $D_r(p)$ l'image de $D(p_1, r)$ par π . Alors $D_r(p)$ est un ouvert de Y contenant p car $\pi^{-1}(D_r(p)) = D(p_1, r)$ étant donné que les points de l'intérieur de X ne sont identifiés avec aucun autre point de X .

Montrons que la restriction $\tilde{\pi}$ de π à $D(p_1, r)$ est un homéomorphisme de $D(p_1, r)$ sur son image. Comme $D_r(p)$ est un ouvert de Y , et π est la surjection canonique, $\tilde{\pi}$ est continue. De plus, si U est un ouvert de $D(p_1, r)$, comme $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$, $\pi(U) = \tilde{\pi}(U)$ est un ouvert de Y , donc $\tilde{\pi}^{-1}$ est continue.

Donc p a un voisinage ouvert homéomorphe à une boule ouverte de \mathbb{R}^2 .

Deuxième cas, p est l'image d'un point d'une arête mais pas d'un sommet de X

Alors p a deux antécédents p_1 et p_2 chacun dans une arête A_1 et A_2 de X .

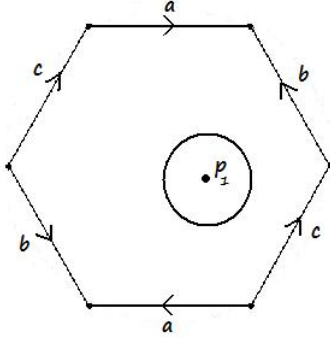


FIGURE 3 – Premier cas

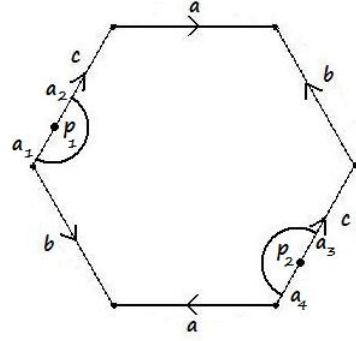


FIGURE 4 – Deuxième cas

On considère un disque ouvert $D(p_1, r)$ de \mathbb{R}^2 de sorte que sa fermeture coupe A_1 en deux points a_1 et a_2 distincts des sommets. Alors le disque fermé $\overline{D}(p_2, r)$ intersecte A_2 en deux points a_3 et a_4 , comme indiqué sur la figure 4.

De plus, $\pi(]a_1, a_2[) = \pi(]a_3, a_4[)$. Quitte à renuméroter, on peut demander à ce que a_2 et a_3 possèdent la même image dans l'espace quotient Y . Alors a_1 et a_4 seront identifiés dans Y . On pose $V = (D(p_1, r) \cup D(p_2, r)) \cap X$. L'ensemble V est alors un ouvert de X .

On remarque que $]a_1, a_2[\cup]a_3, a_4[= \pi^{-1}(\pi(]a_1, a_2[))$, car les images des points des arêtes de X ont exactement deux antécédents. Les autres points de $\pi(V)$ ont un seul antécédent.

On a donc

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = V$$

On en déduit donc que $\mathcal{A}_r(p) = \pi(V)$ est un ouvert de l'espace quotient Y .

Montrons que cet ouvert est homéomorphe à $D(0, r) \subset \mathbb{R}^2$.

Posons $U_1 = D(p_1, r) \cap X$, $U_2 = D(p_2, r) \cap X$. Alors $V = U_1 \cup U_2$.

On pose aussi $E_1 = D(0, r) \cap \{x \geq 0\}$, et $E_2 = D(0, r) \cap \{x \leq 0\}$. Alors clairement par rotation et translation, U_1 est homéomorphe à E_1 (par une application f_1) et U_2 est homéomorphe à E_2 (par f_2).

Les segments $]a_1, a_2[$ et $]a_3, a_4[$ obtenus en faisant l'intersection des boules ouvertes avec le bord de X sont envoyés sur le sous-ensemble $\{0\} \times]-r, r[$ de $D(0, r)$. On peut de plus demander la propriété suivante, en composant éventuellement f_2 avec une symétrie selon le sens du recollement : si $m \in]a_1, a_2[$ et $n \in]a_3, a_4[$ ont même image par π , alors $f_1(m) = f_2(n)$.

Soit ψ l'application définie pour tout $x \in V$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in U_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in U_2 \end{cases}$$

L'application ψ est clairement surjective sur $D(0, r)$, et elle est continue. En effet, si W un ouvert de $D(0, r)$, alors son image réciproque par ψ est un ouvert de V car les applications f_1 et f_2 sont des homéomorphismes, E_1 et E_2 sont des ouverts de $D(0, r)$ et

$$\psi^{-1}(U) = f_1^{-1}(U \cap E_1) \cup f_2^{-1}(U \cap E_2)$$

On remarque aussi que deux points distincts ont même image par ψ si et seulement si ils sont identifiés dans l'espace quotient Y .

L'application ψ induit une application $\tilde{\psi}$ définie pour tout $\tilde{x} \in \mathcal{A}_r(p)$ par :

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(x) \text{ où } x \text{ est un représentant de } \tilde{x}$$

Alors l'application $\tilde{\psi}$ est bijective de $\mathcal{A}_r(p)$ sur $D(0, r)$, et on a : $\psi = \tilde{\psi} \circ \pi$ sur V .

Montrons que cette application $\tilde{\psi}$ est continue de réciproque continue.

Soit U un ouvert de $D(0, r)$. Alors son image réciproque par ψ est un ouvert de V .

Par conséquent, $\pi^{-1}(\tilde{\psi}^{-1}(U)) = (\tilde{\psi} \circ \pi)^{-1}(U)$ est un ouvert de V , et donc $\tilde{\psi}^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathcal{A}_r(p)$.

L'application $\tilde{\psi}$ est donc continue.

Montrons à présent la continuité de la réciproque $\tilde{\psi}^{-1}$.

Nous allons montrer que la topologie induite par la topologie de \mathbb{R}^2 sur $D(0, r)$ coïncide avec la topologie quotient que l'on peut définir sur $D(0, r)$ grâce à l'application continue ψ .

Commençons par montrer que l'application ψ est une application fermée.

Soit F un fermé de V . Alors :

$$\psi(F) = f_1(F \cap U_1) \cup f_2(F \cap U_2)$$

Comme les applications f_1 et f_2 sont des homéomorphismes, on en déduit que $f_1(F \cap U_1)$ est un fermé de E_1 et $f_2(F \cap U_2)$ est un fermé de E_2 pour les topologies induites par celle de $D(0, r)$ sur E_1 et E_2 . Or, les ensembles E_1 et E_2 sont des fermés de $D(0, r)$ donc $f_1(F \cap U_1)$ et $f_2(F \cap U_2)$ sont des fermés de $D(0, r)$, et donc $\psi(F)$ est fermé de $D(0, r)$.

On en déduit donc que $F_0 \subset D(0, r)$ est fermé si et seulement si $\psi^{-1}(F_0)$ est fermé, et donc la topologie de $D(0, r)$ induite par celle de \mathbb{R}^2 et la topologie quotient définie par ψ coïncident.

Par conséquent, si U est un ouvert de $\mathcal{A}_r(p)$ alors $\pi^{-1}(U) = \psi^{-1}(\tilde{\psi}(U))$ est un ouvert de V , et donc comme $D(0, r)$ est muni de la topologie quotient déterminée par ψ , on en déduit que $\tilde{\psi}(U)$ est un ouvert de $D(0, r)$.

Donc $\tilde{\psi}^{-1}$ est continue.

On a ainsi montré que le voisinage ouvert $\mathcal{A}_r(p)$ de p est homéomorphe au disque ouvert $D(0, r)$ de \mathbb{R}^2 .

Troisième cas, p est l'image d'un sommet de X

Soit p_1 un antécédent de p par π . On considère un disque ouvert centré en p_1 et de rayon r suffisamment petit pour que sa fermeture intersecte les arêtes issues de p_2 en des points a_1 et a_2 tels que la distance $p_1 a_1$ soit strictement inférieure à la moitié de la longueur d'un côté du polygone régulier.

Alors le point a_2 sera identifié avec un point a_3 , qui se situe lui aussi à la distance r d'un sommet du polygone. Si ce point a_3 est confondu avec a_1 , le point p a un unique antécédent et les segments $]a_1, p_1[$ et $]p_1, a_2[$ seront identifiés. Sinon, le point a_3 est à la distance r d'un autre antécédent de p , que l'on note p_2 , et le disque fermé centré en p_2 de rayon r intersecte l'autre arête issue de p_2 en un point a_4 . On procède de même avec a_4 , il sera identifié avec un point a_5 situé sur une arête issue d'un antécédent de p , et ainsi de suite jusqu'à revenir à a_1 (voir figure 5).

On obtient ainsi l'ensemble $\{p_1, \dots, p_n\}$ des antécédents de p d'une part, et un ensemble de points $\{a_1, \dots, a_{2n}\}$ d'autre part, tels que pour tout $i \in \{2, \dots, 2n-1\}$, les points a_i et a_{i+1} seront identifiés, et a_{2n} sera identifié avec a_1 .

On pose

$$W = \bigcup_{i=1}^n D(p_i, r) \cap X \text{ et } \mathcal{V}_r(p) = \pi(W)$$

Alors $W \subset \pi^{-1}(\mathcal{V}_r(p))$.

Soit $x \in \mathcal{V}_r(p)$.

Si x est l'image d'un point de $\overset{\circ}{X}$, il n'a qu'un antécédent et donc $\pi^{-1}(x) \subset W$.

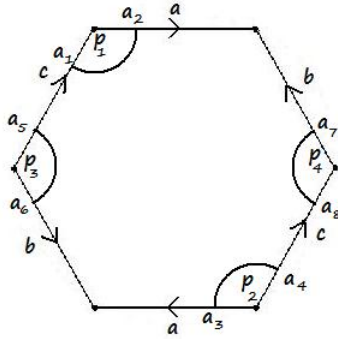


FIGURE 5 – Troisième cas

Si x est l'image d'un point d'une arête de X mais pas d'un sommet, il a deux antécédents x_1 et x_2 , et il existe $(i_1, i_2) \in \{1, \dots, n\}^2, (j_1, j_2) \in \{1, \dots, 2n\}^2$ tels que $x_k \in]a_{j_k}, p_{i_k}[$ pour $k = 1$ ou 2 . Par conséquent, $\pi^{-1}(x) \subset W$.

Si x est l'image d'un sommet, alors $x = p$ car les disques sont suffisamment petits pour ne pas contenir d'autres sommets de X . Dans ce cas, on a clairement $\pi^{-1}(x) \subset W$.

Donc $\pi^{-1}(\mathcal{V}_r(p)) = W$. et W est un ouvert de X donc $\mathcal{V}_r(p)$ est un ouvert de Y .

On peut montrer que cet ouvert $\mathcal{V}_r(p)$ est homéomorphe à $D(0, r)$ d'une façon analogue au cas précédent, en recollant ensemble les secteurs angulaires centrés en les pré-images de p et de rayon r pour obtenir un disque, en modifiant éventuellement l'angle et en respectant l'ordre d'identification : pour tout $i \in \{2, \dots, 2n - 1\}$, les points a_i et a_{i+1} seront identifiés, et a_{2n} sera identifié avec a_1 .

On a ainsi montré que tout point possède un voisinage homéomorphe à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 .

A l'aide des ouverts ainsi définis, montrons que Y est séparé.

Soit $(p, q) \in Y^2, p \neq q$.

On note $\{p_1, \dots, p_n\} = \pi^{-1}(p)$ et $\{q_1, \dots, q_m\} = \pi^{-1}(q)$.

Alors les ensembles $\{p_1, \dots, p_n\}$ et $\{q_1, \dots, q_m\}$ sont disjoints.

Il existe un ouvert de Y de la forme $D_r(p)$ ou $\mathcal{A}_r(p)$ ou $\mathcal{V}_r(p)$ contenant p , qu'on notera $\mathcal{U}_r(p)$, et un ouvert de Y de la forme $D_{r'}(q)$ ou $\mathcal{A}_{r'}(q)$ ou $\mathcal{V}_{r'}(q)$ contenant q , qu'on notera $\mathcal{U}_{r'}(q)$.

Si $\mathcal{U}_{r'}(q) \cap \mathcal{U}_r(p) \neq \emptyset$, on remplace

$$\begin{cases} r \text{ par } r_1 = \min \left(\{r\} \cup \left\{ \frac{|p_i - q_j|}{3}, i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{1, \dots, m\} \right\} \right) \\ r' \text{ par } r_2 = \min \left(\{r'\} \cup \left\{ \frac{|p_i - q_j|}{3}, i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{1, \dots, m\} \right\} \right) \end{cases}$$

Alors on vérifie que les nouveaux ouverts $\mathcal{U}_{r_1}(p)$ et $\mathcal{U}_{r_2}(q)$ sont disjoints.

Il existe donc des ouverts disjoints contenant respectivement p et q , donc l'espace Y est séparé.

L'espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés d'un polygone régulier est donc une surface compacte. \square

On a ainsi obtenu toute une famille de surfaces, et en particulier on a ainsi justifié que le plan projectif en est bien une. Comme les polygones réguliers sont homéomorphes au disque unité, nous représenterons souvent les polygones sous la forme d'un disque comme sur la figure 6.

En choisissant un sommet du polygone et un sens de rotation, on peut décrire la façon dont on identifie les côtés du polygone par un "mot". Plus précisément, si la flèche est dans le sens de

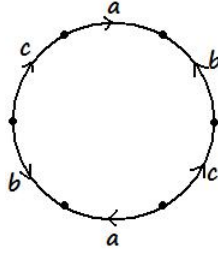


FIGURE 6 – Polygone représenté sous la forme d'un cercle

rotation, on indique la lettre avec l'exposant 1, qu'on n'écrit généralement pas, et si la flèche est dans le sens opposé, on met un exposant -1 . Par exemple, on peut associer à la surface de la figure 6 le mot $cab^{-1}c^{-1}ab^{-1}$ en commençant par le sommet le plus à gauche et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

Introduisons à présent une opération sur les surfaces : la somme connexe.

1.4 Somme connexe

La somme connexe est une opération qui consiste à "coller" deux surfaces ensemble selon un procédé précis. Si D est homéomorphe à un disque fermé D' de \mathbb{R}^2 , on notera ∂D le sous-ensemble de D homéomorphe au bord de D' .

Définition 5 Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux surfaces disjointes. On considère un sous-ensemble D_1 de \mathcal{S}_1 et un sous-ensemble D_2 de \mathcal{S}_2 , chacun d'entre eux homéomorphe au disque unité fermé.

On pose \mathcal{S}'_i le complémentaire de l'intérieur de D_i dans \mathcal{S}_i , pour $i = 1$ et $i = 2$. Il existe un homéomorphisme h de ∂D_1 sur ∂D_2 .

On appelle somme connexe de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , et on note $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$, l'espace quotient obtenu à partir de $\mathcal{S}'_1 \cup \mathcal{S}'_2$ en identifiant les points x et $h(x)$ pour tout $x \in \partial D_1$.

Proposition 2 La somme connexe de deux surfaces est une surface. Les propriétés topologiques de la somme connexe ne dépendent pas des choix des disques ni de l'homéomorphisme.

Preuve. On peut utiliser une démonstration analogue à celle de la proposition 1 pour montrer que l'espace quotient $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$ est une surface, mais nous n'allons pas le faire.

On admettra que les propriétés topologiques de la somme connexe ne dépendent pas des choix des disques ni de l'homéomorphisme. \square

Proposition 3 Soit \mathcal{S} une surface, et \mathcal{S}^2 la sphère unité. Alors $\mathcal{S} \# \mathcal{S}^2$ est homéomorphe à \mathcal{S} .

Preuve. Soit D_1 un sous-ensemble de \mathcal{S} homéomorphe à un disque fermé.

On pose $D_2 = \mathcal{S}^2 \cap \{z \leq 0\}$. Cet ensemble est homéomorphe à un disque fermé. Lorsqu'on effectue la somme connexe en identifiant le bord de D_1 avec le bord de D_2 , comme le complémentaire de D_2 dans \mathcal{S}^2 est homéomorphe au disque, cela revient au même de coller un disque à la place de D_1 , et donc la surface obtenue est homéomorphe à \mathcal{S} . \square

Remarque. On peut vérifier que l'opération de somme connexe est commutative, associative, et possède un élément neutre (la sphère). L'ensemble des classes de surfaces compactes pour la relation "est homéomorphe à" est donc un semi groupe. Il n'y a pas d'inverse.

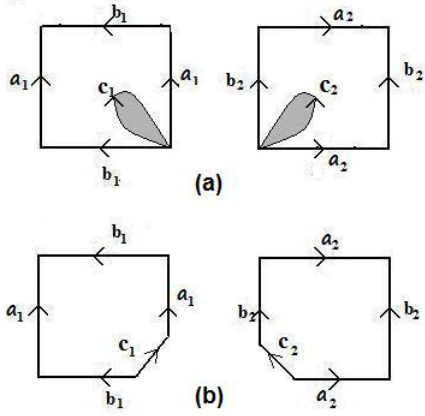


FIGURE 7 – Deux tores (a), deux tores avec un trou(b)

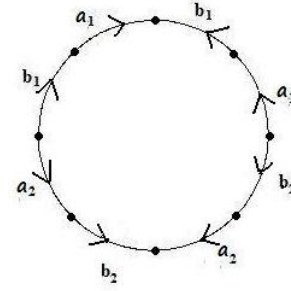


FIGURE 8 – Somme connexe de deux tores

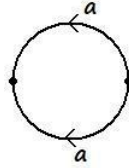


FIGURE 9 – Construction de la sphère

Intéressons-nous maintenant à la somme connexe de certaines surfaces particulières, à savoir le tore et le plan projectif.

Soient deux tores \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 . On considère leur écriture sous forme de carrés. Effectuons leur somme connexe. On commence par enlever un disque de chacun des tores (parties grisées de la figure 7(a)). On obtient alors deux polygones.

On recolle ensuite les deux polygones selon c_1 et c_2 , ce qui nous donne finalement la figure 8.

On peut donc associer à la somme connexe de deux tores le mot :

$$b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1}$$

On peut prouver par récurrence que le mot suivant décrit la somme connexe de n tores :

$$b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \dots b_n a_n b_n^{-1} a_n^{-1}$$

On remarquera que tous les sommets du polygone sont amenés à être identifiés.

Regardons à présent la somme connexe de plans projectifs. On considère leur écriture sous forme de cercle comme sur la figure 2. Par un processus semblable au précédent, on montre que la somme connexe de deux plans projectifs peut être désigné par le mot $a_1 a_1 a_2 a_2$.

Plus généralement, la somme connexes de n plans projectifs peut être décrite par le mot :

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$$

Tous les sommets du polygone obtenu seront identifiés dans l'espace quotient.

Quant à la sphère, en "l'ouvrant" selon un méridien, on obtient la figure 9.

On pourrait montrer que lorsqu'on considère deux surfaces définies comme espace quotient d'un polygone comme dans la proposition 1, et en considérant pour chacune un mot M_1, M_2 obtenu

à partir du polygone, leur somme connexe peut être décrite par le mot M_1M_2 , c'est-à-dire en les écrivant à la suite.

Nous avons ainsi mis en évidence trois types de surfaces : la sphère, la somme connexe de n tores ou de n plans projectifs. Maintenant que nous avons introduit plusieurs exemples de surfaces, il est temps de donner un premier critère permettant de les classer.

1.5 Orientabilité

Nous allons distinguer deux types de surfaces : celles qui sont orientables et celles qui ne le sont pas. Comme tout point d'une surface possède un voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 , choisir une orientation en un point de la surface revient à choisir une orientation du disque ouvert de \mathbb{R}^2 , par exemple un repère ou un sens de rotation. Une surface sera orientable si lorsqu'on choisit une orientation en un point, et que l'on se déplace le long d'un chemin quelconque en gardant le même choix d'orientation, on retrouve la même orientation à l'arrivée qu'au départ.

Par exemple, lorsqu'on se déplace sur Terre, si l'on choisit en un point que le sens positif de rotation est de l'est vers le nord, quel que soit le chemin emprunté, si l'on revient au point de départ, le sens positif de rotation n'aura pas changé.

Commençons par définir un chemin tracé sur la surface.

Définition 6 Soit \mathcal{S} une surface. Un chemin tracé sur la surface est une application continue f d'un intervalle fermé $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathcal{S} . Si de plus $f(a) = f(b)$, on dit que c'est un lacet.

L'orientabilité d'une surface se définit à partir de la propriété de ses lacets à changer l'orientation ou non.

Définition 7 Un lacet d'une surface \mathcal{S} préserve l'orientation si l'orientation au départ et à l'arrivée sont identiques. Sinon, on dit qu'il change l'orientation.

Définition 8 Une surface est dite orientable si tous ses lacets préservent l'orientation, sinon, elle est dite non orientable.

Exemple 4 Un exemple de surface non orientable est le ruban de Möbius. Il s'obtient en identifiant avec un demi-tour les côtés opposés d'un rectangle.

Plus précisément, on pose $X = [0, 5] \times]-1, 1[$. L'espace quotient Y obtenu en identifiant pour tout $y \in]-1, 1[$ les points $(0, y)$ et $(5, y)$ est un ruban de Möbius.

Preuve. On considère un intervalle ouvert selon les y pour que chaque point possède un voisinage homéomorphe au disque unité de \mathbb{R}^2 , sinon on obtiendrait une surface à bord, ce que nous définirons plus tard.

Dans l'espace quotient Y , les points A, B, C seront alors respectivement identifiés avec les points A', B', C' de la figure 10. On obtient alors une surface.

On pose π la surjection canonique de X sur Y .

Pour montrer la non orientabilité du ruban de Möbius, nous allons considérer l'image par π du sous-ensemble $\{(x, 0), x \in [0, 5]\}$ de X . Il correspond sur le ruban de Möbius à un cercle, les points B et B' étant identifiés. C'est un lacet du ruban de Möbius.

Considérons le point E de la figure 10. L'image par π de $]0, 5[\times]-1, 1[$ est un ouvert de l'espace quotient Y homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 . Définir une orientation en $\pi(E)$ revient à choisir un repère en E dans l'espace X . On choisit le repère \mathcal{R}_E dont le premier vecteur est selon le trait central, de E vers B' , et le second vecteur orthogonal au précédent et dirigé vers D . La partie grisée de la figure 10 correspond aux valeurs positives de la deuxième coordonnée dans le repère \mathcal{R}_E . On circule de E vers B' .

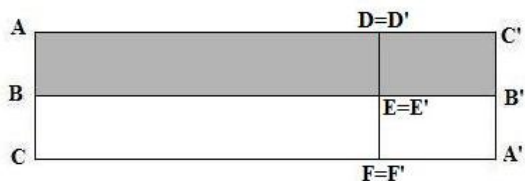


FIGURE 10 – Repère en $\pi(E)$

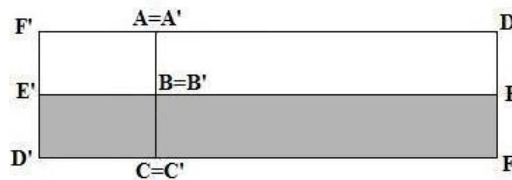


FIGURE 11 – Repère en $\pi(B)$

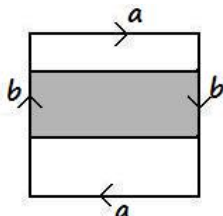


FIGURE 12 – Non orientabilité d'un plan projectif

Coupons à présent le rectangle selon (DF) , et recollons-le en respectant les identifications. On obtient alors la figure 11. Pour assurer la continuité de la variation du repère en B' , le repère $\mathcal{R}_{B'}$ en B' doit être choisi de sorte que le deuxième vecteur pointe vers C' . La partie grisée de la figure 11 correspond aux valeurs positives de la deuxième coordonnée dans le repère $\mathcal{R}_{B'}$.

Lorsqu'on continue de suivre le lacet pour revenir en E , l'orientation reste la même qu'en B' , et donc en E , le deuxième vecteur du repère est dirigé vers F , ce qui ne correspond pas à l'orientation de départ. Le ruban de Möbius est donc non orientable. \square

On remarquera que pour prouver la non orientabilité d'une surface, il suffit de mettre en évidence un lacet qui change l'orientation, si bien qu'on a la proposition suivante :

Proposition 4 *Si une surface contient un sous-ensemble homéomorphe à un ruban de Möbius, alors elle est non orientable.*

Par conséquent, le plan projectif introduit dans la partie précédente est non orientable. En effet, le sous-ensemble grisé de la figure 12 est homéomorphe à un ruban de Möbius.

Nous admettrons que la réciproque est vraie :

Proposition 5 *Une surface est non orientable si et seulement si elle contient un sous-ensemble homéomorphe à un ruban de Möbius.*

Et on en déduit la proposition suivante :

Proposition 6 *Deux surfaces homéomorphes ont même orientabilité.*

Un autre exemple de surface non orientable bien connu est la bouteille de Klein. On peut définir la bouteille de Klein comme étant l'espace quotient obtenu en identifiant les côtés d'un carré comme indiqué sur la figure 13.

La bouteille de Klein peut en fait être construite en réalisant la somme connexe de deux plans projectifs, ce que nous justifierons dans le paragraphe 2.2.4.

L'orientabilité d'une somme connexe dépend de l'orientabilité des surfaces considérées :

Proposition 7 *La somme connexe de deux surfaces est orientable si et seulement si les deux surfaces le sont.*

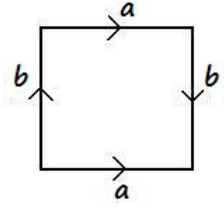


FIGURE 13 – Bouteille de Klein

Preuve. On ne justifiera qu'un sens de l'équivalence, l'autre sera admis.

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux surfaces. On suppose que \mathcal{S}_1 est non orientable. Alors, d'après la proposition 5, la surface \mathcal{S}_1 contient un sous-ensemble M homéomorphe à un ruban de Möbius. Pour réaliser la somme connexe, on choisira un sous-ensemble D_1 de \mathcal{S}_1 homéomorphe à un disque fermé et tel que son intersection avec M soit vide. Alors l'ensemble M est homéomorphe à un sous-ensemble M' de $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$, et donc M' est homéomorphe à un ruban de Möbius.

La surface $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$ est donc non orientable. □

On admettra aussi qu'une sphère et un tore sont des surfaces orientables.

Par conséquent, une somme connexe de plans projectifs n'est pas orientable alors qu'une somme connexe de tores est orientable. On est donc en mesure d'affirmer qu'une somme connexe de plans projectifs n'est pas homéomorphe à une somme connexe de tores ou une sphère.

Nous avons introduit plusieurs exemples de surfaces compactes, et donné un premier critère permettant de les classifier. Nous allons à présent nous intéresser au théorème de classification des surfaces compactes, afin de donner une liste de toutes les surfaces compactes à homéomorphisme près.

2 Classification des surfaces compactes

L'énoncé du théorème de classification des surfaces compactes est le suivant :

Théorème 1 *Soit \mathcal{S} une surface compacte. Alors \mathcal{S} est homéomorphe soit à une sphère, soit à une somme connexe de n tores, soit à une somme connexe de n plans projectifs, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Pour le prouver, nous allons introduire la notion de triangulation.

2.1 Triangulation des surfaces compactes

Définition 9 *Une triangulation d'une surface compacte \mathcal{S} est une famille finie d'ensembles fermés $\{T_1, \dots, T_n\}$ qui couvre la surface et une famille d'homéomorphismes $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ telles que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un triangle T'_i de \mathbb{R}^2 tel que φ_i est un homéomorphisme de T'_i sur T_i . On appelle triangles les T_i , côtés les images des côtés des triangles de \mathbb{R}^2 , et sommets les images des sommets des triangles de \mathbb{R}^2 . On demande de plus à ce que deux triangles distincts T_i et T_j soient disjoints, ou possèdent un côté en commun, ou un sommet en commun.*

On admettra le théorème suivant :

Théorème 2 *(T.Rado, 1925) Toute surface compacte \mathcal{S} admet une triangulation.*

Pour désigner une triangulation d'une surface compacte, on donnera la liste des triangles en précisant quels côtés sont amenés à être identifiés, et on omet en général de donner les homéomorphismes.

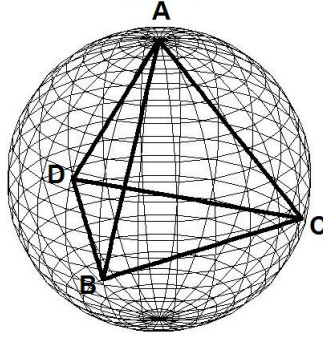


FIGURE 14 – Tétraèdre inscrit dans une sphère

Considérons par exemple une sphère et un tétraèdre régulier inscrit dans cette sphère, comme sur la figure 14. Les triangles sphériques obtenus grâce aux sommets du tétraèdre forment une triangulation de la sphère que l'on peut désigner par l'ensemble $\{ABC, ABD, ACD, BCD\}$. Les lettres majuscules correspondent aux sommets des triangles.

Proposition 8 Soit $\{T_1, \dots, T_n\}$ une triangulation d'une surface compacte \mathcal{S} . Alors tout côté est côté de deux triangles. De plus, si s est un sommet, on peut numéroter l'ensemble des triangles ayant s comme sommet dans un ordre cyclique $\{T_{i_1}, \dots, T_{i_k}\}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, k-1\}$ les triangles T_{i_j} et $T_{i_{j+1}}$ ont un côté en commun, de même que les triangles T_{i_k} et T_{i_1} .

Preuve. On donnera simplement une idée de la preuve.

Les deux propriétés viennent du fait que tout point de la surface doit posséder un voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 . En effet, si un côté c d'un triangle n'était pas côté d'un autre triangle, comme les triangles vérifient la définition 9, cela impliquerait que les points de c n'ont pas de voisinage homéomorphe à un disque ouvert. On admettra qu'il ne peut pas y avoir plus de deux triangles ayant c pour côté.

La deuxième propriété se justifie à l'aide de la première. On choisit un sommet s et un triangle T_1 ayant s comme sommet. Soient c_1 et c_2 les côtés issus de s . Alors il y a un autre triangle T_2 qui a c_2 comme côté, et donc s comme sommet. Soit c_3 l'autre côté de T_2 issu de s . On procède de même jusqu'à revenir à c_1 . Il reste à justifier que tous les triangles ayant s comme sommet sont bien dans cette liste, ce qui vient du fait que s possède un voisinage homéomorphe à un disque. \square

2.2 Démonstration du théorème de classification des surfaces compactes

Nous allons suivre la démarche proposée par W.S. Massey dans [1], qui prouve le théorème de classification des surfaces compactes en cinq étapes. Toutes les étapes ne seront pas forcément justifiées en toute rigueur.

Dans la suite, \mathcal{S} désigne une surface compacte, et \mathcal{T} une triangulation de \mathcal{S} qui contient n triangles.

2.2.1 Première étape : d'une triangulation à un polygone

On se propose ici de passer de la triangulation de la surface \mathcal{S} à un polygone dont le nombre de côtés est pair et dont les arêtes sont deux à deux identifiées.

Commençons par numéroter les triangles de la triangulation \mathcal{T} selon un ordre intéressant.

Proposition 9 On peut numéroter de 1 à n les triangles de la triangulation de sorte que pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, le triangle T_i possède un côté c_i en commun avec un des triangles T_1, \dots, T_{i-1} .

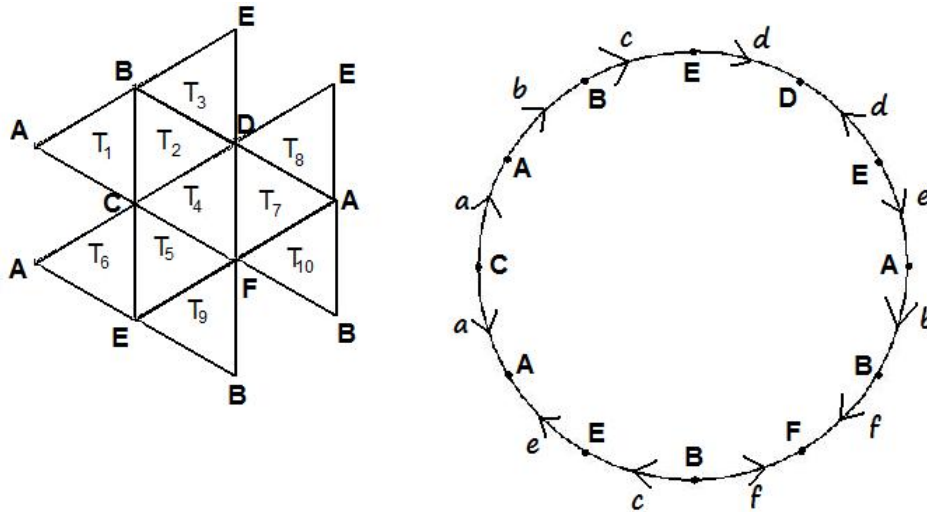


FIGURE 15 – D'une triangulation à un polygone

Preuve. On choisit un des triangles de la triangulation \mathcal{T} , on le nomme T_1 . Soit c_2 un côté de T_1 . Il existe un triangle $T_2 \neq T_1$ ayant c_2 comme côté. On choisit ensuite un triangle T_3 ayant un côté c_3 en commun avec T_1 ou T_2 . Finalement, par ce procédé, on obtient tous les triangles de la triangulation.

En effet, supposons qu'à un moment donné il reste un ensemble E de triangles non numérotés, mais qu'aucun n'a de côté en commun avec les triangles numérotés $\{T_1, \dots, T_k\}$. En utilisant la proposition 8, on peut montrer qu'aucun sommet des triangles numérotés n'est sommet d'un triangle de E , car pour un sommet s donné, on peut numéroté les triangles de sorte que chacun ait un côté commun avec le suivant. Or, ici, on a supposé que les triangles de E n'ont pas de côtés en commun avec $\{T_1, \dots, T_k\}$. On en déduit donc que les deux ensembles sont disjoints, et comme de plus ils sont fermés, cela contredit la connexité de la surface.

Donc on peut numéroté les triangles comme indiqué dans la proposition. \square

Tous les triangles de \mathbb{R}^2 étant homéomorphes, on peut supposer que chacun des triangles T_i de la triangulation est homéomorphe à un triangle équilatéral T'_i de \mathbb{R}^2 tels que tous les triangles T'_i ont leurs côtés de même longueur. Soient φ_i un homéomorphisme de T'_i sur T_i .

On colle les triangles T'_1 et T'_2 selon l'antécédent c'_2 de c_2 par φ_1 . On colle ensuite le triangle T'_3 à un des triangles précédents selon c'_3 , et ainsi de suite jusqu'à T'_n . Soit P le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 ainsi obtenu. On ne justifiera pas rigoureusement que l'ensemble P est bien homéomorphe à \mathcal{S} , ni que l'ensemble obtenu est bien homéomorphe à un disque. On se contentera de signaler que nécessairement, les côtés des triangles T'_1, \dots, T'_n dont les images par les φ_i correspondants ne sont pas dans $\{c_2, \dots, c_n\}$ sont identifiés avec un autre côté qui n'est pas lui non plus une pré-image d'un c_i .

En considérant le bord du polygone P , on obtient une succession de côtés qui seront deux à deux identifiés.

La figure 15 illustre le processus.

On part d'une triangulation $\{ABC, ACE, CEF, EFB, FBA, ADF, ADE, BDE, BCD, CDF\}$. On colle les triangles selon la règle énoncée plus haut.

En parcourant le tour du polygone, on obtient la représentation sous forme de cercle indiquée sur la figure 15.

On a ainsi fini la première étape.

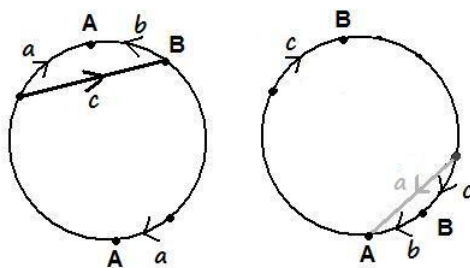


FIGURE 16 – Elimination d'un sommet de la classe de A

2.2.2 Deuxième étape : élimination des paires adjacentes de première espèce

On utilise l'écriture introduite précédemment pour décrire l'enchaînement des côtés autour du polygone. Par exemple, la figure 15 peut être décrite par le mot : $bcd^{-1}ebff^{-1}cea^{-1}a$.

Définition 10 On appelle *paire de première espèce* les paires de côtés pour lesquelles les exposants 1 et -1 apparaissent. Les autres sont dites de *deuxième espèce*.

On rappelle que la sphère peut être décrite par le mot aa^{-1} , et qu'elle constitue un élément neutre pour la somme connexe.

Soit a un côté du polygone P obtenu à l'issue de l'étape 1. Si a et a^{-1} apparaissent côte à côte, et si P a d'autres côtés, alors on peut supprimer ces deux côtés de la liste. En effet, cela revient à considérer la somme connexe d'une surface S' avec la sphère S^2 , ce qui est donc homéomorphe à S' .

On élimine par cette méthode un certain nombre de côtés et de sommets. Si à un moment, il ne reste qu'une paire de première espèce, on a montré que la surface S était homéomorphe à une sphère, s'il ne reste qu'une paire de deuxième espèce, la surface S est homéomorphe à un plan projectif.

Dans l'exemple précédent, l'étape 2 donne $bcebbe$.

Comme on l'a déjà fait remarquer dans le paragraphe 1.4 sur la somme connexe, quand on considère une somme connexe de tores ou de plans projectifs, tous les sommets du polygone sont identifiés. Cependant, à l'issue de l'étape 2 certains sommets peuvent ne pas être identifiés avec d'autres, comme c'est le cas de l'exemple où les sommets indiqués par la lettre A ne seront pas identifiés avec les sommets notés B , ni avec ceux portant la lettre C .

2.2.3 Troisième étape : identifier en un seul point tous les sommets du polygone

Comme on l'a signalé, certains sommets peuvent ne pas être identifiés. On désigne par classe d'un sommet A l'ensemble des sommets qui seront identifiés avec A .

Supposons qu'à l'issue de l'étape 2, il y ait plus d'une classe de sommets, et au moins quatre côtés.

Soit A une classe de sommet. On se propose de supprimer la classe de A par la méthode dite de "couper-coller" qui consiste à couper le polygone à certains endroits et à recoller les morceaux différemment.

Utilisons donc cette méthode pour obtenir un polygone dont tous les sommets seront identifiés en un seul.

Il y a forcément un endroit où deux sommets successifs A et B ne seront pas identifiés. Coupons le polygone selon le segment c indiqué sur la figure 16 reliant le sommet juste avant A à B , et recollons suivant a . On notera que nécessairement $a \neq b$ car autrement ou bien les sommets A et B seraient identifiés, ou bien on pourrait appliquer l'étape 2.

Après le recollement, il y a un sommet de moins dans la classe de A .

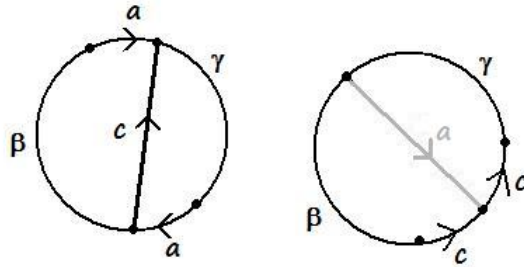


FIGURE 17 – Rendre adjacentes les paires de seconde espèce

Si on peut appliquer de nouveau l'étape 2, on l'applique, et s'il reste encore des éléments dans la classe de A , on leur applique de nouveau l'étape 3, jusqu'à ce que la classe de A soit vide, ce qui finira par arriver car il n'y a qu'un nombre fini de sommet dans la classe de A et on diminue leur nombre d'un à chaque fois qu'on applique l'étape 3. Ensuite, s'il y a encore plusieurs classes de sommets, on en choisit une autre et on l'élimine de la même manière, jusqu'à ce que finalement il n'y ait plus qu'une classe de sommet.

Si on applique l'étape 3 à l'exemple précédent, on trouve finalement l'écriture d'un plan projectif.

On obtient finalement un polygone dont tous les sommets vont être identifiés.

2.2.4 Quatrième étape : rendre adjacentes les paires de seconde espèce

On remarque que dans l'expression de la somme connexe de plans projectifs, les paires de seconde espèce sont toutes adjacentes. On se propose donc, par la méthode de couper-coller, de les mettre côte à côte.

Supposons qu'il y ait une paire a, a de seconde espèce telle que les deux côtés ne se suivent pas.

Alors on coupe le polygone selon le segment c indiqué sur la figure 17, et on recolle selon a . Les lettres β et γ représentent des mots.

Dans le polygone que l'on obtient, les deux côtés portant la lettre c se suivent. On remarquera que cela n'a pas changé l'ordre des côtés de β , ni de ceux de γ .

On peut donc procéder de même avec les éventuelles autres paires de seconde espèce sans séparer celles qui ont déjà été réunies.

Par cette méthode, on peut montrer que la bouteille de Klein est homéomorphe à une somme connexe de deux plans projectifs.

Une fois que toutes les paires de seconde espèce sont adjacentes, s'il n'y a pas de paire de première espèce, on obtient l'écriture d'une somme connexe de plans projectifs comme indiquée dans le paragraphe 1.4, et donc la surface \mathcal{S} est homéomorphe à une somme connexe de plans projectifs. S'il y a des paires de première espèce, il faut continuer.

2.2.5 Cinquième étape : les paires de première espèce

Supposons qu'à l'issue de la quatrième étape il reste une paire de la première espèce, indiquée par a , et au moins quatre côtés. Alors il y a une deuxième paire de la première espèce, indiquée par b telle que la succession de côtés s'écrit : $a\beta b\gamma a^{-1}\delta b^{-1}\lambda$. En effet, comme l'étape 4 est terminée, les paires de deuxième espèce sont adjacentes, donc si on suppose qu'il n'y a pas de paire de première espèce b telle que le mot $a\beta b\gamma a^{-1}\delta b^{-1}\lambda$ décrivent la surface, cela signifie que la surface peut être

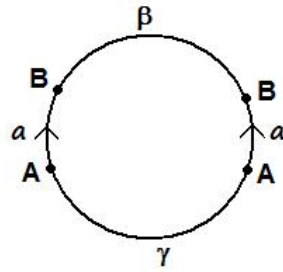


FIGURE 18 – Une paire de première espèce

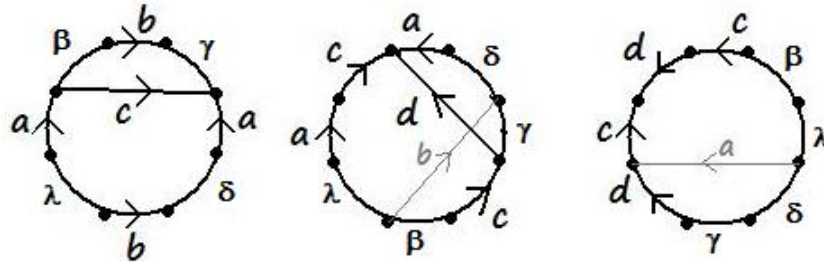


FIGURE 19 – Etape 5

obtenue par le mot $a\beta a^{-1}\gamma$ où aucun côté de β ne sera identifié avec un côté de γ . La surface peut alors être représentée par la figure 18. Les sommets A et B appartiennent alors à des classes différentes, ce qui contredit le fait qu'on a terminé l'étape 2.

Il y a donc bien une deuxième paire b de première espèce, telle que le polygone soit décrit par le mot $a\beta b\gamma a^{-1}\delta b^{-1}\lambda$.

On veut les rendre consécutifs de façon à retrouver l'écriture d'un tore : $aba^{-1}b^{-1}$.

On procède encore par couper-coller. L'idée est de choisir une extrémité d'un côté portant la lettre a , de la relier avec l'autre côté portant la lettre a pour rendre successifs les côtés de première espèce.

On coupe selon c et on recolle selon b , et on procède ensuite de même en reliant les extrémités de c , on coupe selon d et on recolle selon a (voir figure 19).

On obtient donc un polygone de côtés : $dcd^{-1}c^{-1}\beta\lambda\delta\gamma$, ce qui est bien la forme que l'on voulait.

On procède de même s'il reste des paires de première espèce qui ne se suivent pas selon le schéma du tore.

Si à la fin, il n'y a que des paires de première espèce on obtient l'écriture d'une somme connexe de tores.

Il reste le cas où il y a des paires de première et de deuxième espèces.

Nous avons la propriété suivante :

Proposition 10 *La somme connexe d'un tore et d'un plan projectif est homéomorphe à la somme connexe de trois plans projectifs.*

Preuve. Pour cette preuve, on suivra celle proposée par Y.Félix et D.Tanré dans [2].

Considérons un tore et un plan projectif. Si on effectue leur somme connexe, on obtient la figure 20. On coupe selon d et on recolle selon c . Les paires désignées par a et par b sont alors de la seconde espèce, et on procède comme dans l'étape 4 pour les rendre adjacentes. Sans tout détailler, on obtient successivement les représentations indiqués sur la figure 21.

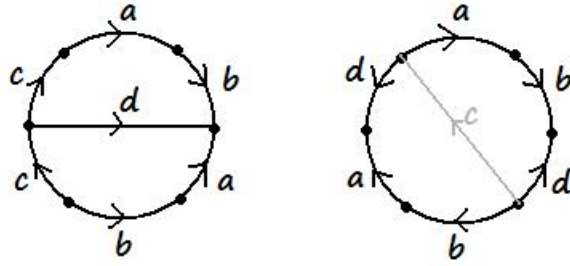


FIGURE 20 – Somme connexe d'un plan projectif et d'un tore

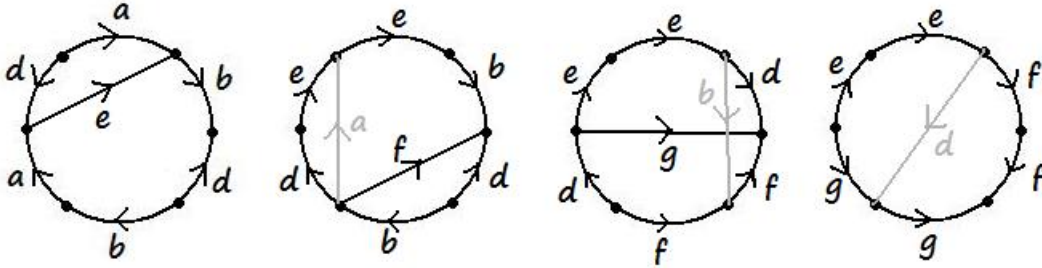


FIGURE 21 – Utilisation de l'étape 4

La dernière figure représente bien la somme connexe de trois plans projectifs. ☒

Par conséquent, en utilisant cette propriété autant de fois que l'on a des quadruplets de la forme $aba^{-1}b^{-1}$ suivi d'un couple cc , on obtient une somme connexe de plans projectifs.

On a donc démontré que toute surface compacte est homéomorphe soit à une sphère, soit à une somme connexe de plans projectifs, soit à une somme connexe de tores.

Néanmoins, on n'a pas prouvé que nous ne pouvions pas réduire davantage le nombre de classes de surfaces.

2.3 Caractéristique d'Euler d'une surface compacte

Pour montrer que les sommes connexes de tores, les sommes connexes de plans projectifs et la sphère ne sont pas homéomorphes, nous allons introduire un nombre, la caractéristique d'Euler, qui est invariant par homéomorphisme.

Définition 11 Soit \mathcal{S} une surface compacte munie d'une triangulation \mathcal{T} . On note S le nombre de sommets, A le nombre de côtés, et F le nombre de triangles de \mathcal{T} . La caractéristique d'Euler de la surface \mathcal{S} est le nombre noté $\chi(\mathcal{S})$ défini par $\chi(\mathcal{S}) = S - A + F$.

A priori, ce nombre semble dépendre directement de la triangulation choisie. Nous allons montrer que pourtant, il ne dépend que de la surface.

Commençons par donner des exemples.

Exemple 5 Reprenons la triangulation de la sphère donnée par la figure 14. Il y a 4 sommets, à savoir A, B, C et D , 6 côtés, AB, AD, AC, BC, BD, CD et 4 triangles ABC, ABD, ACD, BCD . La caractéristique d'Euler de la sphère \mathcal{S}^2 est donc : $\chi(\mathcal{S}^2) = 4 - 6 + 4 = 2$.

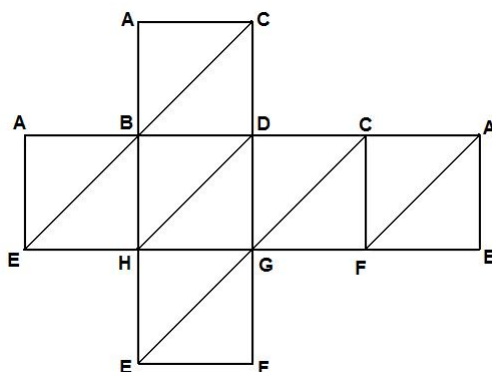


FIGURE 22 – Triangulation de la sphère

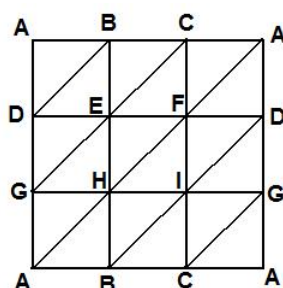


FIGURE 23 – Triangulation du tore

Regardons à présent une autre triangulation de la sphère, par exemple obtenue à partir d'un cube dont on a divisé les faces en deux triangles. On peut représenter cette triangulation dans le plan par la figure 22.

Il y a alors 8 sommets, 18 arêtes, et 12 triangles, la caractéristique d'Euler de la sphère munie de cette triangulation vaut donc encore 2.

Exemple 6 On considère à présent le tore. Une triangulation du tore est représentée sur la figure 23.

Il y a 9 sommets, 27 arêtes et 18 triangles. La caractéristique d'Euler du tore pour cette triangulation est donc 0.

Exemple 7 Donnons enfin la caractéristique d'Euler du plan projectif obtenu à partir de la triangulation de la figure 15. Il y a 6 sommets, 15 arêtes et 10 triangles. La caractéristique d'Euler du plan projectif pour cette triangulation est donc 1.

Proposition 11 *La caractéristique d'Euler d'une surface triangulée S ne dépend que de S et pas de la triangulation choisie.*

Preuve. Pour la démonstration, nous n'allons pas nous restreindre à des triangles, mais considérer des polygones quelconques. Plus précisément, on reprend la définition 9 en demandant que chaque élément soit homéomorphe à un polygone de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire que l'intérieur d'un polygone doit être homéomorphe à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 , les côtés privés des sommets à des segments ouverts de \mathbb{R} , et on demande à ce que les sommets, côtés et polygones soient en nombre fini.

On pourra éventuellement considérer des polygones à 1 côté ou à deux côtés, et un côté ne doit pas forcément séparer deux polygones (voir figure 24).

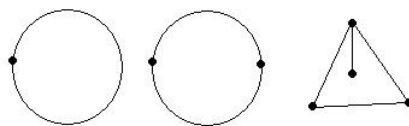


FIGURE 24 – Polygone à 1 côté, à 2 côtés et côté ne séparant pas deux polygones

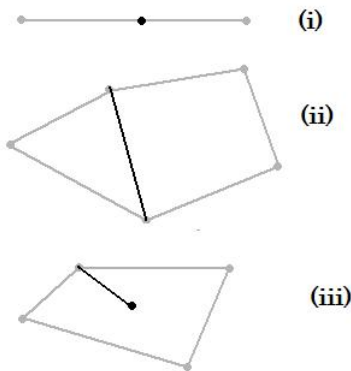


FIGURE 25 – Opérations autorisées

On pose S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de polygones. On définit toujours la caractéristique d'Euler par $\chi(\mathcal{S}) = S - A + F$.

Montrons que la caractéristique d'Euler est invariante par certaines opérations simples sur les côtés, sommets et faces, à savoir celles illustrées par la figure 25.

Proposition 12 (i) *Si on ajoute un sommet à l'intérieur d'un côté, le nombre de sommets est augmenté de 1 et le nombre d'arêtes aussi, donc la caractéristique d'Euler est inchangée. Réciproquement, s'il n'y a que deux côtés issus d'un sommet, on peut supprimer ce sommet.*

(ii) *Si on divise un polygone en deux en ajoutant un côté reliant deux sommets, le nombre de côtés augmente de 1 et le nombre de faces aussi donc la caractéristique d'Euler ne change pas. Réciproquement, si un côté divise un polygone en deux, on peut le supprimer.*

(iii) *Si on ajoute un côté dans un polygone sans le diviser, le nombre de côtés est augmenté de 1 et le nombre de sommets aussi donc la caractéristique d'Euler ne change pas. Réciproquement, on peut enlever un tel côté.*

Supposons à présent que la surface \mathcal{S} est munie de deux triangulations \mathcal{T} et \mathcal{T}' .

On veut montrer en ajoutant ou en enlevant des sommets ou des côtés comme ceux de la proposition 12 que la caractéristique d'Euler est la même pour les deux triangulations. On note χ la caractéristique d'Euler de \mathcal{S} pour la triangulation \mathcal{T} , et χ' pour la triangulation \mathcal{T}' .

Premier cas : Tout côté de \mathcal{T}' intersecte en un nombre fini de points et d'intervalles les côtés de \mathcal{T} , et au moins un côté de \mathcal{T}' intersecte un côté de \mathcal{T}

On part de la triangulation \mathcal{T} . On va ajouter les points et côtés manquants pour obtenir une superposition des deux triangulations.

Première étape. On ajoute à \mathcal{T} les points d'intersection des côtés de \mathcal{T}' avec les côtés de \mathcal{T} , lorsque l'intersection se fait selon un point. Cela revient à ajouter un nombre fini de points du

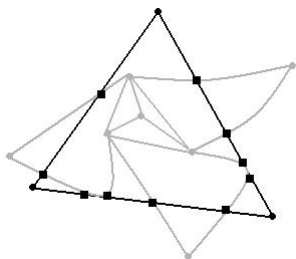


FIGURE 26 – Première étape

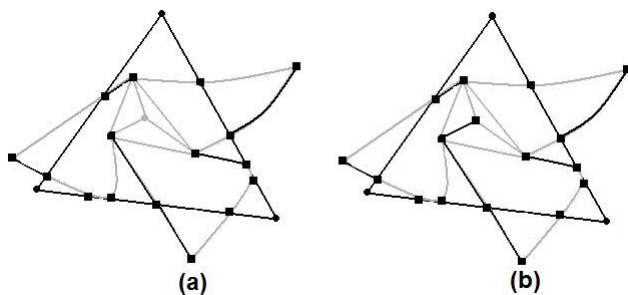


FIGURE 27 – Deuxième étape

type (i) de la proposition 12, et donc la caractéristique d'Euler est inchangée. (Si l'intersection se fait en un sommet de \mathcal{T} , on n'ajoute aucun point.)

Lorsque l'intersection d'un côté de \mathcal{T}' avec \mathcal{T} se fait le long d'un intervalle, on ajoute les extrémités de cet intervalle à la triangulation \mathcal{T} , ce qui correspond à nouveau à des points du type (i), et donc on ne modifie pas la caractéristique d'Euler. (voir figure 26, les carrés indiquent les points ajoutés)

Deuxième étape. Si à l'issue de la première étape on n'a pas obtenu tous les sommets de la triangulation \mathcal{T}' , on les ajoute en construisant des côtés du type (iii). Les sommets manquants à l'issue de l'étape 1 sont ceux situés à l'intérieur des triangles de \mathcal{T} .

Pour les ajouter, on commence par construire tous les sommets tels qu'un des côtés issus de ce sommet coupe un côté de \mathcal{T} , comme sur la figure 27 (a). S'il manque encore des sommets, on ajoute des côtés issus des points que l'on vient de construire pour obtenir de nouveaux sommets, et ainsi de suite, voir figure 27 (b). Comme le nombre de sommets de la triangulation \mathcal{T}' est fini, on s'arrête forcément et on obtient tous les sommets de \mathcal{T}' .

On a donc construit tous les sommets de \mathcal{T}' sans modifier la caractéristique d'Euler.

Troisième étape. On ajoute à présent les côtés manquants. Pour les construire, on considère des côtés de la forme (ii). On construit donc les côtés en plusieurs étapes : on part d'un sommet de \mathcal{T}' , on le relie en suivant un côté de \mathcal{T}' au point construit le plus proche, et ainsi de suite jusqu'à arriver à l'autre extrémité de ce côté. On a donc ajouté un nombre fini de côtés de la forme (ii), par conséquent la caractéristique d'Euler est inchangée.

On arrive donc à une superposition des deux triangulations, dont les sommets sont les sommets des deux triangulations et les points d'intersection construits à l'étape 1, les côtés sont obtenus à partir des deux triangulations en ajoutant éventuellement des points à l'intérieur de certains côtés, et les polygones sont en fait obtenus en faisant l'intersection d'un triangle de \mathcal{T} avec un triangle de \mathcal{T}' qui le recouvre en partie ou entièrement.

Quatrième étape. On procède de même en partant de \mathcal{T}' pour arriver à la même superposition des deux ensembles. En effet, les points d'intersection construits à la première étape sont les mêmes. Par conséquent, la caractéristique d'Euler correspondant à la superposition des deux triangulations est égale aussi à χ' .

On a donc $\chi = \chi'$.

Il reste à étudier le cas où les côtés de la triangulation \mathcal{T}' intersecte une infinité de fois ceux de \mathcal{T} , et le cas où au contraire il n'y a aucun point d'intersection.

Deuxième cas : il y a une infinité de points d'intersection entre les côtés de \mathcal{T}' et ceux de \mathcal{T}

On admettra ce cas.

Rappelons simplement que déformer un côté par un homéomorphisme ne change pas la caractéristique d'Euler. S'il y a une infinité de points d'intersection entre deux côtés, comme c'est le cas par

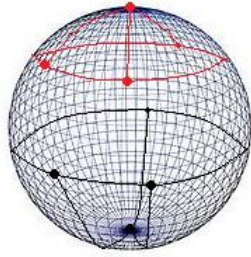


FIGURE 28 – Troisième cas

exemple de l'axe des abscisses entre -1 et 1 avec la courbe $\{(x, \sin(\frac{1}{x})), x \in [-1, 1] \setminus \{0\}\} \cup \{(0, 0)\}$ de \mathbb{R}^2 , on déforme les côtés par des homéomorphismes jusqu'à ce que le nombre de points d'intersection soit fini.

Troisième cas : Aucun côté de \mathcal{T}' n'intersecte un côté de \mathcal{T}

Cela signifie que tous les sommets de \mathcal{T}' se trouvent dans un même triangle ABC de la triangulation \mathcal{T} , comme sur la figure 28, où on a représenté par des couleurs différentes deux triangulations de la sphère. En effet, dans le cas contraire, comme on peut relier les sommets entre eux par des côtés de \mathcal{T}' , il y aurait au moins un point d'intersection, et donc on se retrouverait dans le premier ou deuxième cas.

On ajoute à \mathcal{T} un point D se trouvant dans l'arête BC . On ne modifie donc pas la caractéristique d'Euler d'après la proposition 12. On construit ensuite un côté reliant A à D tel que ce côté soit entièrement inclus dans le triangle ABC et intersecte les côtés de la triangulation \mathcal{T}' . La caractéristique d'Euler est inchangée par l'ajout de D et AD , et on peut se ramener à un des deux cas précédents pour construire les sommets de \mathcal{T}' , puis les côtés. Ensuite, au lieu de construire les sommets et côtés de \mathcal{T} à partir de \mathcal{T}' , on construit \mathcal{T} , le point D et le côté AD à partir de \mathcal{T}' .

Cela prouve donc que dans ce troisième cas, $\chi = \chi'$.

Dans tous les cas, la caractéristique d'Euler ne dépend pas de la triangulation choisie. ☒

Proposition 13 *Deux surfaces compactes homéomorphes ont même caractéristique d'Euler.*

Preuve. Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 des surfaces compactes homéomorphes par f .

On munit \mathcal{S}_1 d'une triangulation \mathcal{T} . Par l'homéomorphisme f , cette triangulation est envoyée sur une triangulation de \mathcal{S}_2 , et donc les deux surfaces ont même caractéristique d'Euler. ☒

On obtient donc un moyen de distinguer les classes de surfaces compactes, car alors, deux surfaces compactes ne seront pas homéomorphes si elles n'ont pas la même caractéristique d'Euler.

Commençons par calculer la caractéristique d'Euler d'une somme connexe de deux surfaces.

Proposition 14 *Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux surfaces compactes. La caractéristique d'Euler de la somme connexe $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$ est alors :*

$$\chi(\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2) = \chi(\mathcal{S}_1) + \chi(\mathcal{S}_2) - 2$$

Preuve. Considérons une triangulation \mathcal{T}_1 de \mathcal{S}_1 et une triangulation \mathcal{T}_2 de \mathcal{S}_2 . Comme l'intérieur de chaque triangle est homéomorphe à un disque ouvert, on choisit pour réaliser la somme connexe d'enlever à \mathcal{S}_1 l'intérieur d'un triangle $A_1A_2A_3$, et à \mathcal{S}_2 l'intérieur d'un triangle $B_1B_2B_3$. Pour les recoller, on identifie pour $i \in \{1, 2, 3\}$ le sommet A_i avec le sommet B_i , et donc le côté A_iA_j avec le côté B_iB_j .

Il reste à compter le nombre de sommets, côtés et triangles obtenus. Pour les sommets, on obtient les sommets de \mathcal{S}_1 plus les sommets de \mathcal{S}_2 moins 3 du fait des identifications, de même pour les arêtes, et pour les triangles, on obtient la somme du nombre de triangles de \mathcal{S}_1 et de \mathcal{S}_2 moins les deux triangles qu'on a enlevés. On a donc :

$$\chi(\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2) = \chi(\mathcal{S}_1) + \chi(\mathcal{S}_2) - 3 + 3 - 2 = \chi(\mathcal{S}_1) + \chi(\mathcal{S}_2) - 2$$

Ce qui est bien la formule attendue. □

Par conséquent, on peut calculer la caractéristique d'Euler de chacune des surfaces données par le théorème de classification des surfaces compactes à partir de celles du tore, de la sphère et du plan projectif :

Surface compacte \mathcal{S}	$\chi(\mathcal{S})$
Sphère	2
Tore	0
Somme connexe de n tores	$2 - 2n$
Plan projectif	1
Somme connexe de n plans projectifs	$2 - n$

Comme de plus des surfaces homéomorphes ont même orientabilité, on a donc bien que les classes d'équivalence du théorème de classification des surfaces compactes sont deux à deux différentes.

Ainsi, on a le théorème suivant :

Théorème 3 *Deux surfaces compactes sont homéomorphes si et seulement si elles ont même caractéristique d'Euler et même orientabilité.*

Au lieu de considérer la caractéristique d'Euler on considère parfois un autre nombre, le genre g , que l'on obtient par la formule suivante :

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(\mathcal{S})) & \text{si } \mathcal{S} \text{ est orientable} \\ 2 - \chi(\mathcal{S}) & \text{si } \mathcal{S} \text{ est non orientable} \end{cases}$$

Le genre g d'une surface compacte est nul si elle est homéomorphe à une sphère, et correspond sinon au nombre de tores (cas orientable) ou de plans projectifs (cas non orientable) de la somme connexe à laquelle est homéomorphe la surface.

On a donc une classification complète des surfaces compactes et un moyen de déterminer à quelle classe elles appartiennent grâce à leur orientabilité et leur genre.

Nous allons à présent élargir la notion de surfaces en considérant les surfaces dites "à bord".

3 Surfaces à bord

3.1 Définition, exemples

Commençons par définir une surface à bord.

Définition 12 *Une surface à bord est un espace topologique séparé dans lequel tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe soit au disque unité ouvert $D(0,1)$ de \mathbb{R}^2 , soit au demi-disque unité $D(0,1) \cap \{x \geq 0\}$.*

Définition 13 *L'ensemble des points d'une surface à bord \mathcal{S} qui possèdent un voisinage homéomorphe au disque unité ouvert de \mathbb{R}^2 est appelé l'intérieur de \mathcal{S} , et l'ensemble des points p de \mathcal{S} tels qu'il existe un voisinage ouvert V de p et un homéomorphisme h de V sur le demi-disque unité vérifiant $h(p) = 0$ est appelé le bord de \mathcal{S} .*

On notera qu'une surface sans bord comme elle a été définie dans les parties précédente vérifie la définition d'une surface à bord. Dans la suite, on ne désignera par surfaces à bord que celles dont le bord est non vide. On remarquera que l'intérieur défini ci-dessus ne correspond pas à l'intérieur topologique de la surface à bord.

Donnons quelques exemples de surfaces à bord.

Exemple 8 Considérons le carré $X = [0, 1] \times [0, 1]$ de \mathbb{R}^2 . Tout point de l'intérieur topologique du carré vu comme sous-ensemble de \mathbb{R}^2 possède clairement un voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 , et les points p des arêtes du carré possède un voisinage homéomorphe au demi-disque unité, il suffit en effet de considérer l'intersection d'un disque ouvert centré en p et de rayon suffisamment petit pour que le bord de la fermeture de la boule intersecte les arêtes issues de p .

Un carré est donc une surface à bord. Comme le disque fermé est homéomorphe au carré, ainsi que tous les polygones réguliers, on en déduit que ce sont aussi des surfaces à bord.

Exemple 9 Le demi-espace $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ est une surface à bord, non compacte.

Exemple 10 Le ruban de Möbius défini comme étant l'espace quotient obtenu à partir de l'ensemble $X = [0, 5] \times [-1, 1]$ en identifiant les points $(0, y)$ et $(5, y)$ pour tout $y \in [-1, 1]$ est une surface à bord.

Proposition 15 Soit \mathcal{S} une surface à bord. L'ensemble des points de l'intérieur et l'ensemble des points du bord sont disjoints.

Preuve. Soit p un point de l'intérieur de la surface à bord \mathcal{S} . Par définition, il existe un voisinage ouvert V de p et un homéomorphisme h de V sur le disque unité ouvert. On peut de plus demander à avoir $h(p) = 0$. Par conséquent, les voisinages ouverts de p inclus dans V contiennent des sous-ensembles homéomorphes à un disque ouvert centré en 0, et donc ne sont pas homéomorphes au demi-disque $D(0, 1) \cap \{x \geq 0\}$. Le point p n'est donc pas dans le bord de \mathcal{S} . \square

Proposition 16 L'intérieur d'une surface à bord \mathcal{S} est une variété de dimension 2 sans bord, et le bord de \mathcal{S} est une variété de dimension 1 sans bord.

Preuve. Comme \mathcal{S} est séparé, le bord $\partial\mathcal{S}$ et l'intérieur $\text{Int}(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \setminus \partial\mathcal{S}$ le sont aussi.

De plus, $\text{Int}(\mathcal{S})$ est un ouvert de \mathcal{S} . En effet, par définition, tout point p de $\text{Int}(\mathcal{S})$ possède un voisinage ouvert V homéomorphe à un disque ouvert, donc, en particulier, tout point de V possède un voisinage homéomorphe à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 , donc $V \subset \text{Int}(\mathcal{S})$. Par conséquent, V est un voisinage ouvert de p pour la topologie relative sur $\text{Int}(\mathcal{S})$ homéomorphe à un disque ouvert, donc $\text{Int}(\mathcal{S})$ est une variété de dimension 2 sans bord.

Soit q un point du bord $\partial\mathcal{S}$ de \mathcal{S} . Il existe donc un voisinage ouvert W de q et un homéomorphisme h de W sur le demi-disque unité $E = D((0, 0), 1) \cap \{x \geq 0\}$ et tel que h vérifie $h(q) = (0, 0)$.

Soit $y \in]-1, 1[$, alors $(0, y) \in E$. Soit $r > 0$ tel que $D((0, y), r) \cap \{x \geq 0\} \subset E$.

Alors clairement $D_y = D((0, y), r) \cap \{x \geq 0\}$ est un ouvert de E homéomorphe à E , le point $(0, y)$ étant envoyé sur $(0, 0)$. Donc $h^{-1}(D_y)$ est un voisinage ouvert de $h^{-1}((0, y))$ homéomorphe au demi-disque unité, et donc $h^{-1}((0, y))$ est dans le bord de \mathcal{S} . De plus, comme le bord et l'intérieur sont disjoints, on en déduit que $h^{-1}(E \cap \{x = 0\}) = W \cap \partial\mathcal{S}$, et comme $E \cap \{x = 0\}$ est homéomorphe à $] -1, 1[$, l'ensemble $V \cap \partial\mathcal{S}$ est un ouvert de $\partial\mathcal{S}$ homéomorphe à $] -1, 1[$, et donc le bord est une variété de dimension 1. \square

En particulier, on peut remarquer que le sous-ensemble $\text{Int}(\mathcal{S})$ est un ouvert de \mathcal{S} et le bord $\partial\mathcal{S}$ est un fermé de \mathcal{S} . On peut aussi élargir la notion d'orientabilité aux surfaces à bord, l'orientabilité d'une surface à bord étant en fait celle de l'intérieur vu comme une surface sans bord.

Regardons plus en détail le bord d'une surface à bord. On a la propriété suivante :

Proposition 17 *Le bord d'une surface compacte à bord possède un nombre fini de composantes connexes.*

Preuve. Soit \mathcal{S} une surface compacte à bord. On note $\partial\mathcal{S}$ le bord de \mathcal{S} et $\text{Int}(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \setminus \partial\mathcal{S}$.

Tout point $p \in \text{Int}(\mathcal{S})$ possède un voisinage ouvert $V_p \subset \text{Int}(\mathcal{S})$ homéomorphe au disque ouvert $D(0, 1)$ de \mathbb{R}^2 , et tout $q \in \partial\mathcal{S}$ possède un voisinage ouvert V_q homéomorphe à $D(0, 1) \cap \{x \geq 0\}$ tel que l'image de q soit 0.

Alors $\mathcal{S} = \bigcup_{p \in \text{Int}(\mathcal{S})} U_p \cup \bigcup_{q \in \partial\mathcal{S}} V_q$. Comme \mathcal{S} est compacte, on peut en extraire un recouvrement fini :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^n U_{p_i} \cup \bigcup_{j=1}^k V_{q_j}$$

Alors clairement, $\partial\mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^k V_{q_j}$.

De plus, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, il existe un homéomorphisme h_j de V_{q_j} sur $D(0, 1) \cap \{x \geq 0\}$ qui envoie $\partial\mathcal{S} \cap V_{q_j}$ sur l'ensemble connexe par arcs $D(0, 1) \cap \{x = 0\}$. Donc les éléments de $\partial\mathcal{S}$ qui sont dans V_{q_j} sont dans une même composante connexe de bord. Le bord contient donc au plus k composantes connexes. \square

Déterminons la forme d'une composante connexe du bord.

Théorème 4 *Toute variété connexe et compacte de dimension 1 est homéomorphe au cercle \mathcal{S}^1 .*

Preuve. Soit \mathcal{V} une variété connexe et compacte de dimension 1.

Comme tout point de \mathcal{V} possède un voisinage ouvert homéomorphe à un intervalle ouvert, et \mathcal{V} est compact, on en déduit que \mathcal{V} peut s'écrire comme l'union finie d'ouverts homéomorphes à des intervalles ouverts. On note \mathcal{U}_1 cette liste d'ouverts.

On diminue le cardinal de \mathcal{U}_1 pour obtenir une liste "minimale" dans le sens où si on supprime un des ouverts de la liste, les ouverts restants ne recouvrent plus \mathcal{V} . On note \mathcal{U}_2 cette nouvelle liste.

Soit $U_1 \in \mathcal{U}_2$. Comme \mathcal{V} est connexe, il existe $U_2 \in \mathcal{U}_2$ tel que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Montrons que leur réunion ou leur réunion privée d'un point est homéomorphe à un intervalle ouvert.

Soit h_1 un homéomorphisme de U_1 sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. On pose $W = U_1 \cap U_2$.

Premier cas : $h_1(W) =]0, a[\cup]a, 1[$ ou $h_1(W) =]b, 1[\cup]0, b[$

Par symétrie, on peut supposer $h_1(W) =]0, a[\cup]a, 1[$.

Comme U_2 est homéomorphe à un intervalle ouvert, on peut construire un homéomorphisme h_2 de U_2 sur un intervalle ouvert de la forme $] -c, a[$, $c > 0$ tel que pour tout $x \in W$, on a $h_2(x) = h_1(x)$.

On pose alors une application h pour tout $x \in U_1 \cup U_2$ par $h(x) = h_1(x)$ si $x \in U_1$ et $h(x) = h_2(x)$ si $x \in U_2$. Comme h est définie sur l'union de deux ouverts, et ses restrictions à chacun de ces ouverts est un homéomorphisme, on en déduit que h est un homéomorphisme, et donc $U_1 \cup U_2$ est homéomorphe à un intervalle ouvert.

Deuxième cas : $h_1(W) =]0, a[\cup]b, 1[$, $0 < a < b < 1$

Soit $x \in U_2 \setminus W$. Alors comme U_2 est homéomorphe à un intervalle ouvert, on en déduit que $U_2 \setminus x$ est homéomorphe à deux intervalles ouverts. Soient C_1 et C_2 les deux composantes connexes de $U_2 \setminus x$. Chacune d'entre elle est homéomorphe à un intervalle ouvert. De plus, $h_1(C_i \cap U_1) =]0, a[$ ou $]b, 1[$, pour $i = 1$ et 2 , donc en utilisant le cas précédent, on en déduit que $U_1 \cup C_1 \cup C_2$ est homéomorphe à un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Troisième cas : $h_1(W)$ n'est pas d'une des formes précédentes

Montrons que ce cas ne peut pas se réaliser.

On note h_2 un homéomorphisme de U_2 sur $]0, 1[$. Soit C une composante connexe de l'intersection $U_1 \cap U_2$. Alors C est homéomorphe à un intervalle par h_1 et h_2 . De plus, comme $U_1 \cap U_2$ est ouvert et C est une composante connexe, on en déduit que C est homéomorphe à un intervalle ouvert.

Supposons que $h_1(C) =]a_1, b_1[$ avec $0 < a_1 < b_1 < 1$.

On a alors $h_2(C) =]a_2, b_2[$ avec $0 \leq a_2 < b_2 \leq 1$. Comme de plus par hypothèse on a $C \neq U_1$ et $C \neq U_2$, on a nécessairement $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 1$. Supposons par symétrie que $a_2 \neq 0$.

Alors les éléments $a'_1 = h_1^{-1}(a_1)$, $b'_1 = h_1^{-1}(b_1)$ et $a'_2 = h_2^{-1}(a_2)$ sont deux à deux différents. Comme l'espace \mathcal{V} est séparé, il existe des ouverts deux à deux disjoints V_1, V_2, V_3 de \mathcal{V} contenant respectivement a'_1, b'_1, a'_2 . On peut de plus supposer $V_1 \subset U_1, V_2 \subset U_1$ et $V_3 \subset U_2$. Notons V'_1, V'_2 et V'_3 les composantes connexes de ces ouverts qui contiennent respectivement a'_1, b'_1, a'_2 .

On remarquera que tout voisinage de a'_1, b'_1 et a'_2 contient des éléments de C .

On a donc $h_1(V'_1 \cap C) =]a_1, \gamma_1[$, $h_1(V'_2 \cap C) =]\gamma_2, b_1[$ avec $a_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < b_1$ et $h_2(V'_3 \cap C) =]a_2, \gamma_3[$ avec $a_2 < \gamma_3 < b_2$.

Alors il existe $\gamma_1 \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \gamma_2$ tels que $h_1 \circ h_2^{-1}(]a_2, \gamma_3]) =]\beta_1, \beta_2[$.

Comme $(\beta_1, \beta_2) \in]a_1, b_1[^2$, l'intervalle fermé $[\beta_1, \beta_2] \subset]a_1, b_1[$. De plus, en notant h'_1 et h'_2 les restrictions de h_1 et h_2 à C , qui est ouvert, on obtient un homéomorphisme $h'_1 \circ h_2'^{-1}$ de $]a_2, b_2[$ sur $]a_1, b_1[$. Par conséquent, on devrait avoir $[a_2, \gamma_3] = (h'_1 \circ h_2'^{-1})^{-1}([\beta_1, \beta_2])$, ce qui est impossible car $a_2 \notin h_2(C)$. Ce troisième cas ne peut donc pas se réaliser.

Montrons à présent que l'on peut écrire \mathcal{V} comme union de deux ouverts.

Soit $U_1 \in \mathcal{U}_2$.

S'il existe $U_2 \in \mathcal{U}_2$ tel que $U_1 \cup U_2$ soit homéomorphe à un intervalle ouvert, on remplace U_1 et U_2 par leur réunion, et on obtient une nouvelle liste d'ouvert \mathcal{U}_3 dont le cardinal a diminué de 1 par rapport à la liste précédente. S'il y a un ouvert U_3 tel que $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ est homéomorphe à un intervalle ouvert, on remplace $U_1 \cup U_2$ et U_3 par leur réunion, et ainsi de suite. On s'arrête nécessairement comme on part d'un nombre fini d'ouverts. On obtient ainsi une nouvelle liste d'ouverts \mathcal{U} recouvrant \mathcal{V} , et un ouvert U dont l'union avec tout autre ouvert de la liste n'est pas homéomorphe à un intervalle ouvert. Comme \mathcal{V} est compact, il y a au moins deux ouverts dans la liste \mathcal{U} . Soit donc $U' \in \mathcal{U}$ distinct de U_1 .

Alors $h_1(U \cap U') =]0, a[\cup]b, 1[$, $0 < a < b < 1$. Comme \mathcal{V} est une variété connexe de dimension 1, on en déduit que $\mathcal{V} = U \cup U'$. De plus, comme on l'a signalé dans le deuxième cas, on peut construire un homéomorphisme de $U \cup U'$ privé d'un point x sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Comme $U \cup U'$ est un compact connexe donc on en déduit que $\mathcal{V} = U \cup U'$ est homéomorphe à un cercle. \square

On en déduit donc qu'une composante connexe du bord est homéomorphe à un cercle.

3.2 Triangulation des surfaces compactes à bord

De même que pour les surfaces sans bord, la classification des surfaces à bord peut se démontrer à partir de la notion de triangulation.

La définition de la triangulation des surfaces compactes à bord est la même que celle des surfaces compactes sans bord (voir définition 9).

Pendant, il y a une différence fondamentale entre les deux. En effet, dans le cas d'une surface sans bord, tout côté était côté de deux triangles, alors que dans le cas des surfaces compactes à bord, certains côtés peuvent n'appartenir qu'à un triangle. On peut considérer par exemple la triangulation du ruban de Möbius de la figure 29. Le côté AB n'est côté que du triangle ABE .

De plus, de tels côtés sont clairement dans le bord, puisque les points de ces côtés n'ont pas de voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert.

De même que pour les surfaces sans bord, on admettra le théorème suivant :

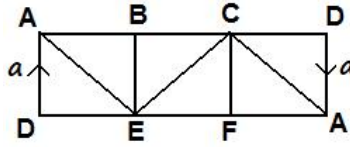


FIGURE 29 – Triangulation d'un ruban de Möbius

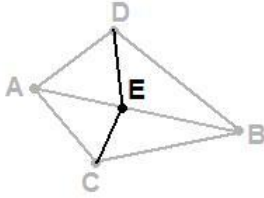


FIGURE 30 – Premier point

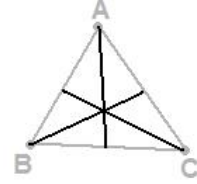


FIGURE 31 – Deuxième point

Théorème 5 *Toute surface compacte à bord admet une triangulation.*

Montrons qu'en divisant éventuellement des triangles on peut obtenir des propriétés supplémentaires pour une triangulation.

Proposition 18 *Soit S une surface à bord. Il existe une triangulation \mathcal{T} de S vérifiant :*

- *tout côté ayant ses deux sommets dans le bord est dans le bord*
- *tout triangle a au plus un côté dans le bord*
- *des triangles qui ont un côté dans le bord sont disjoints ou leur intersection est réduite à un point du bord.*

Preuve. Soit \mathcal{T}_1 une triangulation de S .

Commençons par construire une triangulation vérifiant le premier point.

Supposons que $T = ABC$ est un triangle de \mathcal{T}_1 dont le côté AB a ses deux sommets dans le bord sans être dans le bord. Il est donc côté d'un autre triangle $T' = ABD$. Soit un point E du côté AB distinct des sommets. On relie les points C et E d'une part, et les points D et E d'autre part, comme sur la figure 30. On obtient une nouvelle triangulation dans laquelle le côté AB a été supprimé, et les nouveaux côtés ont au plus un sommet dans le bord. On procède de même pour tous les côtés qui ont leurs deux sommets dans le bord sans y être entièrement inclus. On obtient ainsi une nouvelle triangulation \mathcal{T}_2 qui vérifie le premier point de la proposition.

Modifions à présent la triangulation obtenue pour qu'elle vérifie le second point.

Supposons que $T = ABC$ est un triangle de \mathcal{T}_2 qui possède plus d'un côté dans le bord. On le divise en six triangles en ajoutant des côtés issus de chacun des sommets et coupant le côté opposé, et tels que ces trois côtés s'intersectent en un unique point (voir figure 31).

Alors chacun des triangles obtenus a au plus un côté dans le bord, et les côtés ajoutés vérifient bien le premier point.

On procède de même pour tous les triangles ayant plus d'un côté dans le bord. On obtient ainsi une triangulation \mathcal{T}_3 de S qui vérifie les deux premiers points.

Modifions la triangulation \mathcal{T}_3 de sorte qu'elle vérifie le troisième point.

Supposons que T_1 et T_2 soient deux triangles de \mathcal{T}_3 qui ont chacun un côté dans le bord et qui ne sont pas disjoints.

Alors soit ils ont soit un côté en commun, soit un sommet.

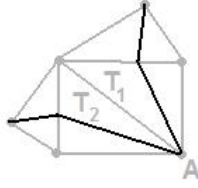


FIGURE 32 – Troisième point : premier cas

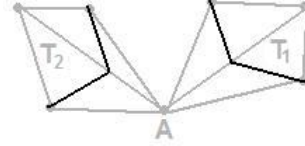


FIGURE 33 – Troisième point : deuxième cas

Premier cas : T_1 et T_2 ont un côté commun

Les première et deuxième étapes ayant été réalisées, les côtés dans le bord sont consécutifs et chaque triangle n'a qu'un côté dans le bord. Soit A le sommet commun aux deux triangles qui se trouve dans le bord. Pour chacun des deux triangles, on ajoute un côté issu de A et intersectant le côté opposé, comme sur la figure 32.

Alors la nouvelle triangulation obtenue vérifie bien les deux premiers points, et de plus on a supprimé les triangles T_1 et T_2 , et les nouveaux triangles qui ont pour bord les côtés issus de A vérifient bien le troisième point.

On procède de même pour tous les couples de triangles dans ce cas.

Deuxième cas : T_1 et T_2 n'ont qu'un sommet en commun

Si ce sommet est dans le bord, les deux triangles vérifient le troisième point.

Sinon on choisit pour chaque triangle un sommet se trouvant dans le bord, et on ajoute un côté le reliant au côté opposé, comme indiqué sur la figure 33.

On procède de même pour tous les triangles dans ce cas.

On obtient finalement une nouvelle triangulation \mathcal{T}_4 vérifiant les propriétés de la proposition. \square

Cette triangulation va permettre de démontrer le théorème de classification des surfaces à bord.

3.3 Classification des surfaces compactes à bord

Commençons par relier les surfaces à bord et les surfaces sans bord.

Proposition 19 Soient \mathcal{S}^* une surface compacte sans bord, et D_1, \dots, D_k k sous-ensembles de \mathcal{S} deux à deux disjoints et homéomorphes à des disques fermés de \mathbb{R}^2 . Alors l'ensemble \mathcal{S} privé de l'intérieur des ensembles D_1, \dots, D_k est une surface compacte à bord dont le bord a k composantes connexes, qui sont en fait les bords des disques enlevés.

Réciproquement, soient \mathcal{S} une surface compacte à bord dont le bord possède k composantes connexes B_1, \dots, B_k , et k disques fermés D_1, \dots, D_k .

Il existe k homéomorphismes h_1, \dots, h_k tels que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, h_i est un homéomorphisme de B_i sur ∂D_i . Alors l'espace quotient obtenu en collant les disques sur \mathcal{S} en identifiant les points du bord selon les h_i est une surface compacte sans bord.

On admettra que si on enlève k disques d'une surface \mathcal{S}^* , quelle que soit leur position, les ensembles obtenus sont tous homéomorphes. On dira aussi que l'on considère une surface à k trous.

Le théorème de classification des surfaces à bord est très proche de celui des surfaces sans bord :

Théorème 6 Soit \mathcal{S} une surface à bord dont le bord a k composantes connexes. Alors \mathcal{S} est homéomorphe à une sphère à k trous ou à une somme connexe de tores à k trous ou à une somme connexe de plans projectifs à k trous.

Preuve. Commençons par regarder la forme des surfaces compactes à bord obtenues à partir de surfaces sans bord. On les représente sous la forme d'un polygone dont les côtés sont deux à deux

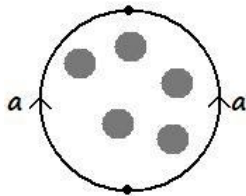


FIGURE 34 – Surface à bord obtenue à partir d’une sphère

identifiés. On commence par enlever l’intérieur de k disques fermés deux à deux disjoints de l’intérieur du polygone. L’espace quotient est donc une surface à bord dont le bord a k composantes connexes. Par exemple, la figure 34 est une sphère avec 5 trous.

Montrons que toute surface compacte à bord est homéomorphe à un polygone dont les côtés sont deux à deux identifiés et dont on a enlevé de l’intérieur des disques ouverts tels que les disques fermés correspondant soient deux à deux disjoints.

On munit la surface à bord \mathcal{S} d’une triangulation \mathcal{T} vérifiant les propriétés de la proposition 18.

On note B_1, \dots, B_k les composantes connexes du bord de \mathcal{S} .

Soit T_1 un triangle intersectant B_1 . Soit il a un côté dans B_1 , soit juste un sommet. Dans les deux cas, il a deux côtés qui ont un sommet dans B_1 sans être dans B_1 .

Soient a_1 et a_2 ces côtés. Comme a_2 n’est pas dans le bord, il est côté d’un autre triangle T_2 de la triangulation. Ce triangle T_2 a au moins un sommet dans B_1 donc il a deux côtés qui ont un sommet dans le bord sans être dans le bord, à savoir a_2 et un autre côté a_3 . On construit ainsi une suite de triangles et de côtés $T_1 a_2 T_2 a_3 \dots T_n a_n$, et comme la triangulation contient un nombre fini de triangles, il y a un nombre fini de triangles qui intersectent B_1 . De plus, sans entrer dans les détails, on revient forcément à a_1 et on obtient tous les triangles intersectant B_1 . Comme dans la première étape de la démonstration du théorème 1 de classification des surfaces compactes sans bord, l’ensemble des triangles $\{T_1, \dots, T_n\}$ est homéomorphe à un ensemble de triangles de \mathbb{R}^2 que l’on recolle selon les images des côtés a_j . Cet ensemble est un polygone P_1 de \mathbb{R}^2 avec un trou, comme sur la figure 35, où on obtient un polygone à 14 côtés.

De plus, les côtés extérieurs du polygone ne rencontrent pas le bord de la surface d’après les propriétés de la triangulation. On procède de même pour toute les composantes connexes du bord de \mathcal{S} , et on obtient pour chaque composante connexe B_i un polygone P_i avec un trou. Ainsi, tous les côtés de \mathcal{T} qui ne sont pas côtés de deux triangles se trouvent à l’intérieur des P_i . Par conséquent, en utilisant ces polygones et les triangles qui n’intersectent pas le bord, et en procédant comme dans la première étape du théorème 1, on peut montrer que la surface à bord \mathcal{S} est homéomorphe à un polygone qui possède un nombre pair de côtés et qui sont deux à deux identifiés, et qui a k trous dans son intérieur.

On procède ensuite comme dans la preuve du théorème de classification des surfaces compactes sans bord, en évitant les trous chaque fois que l’on coupe.

On obtiendra finalement le résultat attendu. □

De même que pour les surfaces à bord, on introduit la caractéristique d’Euler pour prouver que les différentes classes de surfaces compactes à bord données dans le théorème sont distinctes.

3.4 Caractéristique d’Euler d’une surface à bord

La définition de la caractéristique d’Euler d’une surface à bord triangulée est la même que pour les surfaces sans bord (voir définition 11).

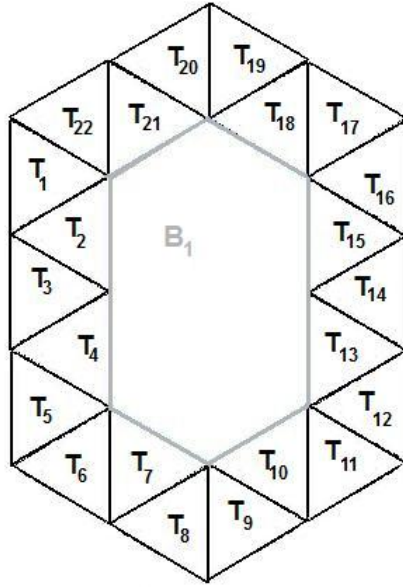


FIGURE 35 – Triangles intersectant la composante B_1

On admettra qu'elle est aussi indépendante de la triangulation choisie.

On a de plus la propriété suivante :

Proposition 20 *Si \mathcal{S} est une surface compacte avec ou sans bord triangulée, si on enlève l'intérieur d'un triangle inclus entièrement dans l'intérieur de \mathcal{S} , la nouvelle surface \mathcal{S}' vérifie :*

$$\chi(\mathcal{S}') = \chi(\mathcal{S}) - 1$$

Preuve. Comme le triangle enlevé est entièrement dans l'intérieur de \mathcal{S} , l'ensemble \mathcal{S}' est bien une surface, et son bord a une composante connexe de plus que \mathcal{S} .

De plus, le nombre de sommets et de côtés ne change pas, et il y a un triangle de moins, d'où la formule. \square

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 21 *Si \mathcal{S}^* est une surface compacte sans bord triangulée, si on enlève l'intérieur de k triangles disjoints, on obtient une surface compacte à bord \mathcal{S} dont le bord a k composantes connexes et les caractéristiques d'Euler vérifie la formule :*

$$\chi(\mathcal{S}) = \chi(\mathcal{S}^*) - k$$

D'où finalement le théorème :

Théorème 7 *Deux surfaces compactes à bord sont homéomorphes si et seulement si leurs bords possèdent le même nombre de composantes connexes, elles ont même orientabilité, et même caractéristique d'Euler.*

De même que pour les surfaces sans bord on peut définir le genre :

Définition 14 *Le genre d'une surface compacte à bord \mathcal{S} est défini comme étant le genre de la surface sans bord obtenue en collant sur chaque composante connexe du bord de \mathcal{S} un disque.*

Ainsi le théorème précédent s'énonce-t-il sous la forme suivante, qui est valable aussi bien pour les surfaces avec ou sans bord :

Théorème 8 *Deux surfaces compactes sont homéomorphes si et seulement si leurs bords possèdent le même nombre de composantes connexes, elles ont même orientabilité et même genre.*

Conclusion

On a ainsi classifié toutes les surfaces connexes et compactes, avec ou sans bord, en utilisant la méthode dite de "couper-coller" et la caractéristique d'Euler. Il s'agit d'une approche combinatoire du problème, où on a beaucoup exploité le théorème de Rado. Une autre méthode pour distinguer les différentes classes d'équivalence consiste à introduire le groupe fondamental, ou groupe de Poincaré, qui est en fait l'ensemble des classes d'homotopie de lacets tracés sur la surface et basés en un point donné.

Références

- [1] MASSEY W.S., *Algebraic Topology, An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol 56, Springer, 1967
- [2] FÉLIX Y. & TANRÉ D., *Topologie Algébrique*, Sciences Sup, Dunod, 2010