UNE QUESTION D'APPUIS

FRÉDÉRIC MANGOLTE ET CHRISTOPHE RAFFALLI

Introduction.

La motivation originale de ce travail est une étape dans la preuve du résultat suivant tiré de l'article [2].

Théorème 1. *Let X be a real Del Pezzo surface of degree 1 homeomorphic to the disjoint union of 4 spheres and a projective plane, then every smooth map $f : X \to S^2$ can be approximated by regular maps.*

Voir l'article cité pour les définitions et motivations de ce théorème.

1. Rappels.

Définition 2 (Convexe)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension n. Un sous-ensemble $A \subset E$ est convexe dans E si et seulement si*

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in A\ .$$

Définition 3 (Enveloppe convexe)**.** *Soit $A \subset E$ un sous-ensemble quelconque, l'enveloppe convexe de A dans E est le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe de E qui contient A.*

Définition 4 (Point extrémal)**.** *Soit A un ensemble. On dira qu'un point $x \in A$ est un point extrémal de A si l'enveloppe convexe de A privée de x est toujours convexe.*

Théorème 5 (Krein-Milman)**.** *Tout compact convexe non vide d'un espace euclidien admet un point extrémal.*

Démonstration. Voir par exemple [1]. □

Corollaire 6. *Tout compact non vide d'un espace euclidien admet un point extrémal.*

Démonstration. Soit A un compact non vide d'un espace euclidien. Soit A_c l'enveloppe convexe de A. Par Krein-Milman, il existe $x \in A_c$ extremal. On a $x \in A$. En effet, $A_c \setminus \{x\}$ est convexe et si $x \notin A$, c'est un convexe contenant A et strictement inclus dans A_c ce qui est impossible. □

2. Hyperplan de n-appui.

Définition 7 (Hyperplan d'appui)**.** *Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E d'équation $l(x) = a$ où l est une forme linéaire et $a \in \mathbb{R}$. On note H^+ le demi-espace $\{x \in E; l(x) \geq a\}$ et H^- le demi-espace $\{x \in E; l(x) \leq a\}$. Soit A un sous-ensemble de E et $x \in A$. On dira que H est un hyperplan d'appui à A en x, si et seulement si*

(1) $x \in A \cap H$

(2) $A \subset H^+$ *ou* $A \subset H^-$

Nous remercions P. Verovic pour une discussion fondatrice et V. Grandjean pour sa relecture attentive.

On dira aussi que H s'appuie sur A en x.

Si A est un sous ensemble de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $x \in A$, on dira que H s'appuie sur A en x ssi il existe une carte affine E de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ telle que $x \in E$ et telle que H s'appuie sur A en x dans E.

Définition 8 (Hyperplan de r-appui)**.** *Soient $A_1, \dots, A_r$, des sous-ensembles de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. On dira que H est un hyperplan de r-appui à $A_1, \dots, A_r$ s'il existe des points $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_r \in A_r$ tels que H soit un hyperplan d'appui à A_i en x_i pour tout $1 \leq i \leq r$.*

Théorème 9. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$, des sous-ensembles fermés et connexes de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe un point $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tel qu'aucun hyperplan passant par p ne rencontre tous les A_i, alors il existe un hyperplan de n-appui à $A_1, \dots, A_n$.*

Démonstration. On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^* = (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))^*$ le projectif dual.

Remarque : l'hypothèse sur l'existence du point p implique que les ensembles A_i sont deux à deux disjoints.

À chaque hyperplan $H \subset \mathbb{P}$ d'équation $\sum \lambda_k x_k = 0$, on associe le point $H^* = (\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n)$ du projectif dual $\mathbb{P}^*$. À chaque point p de $\mathbb{P}$, on associe l'hyperplan dual de $\mathbb{P}^*$, noté $p^* = \{H^*, p \in H\}$.

Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}$ qui rencontrent tous les A_i. Par le nombre de sous-ensembles A_i, l'ensemble $\mathcal{H}$ est non vide.

Soit $H \in \mathcal{H}$, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $H \cap A_i \neq \emptyset$. Notons $\mathcal{H}^*$ l'image de $\mathcal{H}$ dans le projectif dual $\mathbb{P}^*$. Par hypothèse, $\mathcal{H}^*$ est contenu dans le complémentaire de l'hyperplan p^* de $\mathbb{P}^*$. En effet, p^* correspond à l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}$ passant par p.

Notons U_p l'ouvert affine complémentaire de p^* dans $\mathbb{P}^*$.

Lemme 10. *$\mathcal{H}^*$ est compact dans U_p.*

D'après le Corollaire 6 de Krein-Milman et le Lemme 10, $\mathcal{H}^*$ admet donc un point extrémal H^*. Montrons que H est un hyperplan de n-appui aux $A_1, \dots, A_n$.

En contraposant, considérons un hyperplan H de $\mathcal{H}$ qui ne s'appuie pas sur A_1. Comme $H \in \mathcal{H}$, pour tout i, $2 \leq i \leq n$, il existe $y_i \in A_i \cap H$. Soit P_1 un hyperplan qui passe par p et $y_2, \dots, y_n$. Par hypothèse P_1 ne rencontre pas A_1. Donc A_1 est connexe dans $\mathbb{P} \setminus P_1$. Comme H n'est pas d'appui à A_1, il n'est pas d'appui dans la carte affine $E = \mathbb{P} \setminus P_1$. Plaçons nous dans l'espace affine E. L'hyperplan H y définit deux demi-espaces et il existe $x_1 \in A_1 \cap H^+ \setminus H$ et $x_2 \in A_1 \cap H^- \setminus H$.

Soit S le segment fermé $[x_1, x_2]$ de E (qui passe donc par H). Montrons que tout hyperplan de E rencontrant S rencontre A_1 (1) : soit P un hyperplan de E passant par S. Si $P \cap S = x_1$ ou x_2 c'est immédiat. Sinon supposons que $P \cap S \in]x_1, x_2[$ et $A_1 \cap P = \emptyset$. Soit $O^+ = P^+ \setminus P$ et $O^- = P^- \setminus P$. O^+ et O^- sont deux ouverts de E et $A_1 \subset O^+ \cup O^-$. Le sous-espace A_1 étant connexe dans E, on a $A_1 \subset O^+$ ou $A_1 \subset O^-$, ce qui est impossible car $x_1 \in O^+$ et $x_2 \in O^-$ (ou l'inverse).

Pour tout y appartenant à S, soit H_y l'hyperplan déterminé par $y, y_2, \dots, y_n$ (H_y est bien défini car les points $y_2, \dots, y_n$ sont deux à deux distincts et n'appartiennent pas à E tandis que $y \in S \subset E$). L'hyperplan H_y appartient à $\mathcal{H}$ puisqu'il rencontre A_1 par la propriété (1) et car $y \in H_y \cap E \neq \emptyset$.

Les points $y_2, \dots, y_n$ définissent une droite D de $\mathbb{P}^*$ et on a $H_y^* \in D$. Donc l'ensemble des H_y^* pour $y \in [x_1, x_2]$ est un segment S^* fermé de U_p (car $p \notin H_y$) dont les deux extrémités sont dans $\mathcal{H}^*$. Soit $y_0 = S \cap H$, $H^* = H_{y_0}^*$ est un point à l'intérieur de S^*, il appartient donc à l'enveloppe convexe de $\mathcal{H}^*$ et il ne peut être extrémal, car on perd la convexité si on le retire. □

Preuve du lemme 10. Notons $\mathcal{H}_i$ l'ensemble des hyperplans qui rencontrent A_i. On a $\mathcal{H}^* = \cap_{1\leq i\leq n}\mathcal{H}_i^*$. A_i étant fermé $\mathcal{H}_i^*$ est fermé, c'est la classe d'équivalence d'une sous-ensemble fermé B_i de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}$ ne rencontrant pas A_i, c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ ne rencontrant pas B_i. Comme B_i est compact il y a un voisinage de H qui ne rencontre pas B_i donc A_i.

De plus, $\mathcal{H}^*$ est borné dans U_p car $\mathcal{H}^* \cap p^* = \emptyset$ et $\mathcal{H}^*$ est un fermé de $\mathbb{P}^*$ donc finalement $\mathcal{H}^*$ est un compact de U_p. □

Références

[1] N. Bourbaki *Espaces vectoriels topologiques, chap. II.4.th. 1*, Hermann, Paris 1953

[2] N. Joglar, F. Mangolte, Real algebraic morphisms and Del Pezzo surfaces of degree 2 *Journal of Algebraic Geometry* **13** (2004) 269–285

Laboratoire de Mathématiques, Université de Savoie, 73376 Le Bourget du Lac Cedex, France, Fax : (33) 4 79 75 81 42

E-mail address: mangolte@univ-savoie.fr

E-mail address: raffalli@univ-savoie.fr