

## TD Processus Stochastiques 1 : Temps d'arrêt

**Exercice 1** Aujourd'hui lundi, vous avez un dollar dans votre tirelire. À partir de

demain matin et ce, tous les matins jusqu'à vendredi inclusivement, vous tirez à pile ou face pour savoir si vous retirez un dollar (si possible) de la tirelire (pile) ou si vous y en mettez un (face). Modélisez l'évolution du contenu de votre tirelire en répondant aux questions suivantes :

1. Quel est l'ensemble fondamental ?
2. Définissez le processus stochastique que vous utilisez et donnez en la signification. N'oubliez pas de définir ce que vous signifiez par une période de temps.
3. Quelle tribu utilisez-vous pour construire votre espace probabilisable ?
4. Quelles sont les tribus de la filtration engendrée par le processus pour les journées de lundi, mardi, mercredi et vendredi ?
5. Interprétez, en fonction de l'information disponible, la structure d'information que vous avez construite à la question précédente pour la journée du mercredi.
6. Quelle est la distribution du contenu de la tirelire vendredi midi ?
7. Démontrez que le premier instant où la tirelire est vide est un temps d'arrêt.

**Exercice 2** On lance deux dés et on observe le nombre  $X$  de points sur le premier

et le nombre  $Y$  de points sur le deuxième. Nous recevrons un paiement d'un montant de  $\max(X, Y)$  au temps  $\tau = \min(X, Y)$ . Le processus  $\{S_t : t \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$  modélise l'évolution des paiements qui nous seront versés.

1. Quel est l'ensemble fondamental ?
2. Déterminez la filtration  $\{\mathcal{F}_t : t \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$  engendrée par le processus stochastique  $S_t : t \in \{1, 2, \dots, 6\}$ .
3. Est-ce que  $t$  est un  $\{\mathcal{F}_t : t \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$ -temps d'arrêt ? Justifiez votre réponse.

**Exercice 3** Un collectionneur de cartes POKEMON achète des pochettes d'une carte

qu'il colle dans une pochette ayant  $m$  emplacement. On note  $T_n$  l'achat où il obtient une  $n$  ième carte différente. On pose  $U_n = T_n - T_{n-1}$ .

1. Déterminer la loi de  $(U_1, \dots, U_m)$ .
2. Les v.a.  $(U_n)$  sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la fonction génératrice de  $T_m$  et en déduire son espérance.

## Exercice 4

On considère une suite indépendante de lancers d'une pièce (probabilité de pile égale  $p$ ). On note  $Y_n$  la variable aléatoire égale à 1 si on obtient un pile au lancer  $n$ . Un joueur décide de s'arrêter dès qu'il obtient pile. Modéliser cette situation à l'aide d'un temps d'arrêt. Vérifie-t-on l'identité de Wald? En déduire l'espérance du temps d'arrêt.

## Exercice 5

Deux joueurs possédant initialement des fortunes de  $r$  et  $n - r$  dollars

respectivement ( $r$  et  $n$  sont des entiers positifs tels que  $r < n$ ), misent et jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux. Disons que le deuxième joueur représente le croupier tandis que le premier joueur détermine la mise. Ce dernier gagne sa mise avec probabilité  $p$  ( $0 < p < 1$ ) ou la perd avec probabilité  $q = 1 - p$ , et ce, indépendamment de l'histoire du jeu. Les seules mises possibles sont des multiples d'un dollar et il n'y a pas d'emprunt possible. Étudions deux stratégies populaires pour ce jeu :

1. l'approche audacieuse qui consiste pour le premier joueur à miser à chaque tour le minimum entre sa fortune personnelle et le montant requis pour sa victoire ;
2. l'approche timide qui consiste pour le premier joueur à miser un dollar à chaque tour. Supposons que  $X_t$  représente la fortune du premier joueur après le  $t$  ième jeu lorsque ce dernier emploie la stratégie timide. La variable aléatoire  $Y_t$  représente la fortune du premier joueur après le  $n$  ième jeu lorsque ce dernier emploie la stratégie audacieuse.
3. Pour les fins de cet exercice, nous supposerons que les joueurs jouent à pile ou face avec un sou possiblement mal balancé. Le premier joueur remporte sa mise si le sou tombe du côté pile et la probabilité d'obtenir pile lors d'un lancé de ce sou est de  $p$ . Nous étudierons les résultats des quatre premiers lancers seulement. Le croupier débute avec 4 dollars tandis que le premier joueur possède initialement 6 dollars.
  - (a) Quel est l'ensemble fondamental correspondant à cette expérience aléatoire ?
  - (b) Quelle tribu utilisez-vous pour construire votre espace probabilisable ?
  - (c) Quelles sont les tribus de la filtration engendrée par le processus  $X = \{X_t : t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$  pour les instants 0, 1, 2 et 4 ?
  - (d) Quelles sont les tribus de la filtration engendrée par le processus  $Y = \{Y_t : t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$  pour les instants 0, 1, 2 et 4 ?
  - (e) Interprétez, en fonction de l'information disponible, la structure d'information que vous avez construite à la question c) pour l'instant  $n = 3$ .
  - (f) Donnez les fonctions de masse de  $X_4$  et de  $Y_4$ . Pour les prochaines questions, nous ne nous limiterons pas à l'étude des quatre premiers lancers mais laisserons le jeu se poursuivre jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs.
  - (g) Soit la variable aléatoire  $t$  donnant l'instant auquel le jeu s'est arrêté, c'est-à-dire que  $\tau(\omega) = \min\{t \in \{0, 1, 2, \dots\} : X_t = 0 \text{ ou } X_t = n\}$ . Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt.