Piotr Graczyk
Département de Mathématiques
Université d'Angers
2 bd Lavoisier
49045 Angers
tél. 0241735484
fax 0241735454
e-mail: graczyk@univ-angers.fr

MESURES DE PROBABILITE ET ANALYSE HARMONIQUE SUR LES GROUPES ET ESPACES SYMETRIQUES

Projet d'habilitation
Document de synthèse

Le présent projet d'habilitation comprend le contenu des publications suivantes:

[1] A central limit theorem on the space of positive definite symmetric matrices, *Ann.Inst.Fourier* **42** (1992), 857-874.

[2] Malliavin calculus for stable processes on Heisenberg group (en collaboration avec T.Byczkowski), *Prob.Math.Stat.***13**(1993), 277-292.

[3] Dispersions and a central limit theorem on symmetric spaces, *Bull.Sciences Math.* **118**(1994), 1-12.

[4] Cramér theorem on symmetric spaces of noncompact type, *J.Theor.Prob.* **7**(1994), 609 - 613.

[5] Bochner and Schoenberg theorems on symmetric spaces in the complex case (en collaboration avec J.J.Loeb), *Bull Soc. Math. France* **122**(1994), 571-590.

[6] Spherical analysis and central limit theorems on symmetric spaces(en collaboration avec J.J.Loeb), *Proc. Probability Measures on Groups and Related Structures XI, Oberwolfach*, World Scientific(1994), 146-166.

[7] Espace de Hardy d'un espace symétrique de type hermitien, Journées "Programme de Gelfand - Gindikin" Paris 1996, Institut de Mathématiques de Jussieu, 19 pages.

[8] Function c on an ordered symmetric space, *Bull.Sciences Math.* **121** (1997), 561-572.

[9] Factorization theorems on symmetric spaces of non-compact type, *J.Theor.Prob.* **12**(1999), 375-383.

[10] On the Skitovich-Darmois theorem for compact Abelian groups (en collaboration avec G.M. Feldman), *J.Theor.Prob.* **13**(2000), 859-869.

[11] Independent linear statistics on finite Abelian groups (en collaboration avec G.M. Feldman), *Ukr.Math.J.* **53**(2001),441-448 .

[12] A Bernstein property on groups (en collaboration avec J.J. Loeb), *Prob.Math.Stat.* **20**(2000), 141-149.

[13] Classical theorems of probability on Gelfand pairs - Khinchin theorems and Cramer theorem (en collaboration avec C.R.E. Raja), à paraître dans *Israel Journal of Math.*(2002), 42 pages.

[14] The product formula for the spherical functions on symmetric spaces in the complex case (en collaboration avec P. Sawyer), à paraître dans *Pacific J. Math.*(2001).

[15] Gaussian measures as limits on irreducible symmetric spaces and cones, *Contemporary Mathematics* **287**(2001),111-125.

[16] The complex Wishart distribution and the symmetric group (en collaboration avec G. Letac et H. Massam), à paraître dans *Annals of Statistics*(2002), 31 pages.

[17] The product formula for the spherical functions on symmetric spaces of non-compact type(2001) (en collaboration avec P. Sawyer), soumis, 14 pages.

Dans la grande majorité de ces articles sont étudiées les propriétés différentes des mesures de probabilité sur les groupes (d'habitude de Lie), espaces symétriques riemanniens, cônes symétriques et pairs de Gelfand:

- théorèmes de la limite centrale avec mesures gaussiennes comme limites ([1,3,6,15])

- d'autres propriétés des mesures gaussiennes, comme le théorème de Cramér ou la stabilité et les propriétés de caractérisation statistique de Bernstein et de Darmois-Skitovich ([4, 10, 11, 12, 13, 15])

- propriétés arithmétiques des mesures de probabilité (dont théorèmes de Khinchin) ([9, 13])

- caractérisation de la transformée de Fourier des mesures de probabilité (dont le théorème de Bochner) ([5])

- propriétés de régularité d'un semigroupe de mesures (dont les mesures stables) en fonction de la régularité de la mesure de Lévy([2])

• détermination des moments des lois de Wishart sur le cône symétrique des matrices hermitiennes de type positif ([16]).

Les résultats énumérés ci-dessus ont été démontrés dans une grande partie par des méthodes d'analyse harmonique, que ce soit sur les groupes de Lie, les espaces symétriques ou les paires de Gelfand. Souvent des résultats analytiques intéressants en eux-mêmes ont été ainsi obtenus:

• développements de Taylor des fonctions sphériques sur les espaces symétriques ([1,3,15])

• formules explicites pour le noyau de la transformée d'Abel sur les espaces symétriques dans le cas complexe et ses asymptotiques ([6])

• propriétés de prolongement analytique des fonctions de type positif sur $\mathbf{C}^n$ ([5])

• existence des unités approximatives commutatives sur des groupes nilpotents homogènes ([2])

• formules pour des polynômes spéciaux, aussi en relation avec les algèbres de Jordan([16])

Une motivation probabiliste a également inspiré les travaux sur la formule de produit pour les fonctions sphériques sur les espaces symétriques, qui ont mené à l'obtention des résultats profonds et difficiles de l'analyse harmonique sphérique:

• la formule de produit dans le cas général([17])

• formules explicites pour le noyau de la formule de produit dans le cas complexe ([14]).

En complément de cette recherche à la frontière des probabilités et l'analyse harmonique j'ai aussi mené la recherche dans
• l'analyse harmonique des espaces symétriques non-riemanniens ordonnés et de type hermitien ([7,8]).

D'autres méthodes utilisées dans mes recherches présentées ici sont, entre autres, les suivantes:

• analyse stochastique et calcul de Malliavin([2])

• théorie de structure des groupes localement compacts abéliens([10,11])

• théorie algébrique de probabilités([13])

• analyse sur les cônes symétriques et algèbres de Jordan([15,16])

Ces relations constantes et fascinantes entre les probabilités, l'analyse harmonique et tant d'autres domaines constituent l'essentiel de mes recherches que je présente pour l'habilitation.

1 Théorèmes de la limite centrale sur les espaces symétriques et les mesures gaussiennes comme limites ([1,3,6,15])

Soit $X = G/K$ un espace symétrique riemannien avec G non-compact et K un sous-groupe compact maximal de G. Quand G est semisimple de centre fini, il s'agit d'un espace symétrique de type non-compact.

Une autre classe d'exemples importants de $X = G/K$ est celle des cônes symétriques, p.ex. $\mathcal{P}_n = GL(n, \mathbf{R})/O(n)$, le cône des matrices symétriques de dimension $n \times n$ définies positives.

Sur les variétés riemaniennes X les *mesures gaussiennes* appartiennent par la définition aux semigroupes des mesures engendrés par un opérateur elliptique D de second ordre sur X.

Sur les espaces symétriques $X = G/K$ nous considérons les mesures de probabilité K-invariantes

$$\mu(B) = \mu(k.B) \qquad \forall\, k \in K$$

dont l'ensemble sera noté $M^\natural(X)$. Les générateurs des semigroupes de mesures K-invariantes sont des opérateurs différentiels G-invariants sur G.

Si $X = G/K$ est un espace symétrique irréductible alors à un facteur multiplicatif près on a $D = L$, l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X et toutes les mesures gaussiennes K-invariantes appartiennent au semigroupe de la chaleur $(\kappa_t)_{t>0}$, c'est-à-dire elles ont des densités h_t vérifiant l'équation de la chaleur sur X.

Si Ω est un cône symétrique de rang r (irréductible comme cône) alors les opérateurs elliptiques invariants d'ordre 2 sont des combinaisons de L, l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Ω et de E^2 où E est l'opérateur d'Euler ($Ef(x) = \frac{d}{dt} f(tx)|_{t=1}$). Les générateurs des semigroupes gaussiens sont alors de la forme

$$D = a(L - \frac{1}{r}E^2) + bE^2 + cE + d, \quad a, b > 0.$$

Le semigroupe $(\kappa_t)_{t>0}$ engendré par L est le semigroupe de la chaleur.

Les semigroupes $(\eta_t)_{t>0}$ engendré par $\frac{1}{2}E^2$ et $(\nu_t)_{t>0}$ engendré par $L_1 = L - \frac{1}{r}E^2$ sont gaussiens dégénérés. Ils sont les prolongements des semigroupes de la chaleur sur $\mathbf{R}^+$ et sur $\Omega_1 = \{x \in \Omega | \det(x) = 1\}$ à Ω (on peut identifier de façon évidente $\Omega = \Omega_1 \times \mathbf{R}^+$).

Le rôle des théorèmes de la limite centrale sur les espaces symétriques n'est pas seulement celui de constater que les phénomènes aléatoires indépendants sur X proprément normalisés ou uniformément petits et répétés convergent en loi vers une loi gaussienne.

Les théorèmes de la limite centrale sur les espaces symétriques fournissent aussi une caractérisation probabiliste des lois gaussiennes, définies ci-dessus de façon purement analytique.

Pour les mesures et variables aléatoires K-invariantes à valeurs dans X nous adoptons ci-dessous la convention de les traiter de façon équivalente comme des mesures K-biinvariantes sur G et variables aléatoires K-biinvariantes à valeurs dans G. Cela permet en particulier de définir leur produit de convolution (pour les mesures) et leur produit (pour les variables aléatoires).

Théorèmes de type Lindeberg-Lévy

Soit $Y_1, Y_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires K-biinvariantes à valeurs dans G, indépendantes et de la même loi. A. Terras a proposé la normalisation suivante de $S_m = Y_1 ... Y_m$. Si $Y_j = k_j^{(1)} \exp Y_j^+ k_j^{(2)}$ est la décomposition de Cartan de Y_j avec $Y_j^+ \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ alors

$$S_m^\sharp = (k_1^{(1)} \exp(\frac{Y_1^+}{\sqrt{m}}) k_1^{(2)}) \ldots (k_m^{(1)} \exp(\frac{Y_m^+}{\sqrt{m}}) k_m^{(2)}).$$

Sur les cônes symétriques nous écrivons aussi $Y^+ = \mathbf{t}(Y)$, les vecteur des logarithmes des valeurs propres de Y à l'ordre croissant. Dans [15] on démontre les théorèmes suivants.

Théorème. *Si $X = G/K$ est un espace symétrique irréductible et $\mathbb{E}(\|Y_1^+\|^2) = t > 0$ alors*

$$S_m^\sharp \Rightarrow \kappa_{t/2n}, \qquad m \to \infty$$

où n est la dimension de X.

Théorème. *Si Ω est un cône symétrique irréductible et $\mathbb{E}(Y_1^+) = 0$, $\mathrm{Cov}(Y_1^+) = Id$ alors*

$$S_m^\sharp \Rightarrow \kappa_{\frac{1}{r+2d^{-1}}} * \eta_{\frac{1}{r+2d^{-1}}} = \nu_{\frac{1}{r+2d^{-1}}} * \eta_{\frac{r+2}{r(r+2d^{-1})}}, \qquad m \to \infty.$$

où d est la constante de Peirce.

Ce type de théorèmes de la limite centrale a été démontré avant par Terras (cas $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$), Richards(cas $\mathcal{P}_n$), Zhang(cônes symétriques) et Sawyer (cas $X = SO_o(p,q)/SO(p) \times SO(q)$), dans tous les cas sous l'hypothèse que la loi de Y_i est absolument continue et (sauf le dernier cas) sans expliciter la relation entre la limite et les mesures gaussiennes.

Nos résultats terminent définitivement la discussion des théorèmes de limite centrale du type Lindeberg-Lévy sur les espaces symétriques et leurs preuves sont bien plus faciles dans les cas généraux que les preuves des auteurs cités ci-dessus dans les cas particuliers. On étudie le comportement asymptotique de la transformée de Fourier sphérique de $S_m^\sharp$ qui s'écrit

$$\left(\int_G \phi_\lambda(\exp(-\frac{x^+}{\sqrt{m}}))d\mu_{Y_1}(x)\right)^m$$

où ϕ_λ est une fonction sphérique bornée sur X ou Ω.

Pour cela on a besoin d'un développement de Taylor d'ordre 2 de $\phi_\lambda(\exp H)$ en $H = 0$.

Nous démontrons le théorème

Théorème.

$$\phi_\lambda(\exp H) = 1 + \frac{\gamma_L(\lambda)}{2n}\sum_{j=1}^r h_j^2 + \sum f_\beta(\lambda)P_\beta(H)$$

P_β sont des polynômes W-invariants on $\mathfrak{a}$, homogènes de degré supérieur ou égal à 3.

Dans le cas X symétrique irréductible $\gamma_L(\lambda) = -(\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2)$ est la valeur propre de L pour la fonction propre qui est la fonction sphérique ϕ_λ (ρ est, comme d'habitude, égal à la demi-somme des racines positives). Une formule analogue est démontrée dans [15] sur un cône symétrique Ω.

Théorème.

$$\phi_\lambda(e^{\mathbf{t}}) = 1 + a(\lambda)\sum_{j=1}^r t_j \; + \; b(\lambda)\sum_{j=1}^r t_j^2 + c(\lambda)(\sum_{j=1}^r t_j)^2 + R_\lambda(\mathbf{t})$$

où $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ et $c(\lambda)$ sont explicités dans [15].

L'idée de démonstration de ces deux développements limités consiste à écrire ces développements sans connaître leurs coefficients et à appliquer les opérateurs G-invariants d'ordre 1 et 2

(seulement L dans le cas X irréductible; L, E et E^2 dans le cas d'un cône symétrique.)

Notons qu'une autre variante des théorèmes de type Lindeberg-Lévy à été étudiée par Guivarc'h et Raugi pour toutes les mesures, pas forcement K-biinvariantes, sur G semisimple. Il s'agit de normaliser les produits S_m après avoir multiplié les variables Y_i:

$$S_m^\flat = k_1 \exp(\frac{S_m^+}{\sqrt{m}}) k_2.$$

Le comportement asymptotique de S_m^+ à été aussi étudié par des méthodes géométriques par Babillot.

Dans l'article [6] nous montrons comment quelques nouvelles propriétés du noyau de la transformée d'Abel et des fonctions sphériques que nous y démontrons dans le cas G complexe permettent d'établir ce type de théorème de la limite centrale par des méthodes d'analyse harmonique.

Théorèmes de type Lindeberg-Feller

Ce sont les théorèmes sur le comportement asymptotique des systèmes triangulaires infinitésimaux des mesures. Comme la normalisation nécessaire dans les théorèmes du type Lindeberg-Lévy n'est pas très naturelle du point de vue de la structure des espaces symétriques, c'est ce type des théorèmes de la limite centrale qui semble le mieux adapté dans ce cadre-là. Nous lui consacrons les articles [1] dans le cas $\mathcal{P}_n$, [3] dans le cas $X = G/K$ un espace symétrique irréductible et une partie de [15] dans les cas d'un cône symétrique quelconque.

Afin d'étudier les propriétés limites des systèmes des mesures K-invariantes on est obligé de contrôler certains paramètres de ces mesures. Dans [1] nous introduisons les *dispersions* $D_j\mu$ d'une mesure de probabilité K-invariante sur $X = G/K$ de la façon suivante.

Définition. $D_j\mu = c\int Q_j(x)d\mu(x)$ *où* $Q_j(x) = \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \alpha_j}|_{\lambda=\rho}$.

La constante normalisante c est choisie de façon que $D_j\kappa_t = t$ pour les mesures du semigroupe de la chaleur. Les α_j sont les racines simples positives, $j = 1, \ldots, r$.

Nous montrons que toutes les applications $D : M^\natural(X) \to [0, \infty]$ qui satisfont $D(\mu_1 * \mu_2) = D\mu_1 + D\mu_2$ et telles que $D\mu = \int Q(x)d\mu(x)$ pour une fonction analytique K-invariante sont égales à une combinaison linéaire positive des D_j. D'autre part nous montrons la propriété non-triviale suivante: si $D_1\mu = \ldots = D_r\mu = 0$ alors $\mu = \delta_e$. Les démonstrations de ces propriétés de base des dispersions sont basées sur l'analyse harmonique sphérique, entre autres sur le théorème de convexité de Kostant.

Dans le cas des cônes symétriques on doit en plus contrôler les mesures et les variables aléatoires dans la direction de $\mathbf{R}^+$, plus précisement l'espérance et la variance de $\log(\det(Y))$.

Voilà les théorèmes de la limite centrale de type Lindeberg-Feller que nous avons obtenus. Nous les présentons de façon homogène en termes des variables aléatoires K-biinvariantes à valeurs dans G.

Théorème. *Soit* (Y_{mj}), $m \in \mathbf{N}$, $1 \le j \le k_m$ *un système triangulaire des variables aléatoires* K*-biinvariantes à valeurs dans* G *et telles que pour tout* $m \in \mathbf{N}$ *les variables* $Y_{m1}, \ldots, Y_{mk_m}$ *dans la* m*-ième ligne du système soient indépendantes. Posons*

$$Z_m = Y_{m1}\, Y_{m2} \ldots Y_{mk_m}.$$

(i) Supposons que $X = G/K$ est un espace symétrique irréductible. Supposons que les variables aléatoires (Y_{mj}) sont telles que

$$D_1(Z_m) \to t, \qquad m \to \infty$$

et que la condition technique

$$lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k_m} \mathbb{E}(\frac{\|(Y_{mj}^+\|^3}{1+\|Y_{mj}^+\|^2}) = 0$$

est vérifiée. Alors $Z_m \Rightarrow \kappa_t, \qquad m \to \infty.$

(ii) Supposons que $\Omega = G/K$ est un cône symétrique irréductible. Supposons que les variables aléatoires (Y_{mj}) sont telles que

$$\mathbb{E}(\log(\det(Y_{mj})) = 0$$
$$\frac{1}{r^2}\mathbf{Var}(\log(\det(Z_m)) \to u, \qquad m \to \infty$$
$$D_1(Z_m) \to t, \qquad m \to \infty.$$

Si la condition technique

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k_m} [\mathbb{E}(\frac{\|\mathbf{t}(Y_{mj})\|^3}{1+\|\mathbf{t}(Y_{mj})\|^2}) + \mathbb{E}(\log^2(\det(Y_{mj})), \|\mathbf{t}(Y_{mj})\| > 1)] = 0$$

est vérifiée alors

$$Z_m \Rightarrow \nu_t * \eta_u, \qquad m \to \infty.$$

L'ingrédient principal des preuves est encore constitué par des développements limités des fonctions sphériques, faisant apparaître cette fois-ci les densités des dispersions Q_j.

Dans le cas $X = G/K$ nous montrons que

$$\phi_\lambda(\exp H) = 1 + \gamma_\lambda(\lambda) Q_j(\exp H) + R_{j,\lambda}(H)$$

et pour les cônes symétriques

$$\phi_\lambda(e^{\mathbf{t}}) = 1 + \frac{\gamma_E(\lambda)}{r}\sum_{j=1}^{r} t_j + (\gamma_L(\lambda) - \frac{1}{r}\gamma_E^2(\lambda))Q_j(e^{\mathbf{t}}) + \frac{1}{2r^2}\gamma_E^2(\lambda)(\sum_{j=1}^{r} t_j)^2 + R_{j,\lambda}(\mathbf{t})$$

où le reste $R_{j,\lambda}$ est de la même forme que le reste R_λ dans les développements limités utilisés dans le cas des théorèmes du type Lindeberg-Lévy.

Le programme d'étude des théorèmes de la limite centrale pour les variables aléatoires K-invariantes sur les espaces symétriques de type non-compact et sur les cônes symétriques, initié par Audrey Terras en 1984, a été ainsi complètement réalisé dans nos articles analysés dans cette section.

2 Propriétés de mesures gaussiennes ([4,10,11,12,13,15])

Les mesures gaussiennes constituent l'objet central de la théorie des probabilités. Dans la Section 1 nous avons vu qu'elles sont limites dans les théorèmes de la limite centrale sur les espaces symétriques.

Dans le cas classique ou $X = \mathbf{R}^n$ les mesures gaussiennes possèdent plusieurs autres importantes propriétés, dont plusieurs sont équivalentes à leur définition. Lorsque X est un groupe, une motivation supplémentaire pour l'étude des mesures gaussiennes vient de la recherche des propriétés caractéristiques de ces mesures, la seule caractérisation connue de ces mesures étant d'habitude analytique *via* l'opérateur de Laplace-Beltrami.

Théorème de Cramer

Dans l'article [4] nous avons montré le théorème de Cramér sur $X = G/K$ un espace symétrique irréductible de type non-compact:

Théorème. *Soit κ une mesure gaussienne K-invariante sur X et soit*

$$\kappa = \mu_1 * \mu_2$$

pour deux K-invariantes mesures μ_1 et μ_2 différentes de δ_{eK}. Alors les mesures μ_1 et μ_2 sont aussi gaussiennes.

La preuve utilise la transformée d'Abel des mesures K-invariantes sur X, un important outil de l'analyse sphérique sur les espaces symétriques.

De l'autre côté, Marcinkiewicz a observé que les mesures gaussiennes sur le cercle ont des facteurs de convolution non-gaussiens, donc le théorème de Cramér n'est pas vrai sur le cercle.

Dans [13] nous nous sommes intéressés à cette question dans le contexte très général d'une paire de Gelfand (G, K) où G est un groupe compact. Les résultats suivants ont été obtenus:

Théorème. *Soit (G, K) une paire de Gelfand où G est un groupe de Lie connexe compact. Soit $(\kappa_t)_{t>0}$ le semigroupe de la chaleur engendré par l'opérateur de Laplace-Beltrami L de l'espace homogène riemannien G/K. Alors toutes les mesures $(\kappa_t)_{t>0}$ ont des facteurs non-triviaux qui n'appartiennent pas au semigroupe $(\kappa_t)_{t>0}$.*

C'est toujours le cas lorsque G/K est un espace symétrique riemannien de type compact.

En fait une propriété plus forte a été démontrée: les mesures κ_t possèdent des facteurs non-décomposables. En notant I_o l'ensemble des mesures μ telles que si $\mu = \nu * \gamma$ avec $\nu, \gamma \neq \delta_{eK}$ alors ν et γ se factorisent non trivialement, cela veut dire que $\kappa_t \notin I_o$. Cette propriété était connue auparavant seulement pour les espaces symétriques de type compact de rang 1 (Trukhina).

Une question naturelle se pose: est-ce que $I_o = (\kappa_t)_{t>0}$ si X est de type non-compact? C'était démontré pour les espaces hyperboliques réels par Trukhina et est vrai pour tous les espaces non-compacts de rang 1. Cette question m'a inspiré à m'intéresser à la formule de produit(cf. Section 7), l'ingrédient principal de la preuve de ce résultat au rang 1 (Flensted-Jensen, Koornwinder).

Les recherches sur le théorème de Cramér au cas compact utilisent plusieurs outils de la théorie de probabilités sur les groupes, dont la formule de Lévy-Khinchin sur les paires de Gelfand (qui peut être obtenue directement ou comme conclusion de la formule de Lévy-Khinchin sur certains hypergroupes). La construction d'un facteur non-décomposable est basée sur une construction de Feldman dans le cas abélien.

Stabilité

La propriété de *2-stabilité* au sens de Tortrat d'une mesure de probabilité μ sur un groupe veut dire que si $Y_1, Y_2, \ldots$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi μ alors

$$Y_1^2 = Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \quad \text{en loi}$$

et, plus généralement, que $Y_1^n = Y_1 ... Y_{n^2}$ en loi pour tout $n \geq 1$. Dans le cas $\mathbf{R}^n$ les mesures 2-stables coïncident avec les mesures gaussiennes.

Dans le cas d'un espace symétrique non-compact ce phénomène n'est plus vrai, ce qui est démontré dans [15]. La démonstration est loin d'être triviale car elle utilise les estimations du noyau de la chaleur obtenus en 1999 par Anker et Ji. En profitant de ces estimations nous montrons également dans [15] que d'autres propriétés de stabilité envisageables sur un espace symétrique, par exemple la stabilité du facteur abelien dans la décomposition de Cartan, ne sont pas vérifiées par les mesures gaussiennes non plus: en particulier si $Y_1, Y_2, \ldots$ sont gaussiennes de loi κ_t alors ni $S_m^\sharp$ ni $S_m^\flat$ ne le sont pas pour $m > 1$ et t suffisamment grand.

Propriété de Bernstein

Nous appelons ainsi la célèbre propriété caractéristique des lois normales sur $\mathbf{R}^n$ énoncé dans le théorème de Bernstein. Sur un groupe G on dira qu'une mesure μ possède la propriété de Bernstein si, étant donné deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi μ, les variables

$$XY \quad \text{et} \quad XY^{-1} \qquad \text{sont indépendantes.}$$

Le fait que les mesures gaussiennes κ_t sur un espace symétrique ne sont pas 2-stables implique qu'elles ne vérifient pas la propriété de Bernstein([15]) pour $t > 0$ assez grand. La propriété de Bernstein étant héréditaire par la convergence faible ([12]) nous montrons aussi que les κ_t n'ont pas la propriété de Bernstein pour t suffisamment proche de 0.

Dans l'article [12] nous étudions une propriété (N) de type de Bernstein un peu plus forte, introduite par Neuenschwander:

$$(XY, YX) \quad \text{et} \quad (XY^{-1}, Y^{-1}X) \qquad \text{sont indépendantes.}$$

Nous montrons que sous des hypothèses très variées(G discrète ou G compact ou G nilpotent ou G résoluble ou G semisimple...) la propriété (N) implique que μ est concentrée sur un sous-groupe abelien de G. Il n'y a donc pas de mesures intéressantes sur G qui vérifient cette propriété. Les démonstrations utilisent des propriétés différentes des groupes énumérés ci-dessus.

Plusieurs propriétés caractéristiques des mesures gaussiennes dans le cas classique ne sont donc pas vérifiées par les mesures gaussiennes K-invariantes sur un espace symétrique X de type non-compact. Nous formulons la conjecture:

Conjecture. $I_o^\natural(X) = \{$mesures gaussiennes K-invariantes$\}$.

Elle reste le seul espoir d'avoir une propriété probabiliste caractéristique des mesures gaussiennes sur X qui serait différente des théorèmes de la limite centrale.

Cas commutatif

Dans le cas ou G est un groupe abelien localement compact les mesures gaussiennes vérifient la propriété de Bernstein, mais il y en a d'autres qui la vérifient aussi. Une étude complète de la caractérisation de ces mesures a été achevée par Feldman.

Une question plus générale que la propriété de Bernstein se pose lorsque nous remplaçons le produit XY et le "quotient" XY^{-1} par deux statistiques linéaires

$$L_1 = \alpha_1(X) + \alpha_2(Y) \quad \text{et} \quad L_2 = \beta_1(X) + \beta_2(Y)$$

où $\alpha_i, \beta_i,\ i = 1, 2$ sont des automorphismes du groupe G. Skitovich et Darmois considéraient une situation encore plus générale ou au lieu de 2 variables indépendantes X et Y on en prend un n-échantillon. Ils ont démontré que sur $\mathbf{R}^d$ l'indépendance de L_1 et L_2 entraîne que la loi de l'échantillon est gaussienne.

Le problème de caractérisation des groupes abeliens localement compacts sur lesquels l'indépendance des statistiques L_1 et L_2 sur un n-échantillon(n étant arbitraire) implique que sa loi est gaussienne (à une convolution avec une mesure idempotente près) a été résolu par Feldman.

Dans les articles [10] et [11] nous étudions la même question sous des hypothèses plus faibles: on ne suppose plus n arbitraire mais on s'intéresse aux cas lorsque $n = 2$ pour les groupes compacts et lorsque $n = 3$ pour les groupes finis. Cette recherche est une continuation naturelle de la découverte étonnante de Feldman(1999) qui a montré que si $n = 2$ alors le théorème de Darmois-Skitovich est vrai sur tous les groupes G finis.

Nous montrons que ce n'est plus jamais le cas si G est compact connexe et nous caractérisons les groupes G totalement non-connexes pour lesquels le théorème avec $n = 2$ est vrai([10]).

Dans [11] nous donnons une liste complète des groupes finis sur lesquels le théorème de Darmois-Skitovich est vrai pour $n = 3$. Contrairement au cas $n = 2$, cette liste est bien différente de tous les groupes finis.

Les méthodes utilisées dans cette recherche utilisent la théorie de structure des groupes abeliens. Le problème est toujours transformé *via* la transformée de Fourier en une équation fonctionnelle sur le dual $\hat{G}$.

3 Arithmétique des mesures de probabilité([9,13])

Soit $X = G/K$ un espace symétrique de type non-compact. Deux propriétés fondamentales suivantes de l'arithmétique des mesures de probabilité sur X ont été démontrées dans [9]. Elles portent le nom des théorèmes de Khinchin, qui les a découvertes sur $\mathbf{R}^n$.

Théorème. (1-er th. de Khinchin) *Toute mesure $\mu \in M^\natural(X)$ se décompose*

$$\mu = (\nu_1 * \nu_2 * \ldots) * \omega$$

où la suite finie ou infinie $\nu_1, \nu_2, \ldots$ contient des mesures indécomposables et la mesure ω n'a pas de facteurs indécomposables (i.e. $\omega \in I_o$).

(2-ème th. de Khinchin) *Toute mesure de $I_o^\natural$ est indéfiniment divisible.*

L'élément-clé de la démonstration est constitué par le

Théorème. Le semigroupe $M^\natural(X)$ est delphique

où la notion d'un semigroupe *delphique* a été introduite et dévelopée par Kendall. Les axiomes d'un semigroupe delphique sont vérifiés grâce à une application de l'analyse harmonique sphérique, entre autres des estimations des fonctions sphériques ϕ_λ par la fonction ϕ_o et l'estimation de Harish-Chandra de ϕ_o.

Dans l'article [13] notre but était d'étudier les théorèmes de Khinchin et d'autres propriétés basiques des mesures de probabilité sur les paires de Gelfand, par exemple le théorème de Cramér discuté dans la section précédente.

Les paires de Gelfand constituent une large classe des couples (G, K) allant des espaces euclidiens jusqu'aux espaces symétriques et arbres homogènes. Gérard Letac a posé en 1980 la question d'étudier les probabilités dans le cadre très naturel et très général de paires de Gelfand. Entre ce qui était connu là-dessus en 1980 et notre article presque rien ne s'est passé à ce sujet. Une des raisons peut en être le fait que l'un des outils principaux de notre travail, la théorie algébrique des probabilités de Ruzsa et Székely n'a vu le jour qu'à la fin des années 80 et elle a mis du temps pour être apprise et reconnue très utile - et parfois, comme dans notre cas, irremplaçable - par les probabilistes.

Rappelons brièvement les éléments les plus importants de cette théorie que nous utilisons dans [13]. Soit S un semigroupe topologique(de Hausdorff) commutatif. Sous-entendu, dans nos applications, $S = M^\natural(G)$, l'ensemble des mesures K-biinvariantes sur G. Alors:

- Si S est un semigroupe *hongrois* alors le 1-er théorème de Khinchine est vrai sur S.
- Si S est un semigroupe *normable et hongrois* alors le 2-ème théorème de Khinchine est vrai sur S (*i.e.* les éléments de I_o sont indéfiniment divisibles, à la convolution avec une mesure unité près).
- Si S est un semigroupe *normable, hongrois* et *stable* alors le théorème de la limite centrale de Khinchine est vrai sur S (*i.e.* les limites des systèmes infinitésimaux triangulaires sont des mesures indéfiniment divisibles, à la convolution avec une mesure unité près).

Dans les formulations ci-dessus une *mesure unité* veut dire une mesure qui factorise δ_e, l'élément neutre du semigroupe, et les éléments de I_o sont les mesures dont tous les facteurs non-triviaux se décomposent non-trivialement; "non-trivial" veut dire ici différent d'une mesure unité.

Le point de départ de notre travail [13] est l'identification des paires de Gelfand telles que $M^\natural(G)$ soit un semigroupe hongrois. Essentiellement cela revient aux deux axiomes suivants; la relation $\mu \sim \nu$ y utilisée veut dire que μ est facteur de ν et ν est facteur de μ:

(1) Si $\mu \sim \nu$ alors $\mu = u * \nu$ pour une unité u

(2) Pour tout $\mu \in S/\sim$ l'ensemble $F(\mu)$ des facteurs de μ dans $S/\sim$ est compact ("compacité factorielle", plus précisément aux shifts par des unités près).

Quant à l'axiome (1) on trouve par des arguments de la théorie des groupes qu'il est équivalent à une condition de "presque-maximalité" de K dans G:

Théorème 1. *(1) est satisfait sur $M^\natural(G)$ si et seulement si pour tout sous-groupe compact M tel que $K \subset M \subset G$ on a*

$$N(M) = N(K)M$$

où $N(\cdot)$ signifie le normalisateur.

En particulier il en découle que (1) est toujours vérifié si K est maximal compact propre dans G, donc pour tous les espaces symétriques.

Le travail sur l'axiome de compacité (2) constitue la partie la plus délicate et la plus technique de l'article [13]. Grâce aux nombreux résultats précédents sur cette question difficile et importante de la théorie des probabilités sur les groupes (Dani, McCrudden, Raja) on montre que

Théorème 2. *Si (G, K) est une paire de Gelfand avec G connexe et K maximal compact propre dans G alors l'axiome de compacité factorielle (2) est satisfait sur $M^\natural(G)$.*

Ce théorème est ensuite généralisé au cas G presque connexe, sous une condition technique supplémentaire.

Le semigroupe $M^\natural(G)$ est *normable* si sur tout ensemble de facteurs $F(\mu)$ avec μ non-équivalent à un idempotent il existe une forme Δ continue additive (*i.e.* $\Delta(\nu_1 * \nu_2) = \Delta(\nu_1) + \Delta(\nu_2)$) à valeurs non-négatives et telle que $\Delta(\mu) > 0$.

En se servant de l'analyse harmonique des paires de Gelfand(l'existence d'une transformée de Fourier riche en bonnes propriétés) il n'est pas difficile de voir que $M^\natural(G)$ est normable pour tous les paires de Gelfand.

Finalement, en appliquant les résultats énoncés ci-dessus et en analysant des cas des hypothèses differentes sur G nous obtenons

Théorème. *Les trois théorèmes de Khinchin sont vrais sur les paires de Gelfand vérifiant la condition du Théorème 1 et une des hypothèses suivantes:*

(a) G est connexe

(b) G est presque connexe et $\mathrm{Ad}(G/M)$ est presque algébrique pour un sous-groupe compact normal M

(c) G a un sous-groupe compact ouvert normal

(d) (G, K) est une paire symétrique et G est radiciellement 2-compact

(e) G est Zariski-connexe p-adique

(f) G est une extension compacte d'un groupe algébrique unipotent

(g) G est une extension compacte d'un groupe nilpotent connexe.

(h) (G, K) est une paire symétrique avec G compact.

Quelques autres propriétés limites ont aussi été étudiées ou discutées dans [13] (chapitres 7 et 10).

En résumant, les paires de Gelfand avec une structure précisée de G (les propriétés de G peuvent être très variées, mais il faut en savoir quelque chose de plus précis) et proches du cas euclidien ou des paires symétriques au sens de "presque-maximalité" de K dans G possèdent toutes les propriétés fondamentales probabilistes connues dans le cas euclidien ou symétrique.

4 Caractérisation de la transformée de Fourier des mesures de probabilité ([5])

Dans l'article [5] nous trouvons une caractérisation de la transformée de Fourier sphérique des mesures positives bornées K-invariantes sur les espaces symétriques riemanniens $X = G/K$ de type non-compact dans le cas ou G est un groupe de Lie complexe. C'est un analogue du célèbre théorème de Bochner sur $\mathbf{R}^n$. Afin de l'énoncer nous définissons le polynôme

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} < \alpha | \lambda >$$

et l'opérateur différentiel correspondant

$$\mathcal{D} = \pi(\frac{\partial}{\partial \lambda}).$$

Voici le théorème de Bochner pour les espaces symétriques dans le cas complexe:

Théorème. *Une fonction Ψ invariante par rapport au groupe de Weyl W et définie sur le tube $T_\rho = \mathfrak{a}^* + iC(\rho) \subset a^*_{\mathbf{C}}$ est la transformée de Fourier sphérique d'une mesure de probabilité K-invariante sur $X = G/K$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*
(i) Ψ est holomorphe sur $\mathrm{Int} T_\rho$ et continue sur T_ρ.
(ii) $\Psi(i\rho) = 1$.
(iii) La fonction $\Phi(\lambda) = \mathcal{D}[\pi(\lambda)\Psi(\lambda)]$ est définie positive pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.

Afin de démontrer ce théorème de Bochner nous utilisons les méthodes classiques de l'analyse harmonique sur les groupes de Lie semisimples complexes (surtout la formule explicite pour les fonctions sphériques) ainsi que quelques propriétés intéressantes indépendamment des fonctions holomorphes liées aux fonctions de type positif et la transformée de Fourier complexe que nous avons démontrées:

Théorème. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et $W = V \oplus iV$ son complexifié. Soit Ω un domaine de V et $a \in \Omega$.*
Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $U \cup (V + ia)$ où U est un ouvert de W contenant $i\Omega$, et supposons que f vérifie les conditions suivantes:
(i) f est holomorphe sur U
(ii) f est définie positive sur $V + ia$
Alors
(i) f se prolonge de façon unique à une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur le tube $T = V + i\Omega$.
(ii) Il existe une mesure positive κ sur V telle que

$$\tilde{f}(\mathbf{z}) = \int_V e^{i<\mathbf{z}|v>} d\kappa(v)$$

pour tout $\mathbf{z} \in T$ (en particulier l'integrale converge).
(iii) Les fonctions $t \mapsto \tilde{f}(t + ib)$ sont définies positives sur V pour tout $b \in \Omega$ fixé.

Dans l'article [5] nous caractérisons aussi la transformée de Fourier sphérique des mesures indéfiniment divisibles, toujours dans le même cas complexe, ce qui correspond au théorème de Schoenberg classique dans le cas euclidien:

Théorème. *Soit X espace symétrique irréductible. Une fonction $-\eta$ supposée W-invariante sur $T_\rho \subset a^*_{\mathbf{C}}$ est le logarithme de la transformée de Fourier sphérique d'une mesure indéfiniment divisible $\mu \in M^\natural(G/K)$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

(i) η est holomorphe sur $\mathrm{Int}T_\rho$ et continue sur T_ρ.

(ii) $\eta(i\rho) = 0$.

(iii) La fonction $\theta(\lambda) = \mathcal{D}[\pi(\lambda)\eta(\lambda)]$ est définie négative pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.

Dans la démonstration nous utilisons les formules de Lévy-Khinchin dans le cas euclidien et symétrique. Nous discutons aussi les propriétés des fonctions définies négatives au sens symétrique(comme dans le dernier théorème) et nous en donnons quelques exemples.

5 Régularité du semigroupe stable en fonction de la mesure de Lévy ([2])

La régularité des semigroupes de mesures stables sur les groupes de Lie nilpotents homogènes est une question importante dans l'analyse harmonique de ces groupes, en particulier dans l'analyse des espaces de Hardy. Les démonstrations de ce type de résultats par des méthodes analytiques sont très difficiles (Glowacki). Nous avons appliqué dans [2] les méthodes du calcul de Malliavin dans sa version pour des processus avec des sauts crée par Bismut. On obtient ainsi de façon probabiliste des résultats plus forts que ceux obtenus analytiquement.

Pour simplicité nous présentons ces résultats sur le groupe de Heisenberg $\mathbf{H}$. Ils peuvent être généralisés au cas d'un groupe nilpotent homogène quelconque.

Un semigroupe continu $(\mu_t)_{t>0}$ des mesures sur $\mathbf{H}$ s'appelle α-stable ($0 < \alpha < 2$) si pour tout B borélien dans $\mathbf{H}$ et $t > 0$

$$\mu_t(B) = \mu_1(t^{-1/\alpha}B).$$

Un semigroupe continu $(\mu_t)_{t>0}$ s'appelle stable tronqué si sa mesure de Lévy ν vérifie

$$\nu = h\nu'$$

où ν' est la mesure de Lévy d'un semigroupe stable et $h \in \mathcal{C}_c(\mathbf{H})$ est une fonction non-négative égale à 1 sur un voisinage de 0 et majorée par 1.

Nous montrons

Théorème. *(1) Soit (μ_t) un semigroupe de mesures α-stables sur $\mathbf{H}$. Si sa mesure de Lévy $\nu \in \mathcal{C}^m$ alors $\mu_t \in \mathcal{C}^{2m-4}$.*

(2) Soit (μ_t) un semigroupe stable tronqué sur $\mathbf{H}$. Si sa mesure de Lévy $\nu \in \mathcal{C}^1$ alors $\mu_t \in \mathcal{C}^\infty$.

A part les méthodes propres au calcul de Malliavin (intégration par parties dans les intégrales stochastiques) nous utilisons intensément la propriété forte de Markov ainsi que les inégalités de Doob-Kolmogorov pour les martingales. Quant à l'analyse, nous nous servons seulement de la représentation adjointe, une notion de base de la théorie des groupes de Lie.

6 Les moments des lois de Wishart([16])

Soit V l'espace des matrices hermitiennes de dimension r et soit Ω le cône des matrices hermitiennes définies positives. Nous disons qu'une variable aléatoire S à valeurs dans $\overline{\Omega}$ a la distribution de Wishart complexe $\gamma_{p,\sigma}$ si sa transformée de Laplace

$$\mathbb{E}(\exp \mathrm{trace}\,(\theta S)) = (\det(I_r - \sigma\theta))^{-p},$$

où σ et $\sigma^{-1} - \theta$ appartiennent à Ω, et p est un élément de l'ensemble de Gindikin $\{1, 2, \ldots, r-1\} \cup (r-1, \infty)$.

Les lois de Wishart sont des analogues multidimensionnels des distributions gamma et χ^2 sur $\mathbf{R}^+$. Leur étude est motivée par leurs nombreuses applications en statistiques multivariées. En particulier les moments de S et S^{-1} sont utilisées dans l'approximation de certaines statistiques dans l' analyse discriminante, les modèles de croissance etc.

Dans notre article nous calculons tous les moments de S. Plus précisément, si $h = (h_1, \ldots, h_n)$ est un mot de matrices complexes de dimension r et si nous introduisons les variables aléatoires complexes

$$S(h) = \mathrm{trace}\,(Sh_1 \ldots Sh_n)$$

et

$$S^{(-1)}(h) = \mathrm{trace}\,(S^{-1}h_1 \cdots S^{-1}h_n),$$

nous savons calculer de manière élémentaire les espérances

$$\mathbb{E}(S(h^{(1)}) \cdots S(h^{(m)}))$$

pour un arbitraire ensemble de mots $\{h^{(1)}, \cdots, h^{(m)}\}$. Nous déterminons aussi l'espérance

$$\mathbb{E}(S^{(-1)}(h^{(1)}) \cdots S^{(-1)}(h^{(m)}))$$

quand elle est finie.

Notre technique consiste à utiliser les formes multilinéaires $r_\pi(\sigma)(h_1, \ldots, h_k)$, où π est un élément du groupe $\mathcal{S}_k$ de permutations de $\{1, \ldots, k\}$. Par exemple, si $\pi = (4)(2,5)(6,3,1)$, la forme $r_\pi(\sigma)$ est définie par

$$r_\pi(\sigma)(h_1, \ldots, h_6) = \mathrm{trace}\,(\sigma h_4)\mathrm{trace}\,(\sigma h_2 \sigma h_5)\mathrm{trace}\,(\sigma h_6 \sigma h_3 \sigma h_1).$$

Notons par $m(\pi)$ le nombre de cycles π et posons $q = p - r$. Nos résultats peuvent être présentés de la façon succinte suivante, en utilisant le produit de convolution $*$ sur l'algèbre du groupe $\mathcal{A}(\mathcal{S}_k)$:

Théorème.

$$\mathbb{E}(r(S)) = p^m * r(\sigma), \qquad r(\sigma^{-1}) = (-1)^k(-q)^m * \mathbb{E}(r(S^{-1})).$$

La démonstration de ces formules est élémentaire.

Un problème important est maintenant l'inversion de la deuxième formule, i.e. la détermination de l'inverse de la fonction $(-1)^k(-q)^m$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{S}_k)$. Dans ce but nous utilisons les caractères des représentations irréductibles de $\mathcal{S}_k$.

Nous notons par I_k l'ensemble de suites finies $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ de k entiers positifs tels que $i_1 + 2i_2 + \cdots + ki_k = k$. A tout π de $\mathcal{S}_k$ nous associons l'élément $\mathbf{i} = \mathbf{i}(\pi) = (i_1, \ldots, i_k)$ de I_k où i_j est le nombre de cycles j de π. Un tel élément $\mathbf{i}$ de I_k est appelé le *portrait* de π.

Soit M_k l'ensemble de suites $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ des entiers tels que $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_k \geq 0$ et $m_1 + \cdots + m_k = k$. Cet ensemble paramétrise les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_k$ *via* les diagrammes de Young . Soit $\chi^{\mathbf{m}}$ le caractère de la représentation correspondante à $\mathbf{m}$. Comme $\chi^{\mathbf{m}}$ est constant sur les classes, nous notons sa valeur sur π par $\chi^{\mathbf{m}}(\mathbf{i})$ lorsque $\mathbf{i}$ est le portrait de π.

Si pour π in $\mathcal{S}_k$ nous avons

$$f(\pi) = (-1)^k(-q)^{m(\pi)} = \sum_{\mathbf{m}\in M_k} f_{\mathbf{m}}\chi^{\mathbf{m}}(\mathbf{i})$$

alors la formule recherchée s'écrit de la façon suivante.

Théorème.

$$\mathbb{E}(r_\pi(S^{-1})(h_1, \ldots, h_k)) = \sum_{\pi'\in\mathcal{S}_k} f^{(-1)}(\pi'^{-1} \circ \pi) r_{\pi'}(\sigma^{-1})(h_1, \ldots, h_k)$$

avec

$$f^{(-1)}(\pi) = \sum_{\mathbf{m}\in M_k} \frac{d_{\mathbf{m}}^2}{k!^2 f_{\mathbf{m}}} \chi^{\mathbf{m}}(\pi).$$

Afin de déterminer les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ un argument simple des algèbres de Jordan peut être utilisé. C'est ainsi que nous avons découvert la formule suivante.

Théorème.

$$f_{\mathbf{m}} = \frac{d_{\mathbf{m}}}{k!} \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{m_j} (q + j - i).$$

Il existe aussi une preuve "élémentaire" de cette formule, utilisant les identités sur les polynômes de Schur et leurs relatifs.

En utilisant ces résultats, les moments inverses des lois de Wishart peuvent être calculés en se servant des tables de caractères de $\mathcal{S}_k$. Dans notre travail ça était fait "à la main" pour les moments de l'ordre $k \leq 4$ et à l'aide de Maple jusqu'à $k = 9$.

7 La formule de produit ([14,17])

Comme c'est indiqué dans la Section 2, l'approche naturelle de la conjecture y posée sur la caractérisation des mesures gaussiennes sur $X = G/K$, un espace symétrique de type non-compact, comme la classe I_o, mène par une formule de produit pour les fonctions sphériques

$$\phi_\lambda(e^X)\,\phi_\lambda(e^Y) = \int_{\mathfrak{a}} \phi_\lambda(e^H)\,d\mu_{X,Y}(H), \qquad X, Y \in \mathfrak{a}. \tag{1}$$

La formule (1) a été démontrée par Helgason qui pose le problème d'étudier les propriétés de la mesure $\mu_{X,Y}$ du point de vue purement analytique.

Nous avons démontré dans [17] le théorème suivant.

Théorème. *Si $X, Y \in \mathfrak{a}^+$ alors il existe une fonction $k_{X,Y}(H) \in L^1(\mathfrak{a})$ telle que*

$$\phi_\lambda(e^X)\,\phi_\lambda(e^Y) = \int_{\mathfrak{a}} \phi_\lambda(e^H)\,k_{X,Y}(H)dH \tag{2}$$

pour toutes les fonctions sphériques ϕ_λ.

Le point de départ de la preuve de notre formule de produit est le fait que

$$\int_K f(e^X\,k\,e^Y)\,dk = \int_{\mathfrak{a}} f(e^H)\,d\mu_{X,Y}(H)$$

pour toutes les fonctions continues f qui sont K-biinvariantes sur G.

Soit θ l'involution de Cartan sur G.

Soit $G' = \{g \in G\colon\ \mathrm{Ad}(\theta(g)^{-1})\,\mathrm{Ad}(g)$ a $1 + 2\,|\Sigma^+|$ valeurs propres distinctes$\}$.

Un argument délicat basé sur le prolongement analytique ainsi que sur l'étude du rang des applications analytiques polynomiales justifie la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit l'application $g \to a(g) \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ définie par la décomposition de Cartan $g = k_1 a(g) k_2$. Soit $F(k) = a(e^X\,k\,e^Y)$. Afin de montrer que la mesure $\mu_{X,Y}$ dans la formule (1) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}$ il suffit de montrer que la différentielle de l'application F est surjective en au moins un point $k_o \in K' = \{k \in K\colon\ e^X\,k\,e^Y \in G'\}$.*

Un travail laborieux basé sur une réduction au rang 1 est ensuite effectué pour calculer un développement limité de l'application F en e. Nous montrons

Proposition 2. *Soit $H_\alpha = [X_\alpha, \theta(X_\alpha)]$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines simples positives et $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_r}$ des vecteurs radiciels associés. Il existe des constantes $S_1 > 0, \ldots, S_r > 0$ telles que*

$$a(e^X\,e^{t_1\,(X_{\alpha_1}+\theta(X_{\alpha_1}))+\ldots+t_r\,(X_{\alpha_r}+\theta(X_{\alpha_r}))}\,e^Y) = X + Y + \sum_{i=1}^{r} S_i\,H_{\alpha_i}\,t_i^2 + O(\|\mathbf{t}\|^3).$$

Il en découle maintenant facilement que la condition de la Proposition 1 est vérifiée pour

$$k_o = e^{t_1\,(X_{\alpha_1}+\theta(X_{\alpha_1}))+\ldots+t_r\,(X_{\alpha_r}+\theta(X_{\alpha_r}))}$$

pour certains $t_1, ..., t_r$ proches de 0. La démonstration de la formule de produit (2) est ainsi achévée.

Les propriétés de la densité $k_{X,Y}$, en particulier son support (égal à l'image $a(e^X K e^Y)$ du groupe K et dont on sait seulement qu'il est contenu dans $C(X) + C(Y)$) seront étudiées dans des articles ultérieurs, ainsi que les applications à la conjecture probabiliste de la Section 2.

Nous avons déjà commencé ce travail dans l'article [14], dans le cas où G est un groupe complexe. En utilisant la formule explicite pour les fonctions sphériques nous y montrons la relation suivante entre la densité $k_{X,Y}(H) = k(H, X, Y)$ et le noyau $K(X, H)$ de la transformée d'Abel:

Théorème.

$$k(H, X, Y) = \frac{1}{\delta^{1/2}(H)\,\delta^{1/2}(Y)} \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, K(X, w \cdot H - Y).$$

où $\delta^{1/2}(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \sinh \alpha(H)$.

Dans l'article [6] nous avons démontré la formule suivante pour le noyau de la transformée d'Abel dans le cas complexe.

Théorème.

$$K(X, H) = \frac{\pi(\rho)}{\delta^{1/2}(X)} \sum_{w \in W} \epsilon(w)\, T(w\, X - H).$$

où la fonction continue T a été définie dans [6] et [14].

Il en découle une autre formule pour le noyau de la formule de produit:

Théorème.

$$k(H, X, Y) = \frac{\pi(\rho)}{|W|} \frac{1}{\delta^{1/2}(H)\,\delta^{1/2}(X)\,\delta^{1/2}(Y)} \sum_{v, w \in W} \epsilon(v)\, \epsilon(w)\, T(v\, X + w\, Y - H).$$

On en déduit que la fonction $H \to k(H, X, Y)$ est continue sur $\mathfrak{a}^+$ lorsque $X, Y \in \mathfrak{a}^+$ ainsi que d'autres propriétés de ce noyau. En ce qui concerne le support de $k(\cdot, X, Y)$ nous montrons que dans le cas complexe il est contenu dans l'ensemble

$$(\cup_{w \in W}\, w \cdot (C(X) + Y)) \cap (\cup_{w \in W}\, w \cdot (C(Y) + X)) \subset C(X) + C(Y).$$

Nous donnons une description précise de ce support dans le cas $SL(3, \mathbf{C})/SU(3)$.

8 Analyse sur les espaces symétriques non-riemanniens([7,8])

L'article [7] présente les espaces symétriques de type hermitien $X = G/H$ d'un point de vue géométrique, différent de l'approche de Hilgert, 'Olafsson et Ørsted. Ces auteurs ont montré l'existence des espaces de Hardy sur certains domaines de Stein $\Xi \subset X^{\mathbf{C}} = G^C/H^C$. Nous discutons ensuite la série discrète holomorphe relative de G/H. La version finale de ce travail est en préparation actuellement.

Dans l'article [8] nous démontrons par un calcul direct une formule explicite pour la fonction c sur les espaces symétriques ordonnés $SL(n, \mathbf{R})/SO(p, q)$. Cette formule, exprimant la fonction c par un produit des fonctions beta, a été conjecturée par Faraut. Notre résultat était un pas important dans le travail sur cette conjecture. Elle était démontrée en toute généralité récemment par Krötz et 'Olafsson.

9 Références

J.-Ph. Anker, L. Ji, Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces, *Geom. Funct. Anal. (GAFA)* **9**, no. 6 (1999), 1035-1091.

M. Babillot, A probabilistic approach to heat diffusion on symmetric spaces, *J. Theor. Prob.* **7**(1994), 599-607.

S. G. Dani and M. McCrudden, Factors, roots and embeddability of measures on Lie groups, *Mathematische Zeitschrift* **199**(1988), 369-385.

S. G. Dani and C. R. E. Raja, Asymptotics of measures under group automorphisms and an application to factor set, Proceedings of (1996) International Colloquium on Lie Groups and Ergodic Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Narosa Publishers, New Delhi, India, (1998), 59-73.

J. Faraut, Fonctions sphériques sur un espace symétrique de type Cayley, *Contemporary Mathematics* **191**(1995), 41-55.

G. M. Feldman, Arithematic of probabiity distributions and characterization problems on abelian groups, Translations of Mathematical Monographs, 116, American Mathematical Society, Providence RI, (1993).

G. M. Feldman, More on the Skitovich-Darmois theorem for finite Abelian groups(1999), à paraître.

M. Flensted-Jensen and T. Koornwinder, The convolution structure for Jacobi expansions, *Ark. Mat.* **10**(1973), 245–262.

P. Glowacki, Stable semi-groups of measures as commutative approximate identities on non-graded homogeneous groups, *Invent. Math.* **83**(1986), 557-582.

Y. Guivarc'h, A. Raugi, Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, *Z.Wahr. verw. Gebiete* **69**(1985), 187-242.

S. Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press, New York, 1984.

S. Helgason, Geometric analysis on symmetric spaces, Mathematical surveys and monographs, Vol. 39, American Mathematical Society, 1994.

J. Hilgert ,G.'Olafsson , B.Ørsted (1991), Hardy spaces on affine symmetric spaces,*J.Reine und Angew.Math.* **415**, 189-218.

D.G. Kendall, Delphic Semi-Groups, Infinitely Divisible Regenerative Phenomena, and the Arithmetic of p-Functions, *Z. Wahr. verw. Geb.* **9** (1968), 163-195.

B. Krötz, G. 'Olafsson, The c-function for non-compactly causal symmetric spaces(2000), à paraître.

G. Letac, Problèmes classiques de probabilité sur un couple de Gelfand, Analytical methods in probability theory (Oberwolfach, 1980), Lecture Notes in Math. 861, Springer, Berlin-New York, (1981) pp. 93-120.

J. Marcinkiewicz, Sur les variables alétoires enroulées, C. R. Séances et Conf. SMF 1938 (1939), 34-36.

D. Neuenschwander, Gauss measures in the sense of Bernstein on the Heisenberg group, *Probability and Math. Stat.* **14** (1993), 253-256.

A. Raugi, Fonctions harmoniques sur les gropues localement compacts à base dénombrable, *Bull. Soc. Math. France Mém.* **54**(1977), 5-118.

D.St.P. Richards, The central limit theorem on spaces of positive definite matrices, *J.Multivariate Anal.* **29**(1989), 326-332.

I. Z. Ruzsa and G. J. Szekely, *Algebraic Probability Theory*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics,
John Wiley and Sons (1988).

P. Sawyer, The central limit theorem on $\mathbf{SO}_0(p,q)/\mathbf{SO}(p)\times\mathbf{SO}(q)$ to appear in *J. Theor. Prob.*(2000).

A. Terras, Noneuclidean harmonic analysis, the central limit theorem and long transmission lines with random inhomogeneities, *J.Multivariate Anal.* **15**(1984), 261-276.

I.P. Trukhina, Arithmetic of spherically symmetric measures on Lobatchevsky space(in Russian), *Teor. Fun'kcii,Funkc.Anal.Pril.* **34**(1980)

I.P. Trukhina, A problem related to the arithmetic of probability measures on the sphere, *J. Soviet.Math.* **17** (1981), 2321-2333.

G. Zhang, The Asymptotics of Spherical Functions and the Central Limit Theorem on Symmetric Cones, *Ann. Inst. Fourier*, **45**(1995), 565-575.