TD 4 : Sup, inf, Max, Min. Convergence des suites

Exercice 1 : $\max, \min, \sup, \inf$
Les ensembles suivants sont-ils bornés ? bornés d'un côté ?
Trouver, si possible, leurs max, min, sup, inf.

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} |\ \sin x < 0 < x\} \quad A_2 = \mathbb{R}^+ \setminus A_1 \quad A_3 = \mathbb{R} \setminus A_1$$
$$B = \sin(]-\pi, \pi[) \quad C = \{2^p |\ p \in \mathbb{Z}\} \quad D = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 - 7x + 10 < 0\}$$
$$E = \mathbb{R} \setminus D \quad F = \{\tfrac{(-1)^n}{n} |\ n \in \mathbb{N}^*\} \quad G = \{\tfrac{1}{n} + n |\ n \in N^*\}$$

Exercice 2 : définition avec ε d'un sup et inf
Démontrer que $\sup]0, 1[= 1$ et que $\inf]0, 1[= 0$.

Exercice 3 : (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

(a) Soit $a < b$. Montrer que l'intervalle $]a, b[$ contient un nombre rationnel.

(b) Déterminer sup et inf de l'ensemble $\mathbb{Q} \cap] - \sqrt{2}, \sqrt{3}[$.

Exercice 4 : somme arithmétique d'ensembles
Si $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, on définit $A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$.

1. Déterminer $]0, 2[+]1, 4[$ et $]0, 2[+[1, 4]$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
3. Montrer que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Exercice 5 : Les suites suivantes sont-elles :

1. monotones ou monotones à partir d'un certain rang ?
2. bornées ?
3. convergentes ?

Suites géométriques : $a_n = 100^n, \quad 1/2^n, \quad (-1/2)^n, \quad (-1)^n, \quad (-2)^n, \quad q^n \ (q \in \mathbb{R})$
$b_n = \dfrac{n}{n+1}$, $c_n = \sqrt[n]{2}$, $d_n = \dfrac{100^n}{n!}$, $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$, $t_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$

Exercice 6 : Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Est-ce que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$ entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$? (Considérer $(-1)^n$.)

Exercice 7 :

1. À l'aide de la définition, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3 + 2n^2}{n^2 + 1} = 2$.
2. Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. En déduire la limite de la suite $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 8 : Soit $q \in \mathbb{C}$ (un nombre complexe) tel que $|q| < 1$.

1. Montrer, en utilisant le théorème de la limite monotone, que $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

3. Calculer la somme de la série géométrique infinie de raison q, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+q+\ldots+q^n)$.
4. Etudier la convergence des suites $\quad a_n = \dfrac{(1+i)^{4n}}{(1+i\sqrt{3})^{4n}}$ et $b_n = \dfrac{(1+i)^{8n}}{(1+i\sqrt{3})^{4n}}$.

Exercice 9 : Etudier la convergence des suites suivantes et calculer les limites si les suites convergent.

$$a_n = 4+\frac{96}{n^3} \quad b_n = \frac{-5n^7+6n^3+1}{4n^7+2n^2+1/n} \quad c_n = \frac{n^3+3n^2-3}{5n^4-2} \quad d_n = \frac{2n^4-9n^2}{9n^3+9} \quad e_n = \frac{2^n+3^n}{4^n}$$

$$f_n = \frac{2^n+3^n}{2^{n-1}+3^{n+1}},\ g_n = 5^n+4(-1)^n,\ h_n = \frac{1}{3^n}+(-2)^n,\ i_n = \frac{2^{2n}}{4^n+7},$$

$$j_n = 6^n 2^{-2n},\ k_n = (-1)^n+(-1)^{n+1},\ l_n = 7^n-6^n-5^n, m_n = \frac{2n^2+\sin n!}{4n^2-3\cos n^2},$$

$$o_n = \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!},\ p_n = \sqrt{n+3}-\sqrt{n},\ r_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{2n^2+3}},\ s_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}$$

Exercice 10 : Racine n-ième

(a) Soit $a>0$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$.
(Montrer que la suite $\sqrt[n]{a}$ est, pour $a>1$, décroissante et minorée par 1, donc convergente vers $\ell\geq 1$, puis prouver par l'absurde que $\ell=1$.)

(b) Calculer la limite de la suite $b_n = \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$.

Exercice 11 : Soit (u_n) une suite à termes $u_n>0$, $n\in\mathbb{N}$.

(a) Démontrer le critère de convergence (Q) suivant :
(Q) S'il existe $q\in]0,1[$ et un entier n_0 tels que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq q$ pour tout $n\geq n_0$, alors $\lim u_n=0$.

(b) Soit $a>1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}$.

(c) Pour $a>1$ et $k\in\mathbb{N}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k/a^n$. Conclure que *la fonction exponentielle "l'emporte" (préciser ce terme) sur la fonction puissance.*

(d) Montrer que si $a>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n!/a^{n^2}=0$.

(e) Calculer les limites des suites suivantes.

$$a_n = \frac{2016^{5n}}{n!} \qquad b_n = \frac{2016n^{2016!}}{1,1^n} \qquad c_n = \frac{n^{2016}}{n!} \qquad d_n = \frac{2016^{n^2}}{n!}$$

Exercice 12 : Montrer que les suites $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n+\dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.

Exercice 13 : Base e de l'exponentielle

(a) Montrer que les suites $\quad t_n = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!} \quad$ et $\quad T_n = t_n+\dfrac{1}{n!} \quad$ sont adjacentes.
Sans preuve : leur limite commune est le nombre $e = 2,718281828459045\ldots$.
(Ceci peut servir de *définition* de ce nombre e.)

(b) Montrer que e est irrationnel.
(Raisonner par l'absurde, encadrer $e=p/q$ par t_q et T_q, multiplier par $q!$, …)