# TD 3: Applications injectives, surjectives, bijectives

**Exercice 1 : (Applications entre les ensembles finis)**

1. Dans un groupe de L1 de l'Université d'Angers il y a 35 étudiants. Dans une salle de TD, il y a 40 chaises numérotées. De combien de façons peuvent prendre place les 35 étudiants ?
   Appelons $E$ l'ensemble de 35 étudiants et $C$ l'ensemble de 40 chaises numérotées. Quelles applications entre ces deux ensembles dénombre-t-on dans la question 1 ?
2. Soit $K$ et $N$ deux ensembles **finis**, qui ont, respectivement $k$ et $n$ éléments. Sous quelle condition existe-t-il des injections de $K$ vers $N$ ? Combien y en a-t-il ?
3. Combien il y a d'applications de $K$ vers $N$ ?
4. Soit $K$ et $N$ deux ensembles **finis**, qui ont, respectivement $k$ et $n$ éléments. Sous quelle condition existe-t-il des bijections de $K$ sur $N$ ? Combien y en a-t-il ?

**Exercice 2 :** Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
Donner la fonction réciproque de celles qui sont bijectives.

1. $f_1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, définie par $f_1(x) = x^2$
2. $f_2$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, définie par $f_2(x) = x^2$
3. $f_3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f_3(x) = x^2$
4. $f_4$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, définie par $f_4(x) = x^2$
5. $g_1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, définie par $g_1(x) = x + 1$
6. $g_2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, définie par $g_1(x) = x + 1$
7. $g_3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $g_3(x) = x + 1$
8. $h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$, définie par $h(x) = E(x)$, la partie entière de $x$.
9. $k$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, définie par $k(x) = -x$
10. $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha(x, y) = (x + y, x - y)$.
11. $\beta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ définie par $z \mapsto \dfrac{1}{z}$

**Exercice 3 :** Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f$ une application de $E$ dans $F$. Soient $A \subseteq E$, $B \subseteq F$. Dans l'exercice TD2/9 on a vu que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
Montrer que

1. Si $f$ est injective, alors $f^{-1}(f(A)) = A$.
2. Si $f$ est surjective, alors $f(f^{-1}(B)) = B$.

**Exercice 4 :** Soit $f : E \to F$ une injection. Soient $A, A' \subseteq E$. Montrer que $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

**Exercice 5 :** Soient trois ensembles $A$, $B$ et $C$ et deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Montrer que

1. Si $f$ et $g$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
2. Si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective.
3. Si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective.

**Exercice 6 :**

1. Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone est injective.
2. Montrer qu'une bijection strictement monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et sa réciproque $f^{-1}$ ont même sens de variation sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 7 :** Un ensemble $E$ est dit **dénombrable** s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E$. Montrer que les ensembles suivants sont dénombrables :

1. $\mathbb{N} \cup \{-1\}$.
2. $\{n \in \mathbb{N} |\ n \geq 2\}$
3. $2\mathbb{N}$ (les entiers positifs pairs)
4. $\mathbb{Z}$
5. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
6. $\mathbb{Q}$ (d'abord on montrera que $\mathbb{Q}^+$ est dénombrable)

**Exercice 8 :** À l'hôtel Cantor, il y a un nombre infini de chambres à 1 personne, numérotées $1, 2, 3, \dots\dots\dots$ L'hôtel est complet, toutes les chambres sont occupées. La direction peut demander aux clients de changer de chambre.

1. Peut-on loger dans cet hôtel une personne supplémentaire ?
2. Chaque client qui a déjà une chambre demande une chambre supplémentaire pour un(e) ami(e). Est-ce possible ?

**Exercice 9 :** Indiquez une bijection entre l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$ (pensez aux fonctions trigonométriques).

Quand il existe une bijection entre deux ensembles $E$ et $F$ on dit que $E$ et $F$ ont le même **cardinal**. On a donc montré que le cardinal de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est égal au cardinal de $\mathbb{R}$.

**Exercice 10 :** Montrer que $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(]0,1[) = \mathrm{card}([0,1[)$, c'est-à-dire, qu'il existe des bijections entre $\mathbb{R}$, $]0,1[$ et $[0,1[$.

**Exercice 11 :** On dit que $\mathrm{card}(E) \leq \mathrm{card}(F)$ quand il existe une injection de $E$ dans $F$. Montrer que $\mathrm{card}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

*(Pour information) Théorème de Cantor :* $\mathrm{card}(\mathbb{N}) \neq \mathrm{card}(]0,1[)$, *c'est-à-dire il n'existe pas de bijection entre* $\mathbb{N}$ *et* $]0,1[$.

*Dans la preuve (par l'absurde) de ce Théorème on utilise les développements décimaux de* $x \in ]0,1[$ *et le célèbre argument diagonal de Cantor. On a besoin de la propriété suivante des développements décimaux :*

**Exercice 12 :** Le développement décimal d'un nombre $x \in ]0,1[$ est-il unique ? Déterminer les cas ou il n'est pas unique.