TD 2 : Théorie des ensembles

Exercice 1 : Soit $E := \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2 + 1\}$. Montrer par double inclusion que $E = [1; +\infty[$.

Exercice 2 : Réécrire de façon simplifiée $[-2; 7] \cup [7; 12[$, $]-\infty; -5[\cap [-10; -7]$ et $[4; 12[^{\mathrm{c}}$.

Exercice 3 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Montrer que $A \cap B \subseteq A$ et que $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Exercice 4 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Montrer que $(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$ et que $(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$.

Exercice 5 : Dessiner dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormé les ensembles suivants.

1. $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x < 0 \text{ et } 2x - 3y \geq 0\big\}$.
2. $B = \mathbb{R} \times \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 6 : Soient les intervalles de $\mathbb{R}$ suivants : $I = [0, 3]$, $J = [0, 4]$, $K = [1, 4]$, $L = [1, 5]$.

1. Décrire en compréhension $I \times J$ et $K \times L$. Faire un dessin dans le plan muni d'un repère.
2. Montrer que $(I \times J) \cap (K \times L) = (I \cap K) \times (J \cap L)$. Généraliser à I, J, K, L quelconques.
3. L'égalité ci-dessus reste-t-elle valable si l'on remplace les intersections par des réunions ?

Exercice 7 : Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$. (Pour le dernier cas, on note $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.)

-1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^2$, $A =]-3, 5]$, $B = [-5, 4[$.

0. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction "partie entière", càd $f(x) =$ le plus grand entier au plus égal à x, $A = [-1, 3[$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ et $A = [-1; 3] = B$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \sin x$ et $A = [0; \pi] = B$.

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (2x + 4y, 5x + 10y)$ et $A = \{(0, 0)\} = B$.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x, -y)$ et $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\} = B$.

5.* $f : \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par : $\forall \varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(\varphi) : x \mapsto -x\varphi(x)$ et $A = \{f_0 : x \mapsto 0\} = B$.

Exercice 8 : Pour chacune des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et parties A de $\mathbb{C}$ suivantes, déterminer le domaine de définition de f, puis l'image directe $f(A)$ de A par f.

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$; d'abord $A = \mathbb{R}$, ensuite $A = C(O, r)$ cercle de rayon r centré à l'origine O, et enfin $A = D(O, r)$ disque de rayon r centré en O.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$; $A = \mathbb{R}$; $A = \mathbb{R}_+$, $A = C(O, r)$, $A = D(O, r)$.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 1/\overline{z}$; $A = C(O, r)$, $A = D(O, r)$, $A = \{z \in \mathbb{C} : \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = 1 + e^{i\theta}\}$ (on notera que $1 + e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$).

Exercice 9 : Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soient $A \subseteq E$, $B \subseteq F$.

Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, puis donner des exemples où ces inclusions sont strictes.

Exercice 10 : Soit $f : E \to F$ une application. Soient $A, A' \subseteq E$ et $B, B' \subseteq F$. Montrer que :

1. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ – y a-t-il une formule analogue pour $f(A \cap A')$?
2. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
3. $f^{-1}(B \cup B')$?

Exercice 11 : Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ pour les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f : x \mapsto \ln(x+1)$ et $g : x \mapsto x^2$. Quels sont leurs ensembles de définition ? A-t-on $f \circ g = g \circ f$? Même question avec $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$ et $g : x \mapsto e^x$.

Exercice 12 :

1. De combien de manières différentes peut-on répartir 6 personnes sur 6 chaises ? Et sur 7 chaises ?
2. Soit $C = \{1; 2; 3; 4\}$ un ensemble de chiffres. Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former avec le 4 apparaissant au moins une fois ?
3. Une course de chevaux comporte 20 participants. Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre possibles ?
4. On tire au hasard 6 boules parmi 49 boules, numérotées de 1 à 49. Si l'on effectue des tirages simultanés sans remise, combien y a-t-il de possibilités ? *Application :* Quelle est la probabilité de gagner le loto dans le désordre ? Et dans l'ordre ?
5. Une *diagonale* d'un polygone est une droite qui joint deux sommets non adjacents. Quel est le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés ? Quel polygone a autant de diagonales que de côtés ?
6. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots TABLE et BARBIE.

Exercice 13 :

1. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
2. Un QCM autorisant une seule réponse par question comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?
3. Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre, dit "code", de 3 chiffres distincts ou non. Combien de codes différents peut-on former ? Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
4. De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in \{0; \ldots; n\}$ on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{0; \ldots; n\}$ on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Cette relation permet de construire le *triangle de Pascal*.
3. Montrer par récurrence sur n la *formule du binôme de Newton* :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

   Comment pouvait-on la prouver par un argument de dénombrement ?

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. En déduire que si E est un ensemble de cardinal n, alors $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.