TD 1: Raisonnements mathématiques

Exercice 1 : Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas nulle.
3. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas.
4. Tout nombre entier est multiple de 4.
5. Pour tout point P du plan, P est sur un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$ si et seulement si la distance de Ω à P vaut r. *Indication :* Vous introduirez des notations.

Exercice 2 : Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes, puis indiquer si elles sont vraies ou fausses.

1. Tout entier relatif possède une racine carrée.
2. Tout entier naturel possède une racine carrée.
3. Tout entier naturel possède une racine carrée entière.
4. Aucun réel n'est inférieur à son carré.
5. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ admet un majorant.
6. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient un maximum.

Exercice 3 : Soient les assertions A et B suivantes :

$$A : \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y < x$$

$$B : \exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ y < x.$$

Les assertions A et B sont-elles synonymes ? Sont-elles vraies ou fausses ? Même question avec

$$A : \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ xy = 1$$

$$B : \exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xy = 1.$$

Exercice 4 : On note P l'ensemble des portes de la Faculté des sciences et C l'ensemble des clés dont dispose l'administration. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux puis écrire sa négation.

1. $\forall p \in P$, $\exists c \in C$ tel que c ouvre p.
2. $\exists c \in C$ tel que $\forall p \in P$, c ouvre p.

Exercice 5 : Écrire la négation des assertions suivantes.

1. Il existe un triangle qui ne possède pas d'angle droit.
2. Il fait toujours beau dans le sud.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x+3>0$ et $x-1<0$.
4. S'il pleut, je prends un parapluie.
5. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x-3y>0$.
6. À chaque campagne présidentielle, il y a au moins un menteur parmi les candidats.
7. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow e^x \leq e^y)$.
8. Certaines années, le PSG rachète tous les bons joueurs du championnat de France.
9. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y=xy$.
10. $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x \geq 0,\ (0<|x-3|<\delta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{3}|<\varepsilon)$.

Exercice 6 : En utilisant un raisonnement par contraposition, montrer que les assertions suivantes sont vraies.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $\forall \varepsilon>0,\ |a| \leq \varepsilon$ alors $a=0$
2. $\forall a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}^+, (a_1+\cdots+a_N>M \Rightarrow \max\{a_1, \ldots, a_N\}>\frac{M}{N})$, où $\max\{a_1, \ldots, a_N\}$ désigne le plus grand des nombres réels a_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$.
3. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Si x^2 n'est pas multiple de 16, alors $x/2$ n'est pas un entier pair.

Exercice 7 : Montrer que pour tous réels a et b on a $\max(a,b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

Exercice 8 : En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que les assertions suivantes sont vraies.

1. **Principe des tiroirs.** Soit $n \geq 1$. Si l'on range $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, alors il existe au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ n$ est premier $\Rightarrow$ (n est impair ou $n=2$). *Indication* : on rappelle qu'un *nombre premier* est un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ qui admet exactement deux diviseurs (distincts), à savoir 1 et lui-même.
3. $\sqrt{5}$ est irrationnel.

Exercice 9 : En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que les assertions suivantes sont vraies.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1+nx$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = 1+4+9+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
4. Tout entier naturel $n \geq 2$ possède un diviseur premier, c'est-à-dire $\exists p$ premier et $m \in \mathbb{N}$ tels que $n=pm$.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer la somme alternée des n premiers entiers :

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k = 1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1} n.$$

1. En calculant s_n pour n allant de 2 à 6, proposer une formule générale pour s_{2n-1} et pour s_{2n}.
2. Démontrer la formule obtenue pour s_{2n} par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la formule pour s_{2n-1}.

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer la somme alternée des carrés des n premiers entiers :

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n^2.$$

1. Chercher une formule générale pour s_{2n}. *Indication :* regrouper 2 par 2 les termes de s_{2n} puis utiliser une identité remarquable.
2. Démontrer la formule obtenue pour s_{2n} par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la formule pour s_{2n-1}.

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse maintenant à la somme alternée des cubes des n premiers entiers :

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^3 = 1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + (-1)^{n+1} n^3.$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_{2n} = -n^2(4n+3)$.
2. En déduire la formule pour s_{2n-1}.

Exercice 13 : Le raisonnement suivant est erroné :

> Montrons par récurrence l'assertion :
> $\mathcal{P}(n)$ = « n points deux à deux distincts quelconques du plan sont toujours alignés. » ($n \geq 2$)
>
> — *Initialisation.* Pour $n = 2$, la propriété est vraie.
>
> — *Hérédité.* Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$ et montrons-la au rang $n+1$.
> Considérons alors $n+1$ points deux à deux distincts $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$.
> D'après l'hypothèse de récurrence, les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}$.
> De même, les points $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}'$.
> Or $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent les deux points distincts A_2 et A_n donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
> Par suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur la droite $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
>
> — *Conclusion.* Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Où est l'erreur ?

— Fin —