TD 5: Applications des suites
Equations récurrentes linéaires d'ordre 1

Exercice 1 : On suppose que la population d'Angers croît annuellement suivant le même pourcentage de 1%. En 2016 la population d'Angers est de 200 000 habitants. Déterminer la population p_n en année $n \geq 2016$. Etudier la convergence de la suite p_n.

Exercice 2 : *Intêrêts composés.* Un placement C à intérêts composés, à taux annuel i, produit au bout d'un an un intérêt $I_1 = Ci$ qui est capitalisé à la fin de l'année de telle sorte que durant la seconde année, l'intérêt produit $I_2 = (C + I_1)i$. Calculer la valeur acquise v_n par le capital après n années. Déterminer la nature de la suite v_n et $\lim_n v_n$.
Soit $i = 5\%$ et $C = 1000E$. Quelle sera la valeur du placement après 10 ans ?

Exercice 3 : *Intêrêts simples.* Un placement C à intérêts simples, à taux annuel i, produit au bout d'un an un intérêt $I_1 = Ci$ qui n'est pas capitalisé à la fin de l'année de telle sorte que la seconde année l'intérêt produit $I_2 = I_1$. Calculer la valeur acquise V_n par le capital après n années. Déterminer la nature de la suite V_n et $\lim_n V_n$.
Soit $i = 5\%$ et $C = 1000E$. Quelle sera la valeur du placement après 10 ans ?

Exercice 4 : Anne place 5000E à intêrets simples à 12% par an et Blandine la somme de 5000E à intêrets composés à 12% par an. Qui gagnera plus au bout de : (i) 1 an (ii) 3 ans (iii) n ans
(iv) Soit a_n la valeur acquise par le capital d'Anne après n années et b_n la valeur acquise par le capital de Blandine après n années. Calculer la limite $\lim_n \frac{a_n}{b_n}$.
(v) Est-ce que le capital de Blandine sera un jour 2 fois plus grand que le capital d'Anne ? 100 fois plus grand ?

Exercice 5 : *Versements.* Les parents d'Agatha qui fait ses études à Paris lui versent 1000E par mois depuis septembre 2016 et augmentent cette somme de 20E chaque mois. Combien verseront-ils à Agatha pendant 8 ans de ses études ?

Exercice 6 : *Intêrêts annuels et mensuels.* Les banques françaises appliquent les intérêts composés, dont le taux est annoncé sur un an, p.ex. $i_a = 12\%$. Quel taux d'intéret mensuel i_m correspond à i_a ? Est-ce que $i_m = i_a/12$?

Exercice 7 : *Epargne.* On désigne par *annuités constantes* a une suite de règlements identiques, effectués à intervalles égaux. Elles servent soit à la constitution, soit au remboursement d'un capital.
Agatha établit son épargne en versant a=100E au début de chaque mois, à partir du 1er sept.2016. Quelle somme aura-t-elle sur son compte après $n = 36$ versements, au moment du dernier versement, si le taux mensuel d'épargne appliqué s'élève à $i = 0.25\%$?

Exercice 8 : *Remboursement d'un prêt.* Soit C la somme empruntée à une banque à un taux d'intérêt mensuel i, remboursée pendant n mois, en versant à la banque chaque mois une somme constante égale à a_n Euros. La durée du prêt est de n mois. Justifier la formule reliant C, i, a_n et n :

$$C(1+i)^n = a_n \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (1)$$

(a) Pour acheter une nouvelle automobile, Yann emprunte C=15000E à sa banque, au taux annuel de 8.5%, remboursable par mensualités constantes.
(a1) Montrer que le taux mensuel équivalent au taux annuel de 8.5% est égal à 0.68215%.
(a2) Calculer la mensualité a_n à payer par Yann pour rembourser le prêt pendant 15 ans.
(a3) Calculer le coût $c_n = na_n - C$ du prêt de Yann.

(b) Calculer la limite de la suite des mensualités $\lim_n a_n$. Peut-on rembourser 1 Euro par mois ?
(c) Soit $c_n = na_n - C$ la suite du coût c_n du prêt remboursé pendant n mois. Calculer $\lim_n c_n$.
Est-il intéressant de prendre un prêt de très longue durée ?

Exercice 9 : Déterminer la solution générale des équations de récurrence d'ordre 1 suivantes :
(a) $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$
(b) $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3n^2$
(c) $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 + 3n^2$
(d) dans les 3 cas donner la solution des équations avec $u_0 = 1$.

Exercice 10 : On suppose que la consommation C_n dépend du revenu national avec un retard d'un an et une propension à consommer de 0.6, soit

$$C_n = 0,6Y_{n-1}.$$

(a) On suppose un investissement constant $I_n = 50$ MEuros. Sachant que $Y_n = C_n + I_n$, exprimer Y_{n+1} en fonction de Y_n. Résoudre l'équation de récurrence ainsi obtenue. Donner la solution correspondant à la condition initiale $Y_0 = 100$MEuros . Représenter graphiquement cette solution.
(b) Refaire le calcul en supposant l'investissement croissant de 0.5 MEuros chaque année

$$I_n = 50 + 0.5n.$$

(c) Refaire le calcul en supposant l'investissement croissant de 1% chaque année

$$I_n = 50(1 + 0,01)^n.$$

Exercice 11 : Soit Y_n le revenu national d'un pays étudié à partir de l'an 2000, où il s'élevait à $Y_0 = 1000$ MEuros. La consommation C_n dépend du revenu national Y_{n-1} avec un retard d'un an et une propension à consommer de 0.8, soit $C_n = 0,8Y_{n-1}$. On suppose un investissement croissant de 10% chaque année $I_n = 1.1I_{n-1}$ avec $I_0 = 100$ MEuros.
1. Sachant que $Y_n = C_n + I_n$, exprimer Y_{n+1} en fonction de Y_n.
2. Résoudre l'équation de récurrence ainsi obtenue.
3. Calculer $\lim_n Y_n$.