# Structures réelles sur les éclatés de $\mathbb{P}^2$

Mohamed Benzerga

Université d'Angers - LAREMA

Rencontres doctorales Lebesgue
28 octobre 2015

1. Variétés projectives
   - Espace projectif $\mathbb{P}^n$
   - Variétés réelles et complexes
2. Éclatés de $\mathbb{P}^2$
   - Éclatements
   - Groupe de Picard
3. Structures réelles
   - Généralités
   - Les résultats
   - Perspectives et questions

1 Variétés projectives
- Espace projectif $\mathbb{P}^n$
- Variétés réelles et complexes

2 Éclatés de $\mathbb{P}^2$
- Éclatements
- Groupe de Picard

3 Structures réelles
- Généralités
- Les résultats
- Perspectives et questions

# Espace projectif

## Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'**espace projectif** $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation de colinéarité.

# Espace projectif

## Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'**espace projectif** $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation de colinéarité.
Autrement dit :

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/ \sim$$
$$\text{avec } x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = \lambda x$$

# Espace projectif

## Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'**espace projectif** $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation de colinéarité.
Autrement dit :

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$
$$\text{avec } x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = \lambda x$$

## Remarque

L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est aussi l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^{n+1}$.

# Espace projectif

## Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'**espace projectif** $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation de colinéarité.
Autrement dit :

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$$
$$\text{avec } x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = \lambda x$$

## Remarque

L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est aussi l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^{n+1}$.

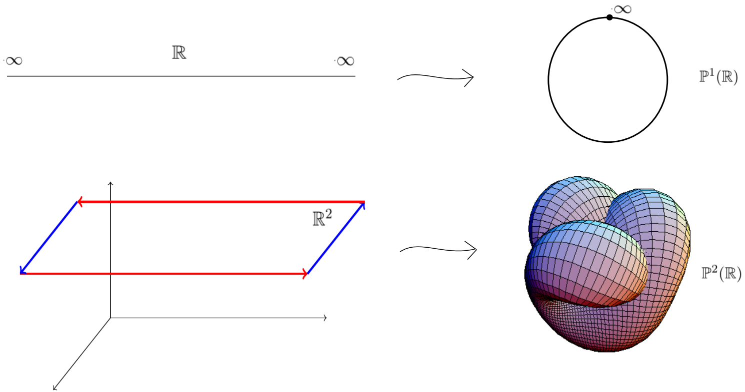
Pour $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, on notera $[x_1 : \ldots : x_{n+1}]$ sa classe d'équivalence, c'est-à-dire la droite vectorielle qu'il engendre.

# Idée intuitive

Intuitivement, pour obtenir $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, on ajoute un "hyperplan à l'infini" à $\mathbb{K}^n$.

# Idée intuitive

Intuitivement, pour obtenir $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, on ajoute un "hyperplan à l'infini" à $\mathbb{K}^n$.



# Variétés réelles et complexes : définitions

## Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une **variété algébrique projective sur** $\mathbb{K}$ est une partie $X$ d'un $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ définie par des équations polynomiales homogènes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

# Variétés réelles et complexes : définitions

## Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une **variété algébrique projective sur** $\mathbb{K}$ est une partie $X$ d'un $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ définie par des équations polynomiales homogènes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Donc il existe $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ homogènes tels que

$$X = \{x = [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) | \ P_1(x) = \cdots = P_r(x) = 0\}$$

# Variétés réelles et complexes : définitions

## Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une **variété algébrique projective sur** $\mathbb{K}$ est une partie $X$ d'un $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ définie par des équations polynomiales homogènes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Donc il existe $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ homogènes tels que

$$X = \{x = [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) | \; P_1(x) = \cdots = P_r(x) = 0\}$$

**Exemples :**

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est bien une variété algébrique projective sur $\mathbb{K}$ (définie par le polynôme nul !).

# Variétés réelles et complexes : définitions

## Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une **variété algébrique projective sur** $\mathbb{K}$ est une partie $X$ d'un $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ définie par des équations polynomiales homogènes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Donc il existe $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ homogènes tels que

$$X = \{x = [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) |\ P_1(x) = \cdots = P_r(x) = 0\}$$

**Exemples :**

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est bien une variété algébrique projective sur $\mathbb{K}$ (définie par le polynôme nul !).
- $\mathcal{C} = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) |\ y^2 z = x^3 - xz^2\}$

# Morphismes de variétés algébriques

## Définition

Soient $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ et $Y \subseteq \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ deux variétés algébriques sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Un **morphisme** est une application $f : X \to Y$ pour laquelle il existe $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ homogènes de même degré et sans zéros communs tels que $\forall [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ :

$$f([x_1 : \ldots : x_{n+1}]) = [f_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) : \ldots : f_{m+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})].$$

# Morphismes de variétés algébriques

## Définition

Soient $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ et $Y \subseteq \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ deux variétés algébriques sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Un **morphisme** est une application $f : X \to Y$ pour laquelle il existe $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ homogènes de même degré et sans zéros communs tels que $\forall [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ :

$$f([x_1 : \ldots : x_{n+1}]) = [f_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) : \ldots : f_{m+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})].$$

On définit en particulier un **automorphisme** d'une variété $X$ comme étant un morphisme $\varphi : X \to X$ bijectif dont la réciproque est un morphisme.

# Morphismes de variétés algébriques

## Définition

Soient $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ et $Y \subseteq \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ deux variétés algébriques sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Un **morphisme** est une application $f : X \to Y$ pour laquelle il existe $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ homogènes de même degré et sans zéros communs tels que $\forall [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ :

$$f([x_1 : \ldots : x_{n+1}]) = [f_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) : \ldots : f_{m+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})].$$

On définit en particulier un **automorphisme** d'une variété $X$ comme étant un morphisme $\varphi : X \to X$ bijectif dont la réciproque est un morphisme.

$$\operatorname{Aut} X := \{\text{automorphismes de } X\}$$

1. Variétés projectives
   - Espace projectif $\mathbb{P}^n$
   - Variétés réelles et complexes
2. Éclatés de $\mathbb{P}^2$
   - Éclatements
   - Groupe de Picard
3. Structures réelles
   - Généralités
   - Les résultats
   - Perspectives et questions

# Définition locale

Au commencement de la géométrie était une relation : l'appartenance d'un point à une droite.

# Définition locale

Au commencement de la géométrie était une relation : l'appartenance d'un point à une droite.

## Définition

**L'éclaté de** $\mathbb{K}^2$ en l'origine est la variété projective définie par :

$$\widehat{\mathbb{K}^2} := \{(x, \ell) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) | \, x \in \ell\}.$$

# Définition locale

Au commencement de la géométrie était une relation : l'appartenance d'un point à une droite.

## Définition

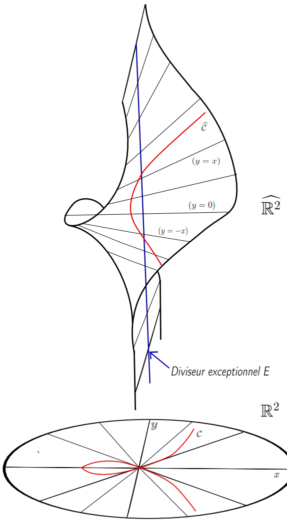
**L'éclaté de** $\mathbb{K}^2$ en l'origine est la variété projective définie par :

$$\widehat{\mathbb{K}^2} := \{(x, \ell) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) | \, x \in \ell\}.$$

**L'éclatement de** $\mathbb{K}^2$ en l'origine est le morphisme :

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{K}^2} & \to & \mathbb{K}^2 \\ (x, \ell) & \mapsto & x \end{array} \right.$$

# Visualisation



# Éclatements

- On définit ensuite les éclatés de surfaces quelconques par recollement d'un éclaté de $\mathbb{K}^2$ au voisinage du point éclaté.

# Éclatements

- On définit ensuite les éclatés de surfaces quelconques par recollement d'un éclaté de $\mathbb{K}^2$ au voisinage du point éclaté.
- On peut éclater plusieurs points d'affilée : en particulier, après avoir éclaté un point $p$, on peut éclater un point **infiniment proche** de $p$, i.e. un point du diviseur exceptionnel au-dessus de $p$.

# Éclatements

- On définit ensuite les éclatés de surfaces quelconques par recollement d'un éclaté de $\mathbb{K}^2$ au voisinage du point éclaté.

- On peut éclater plusieurs points d'affilée : en particulier, après avoir éclaté un point $p$, on peut éclater un point **infiniment proche** de $p$, i.e. un point du diviseur exceptionnel au-dessus de $p$.

- *Dans toute la suite, nous considèrerons exclusivement un éclaté $X$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en des points $p_1, \dots, p_r$ (dont certains peut-être infiniment proches) et nous noterons $E_1, \dots, E_r$ les diviseurs exceptionnels correspondants.*

## Groupe de Picard des éclatés de $\mathbb{P}^2$

Pour la suite de notre exposé, on admettra le :

# Groupe de Picard des éclatés de $\mathbb{P}^2$

Pour la suite de notre exposé, on admettra le :

**Théorème et Définition**

Si $X$ est un éclaté de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en $r$ points, alors $\operatorname{Aut} X$ agit par isométries sur le **groupe de Picard** de $X$, qui est un réseau $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z}^{r+1}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique de signature $(1, r)$ appelée **forme d'intersection sur $\boldsymbol{X}$**.

# Groupe de Picard des éclatés de $\mathbb{P}^2$

Pour la suite de notre exposé, on admettra le :

## Théorème et Définition

Si $X$ est un éclaté de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en $r$ points, alors $\operatorname{Aut} X$ agit par isométries sur le **groupe de Picard** de $X$, qui est un réseau $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z}^{r+1}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique de signature $(1, r)$ appelée **forme d'intersection sur $\boldsymbol{X}$**.

On obtient donc une suite exacte associée au morphisme $p : \operatorname{Aut} X \to \mathrm{O}(\operatorname{Pic} X)$ induit par cette action :

$$1 \to \operatorname{Aut}^{\#} X \to \operatorname{Aut} X \to \operatorname{Aut}^{*} X \to 1$$

1. Variétés projectives
   - Espace projectif $\mathbb{P}^n$
   - Variétés réelles et complexes
2. Éclatés de $\mathbb{P}^2$
   - Éclatements
   - Groupe de Picard
3. Structures réelles
   - Généralités
   - Les résultats
   - Perspectives et questions

# Complexification

**Définition**

Soit $X = \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) |\ P_1(x) = \cdots = P_r(x) = 0\}$ une variété réelle. La **complexification de** $X$ est la variété complexe $X_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ définie par les mêmes équations. On dit alors que $X$ est une **forme réelle** de $X_{\mathbb{C}}$.

# Complexification

## Définition

Soit $X = \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) | \ P_1(x) = \cdots = P_r(x) = 0\}$ une variété réelle. La **complexification de** $X$ est la variété complexe $X_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ définie par les mêmes équations. On dit alors que $X$ est une **forme réelle** de $X_{\mathbb{C}}$.

**Deux variétés réelles non-isomorphes peuvent avoir des complexifications isomorphes.**

## Un exemple

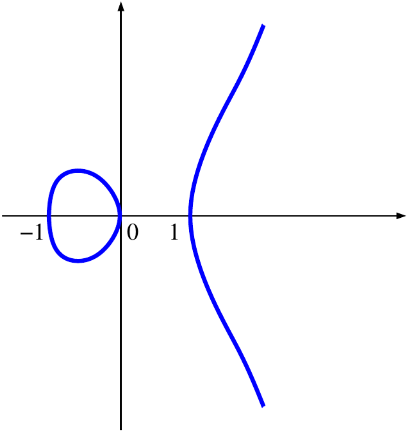
Soit $\mathcal{C} : (y^2z = x^3 - xz^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

# Un exemple

Soit $\mathcal{C} : (y^2z = x^3 - xz^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.
Clairement, $\mathcal{C}$ est la complexifiée de $\mathcal{C}_0 : (y^2z = x^3 - xz^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

# Un exemple

Soit $\mathcal{C} : (y^2z = x^3 - xz^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.
Clairement, $\mathcal{C}$ est la complexifiée de $\mathcal{C}_0 : (y^2z = x^3 - xz^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

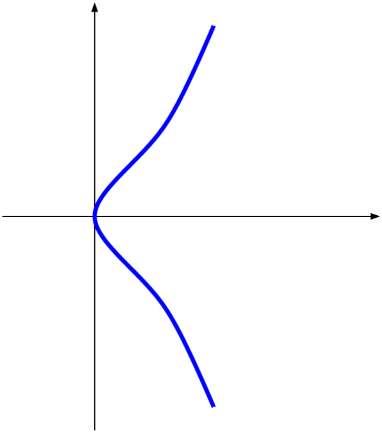


## Un exemple

Soit maintenant la courbe réelle $\mathcal{C}_1 : (y^2z = x^3 + xz^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

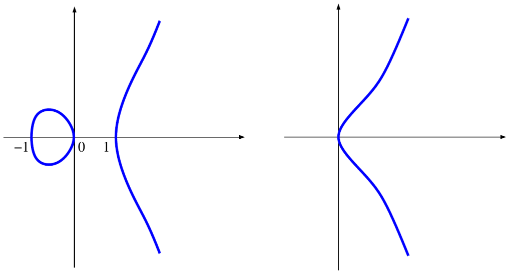
# Un exemple

Soit maintenant la courbe réelle $\mathcal{C}_1 : (y^2z = x^3 + xz^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.



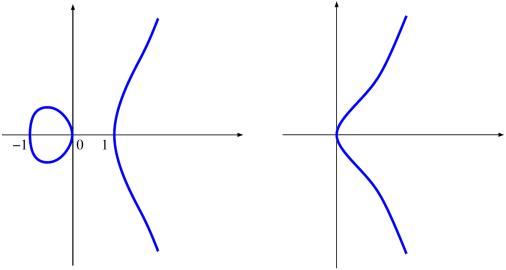
# Un exemple

$\mathcal{C}_1$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{C}_0$.



# Un exemple

$\mathcal{C}_1$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{C}_0$.




Pourtant, $(\mathcal{C}_1)_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $(\mathcal{C}_0)_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}$ via

$$\varphi : [x : y : z] \mapsto [ix : e^{-i\frac{\pi}{4}} y : z]$$

# Structures réelles

## Définition

Soit $X$ une variété complexe. Une **structure réelle** sur $X$ est un antimorphisme involutif $\sigma : X \to X$ :

# Structures réelles

## Définition

Soit $X$ une variété complexe. Une **structure réelle** sur $X$ est un antimorphisme involutif $\sigma : X \to X$ :

- antimorphisme : conjugué complexe d'un morphisme ;

# Structures réelles

## Définition

Soit $X$ une variété complexe. Une **structure réelle** sur $X$ est un antimorphisme involutif $\sigma : X \to X$ :

- antimorphisme : conjugué complexe d'un morphisme ;
- involutif : $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

# Structures réelles

## Définition

Soit $X$ une variété complexe. Une **structure réelle** sur $X$ est un antimorphisme involutif $\sigma : X \to X$ :

- antimorphisme : conjugué complexe d'un morphisme ;
- involutif : $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

Le **lieu réel** de $(X, \sigma)$ est l'ensemble $X^\sigma$ des points fixés par $\sigma$.

# Structures réelles

## Définition

Soit $X$ une variété complexe. Une **structure réelle** sur $X$ est un antimorphisme involutif $\sigma : X \to X$ :

- antimorphisme : conjugué complexe d'un morphisme ;
- involutif : $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

Le **lieu réel** de $(X, \sigma)$ est l'ensemble $X^\sigma$ des points fixés par $\sigma$.

C'est tout simplement une **"conjugaison complexe"** sur $X$ !

# Structures réelles

## Définition

Soit $X$ une variété complexe. Une **structure réelle** sur $X$ est un antimorphisme involutif $\sigma : X \to X$ :

- antimorphisme : conjugué complexe d'un morphisme ;
- involutif : $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

Le **lieu réel** de $(X, \sigma)$ est l'ensemble $X^\sigma$ des points fixés par $\sigma$.

C'est tout simplement une **"conjugaison complexe"** sur $X$ !

## Exemples

- sur $\mathcal{C} : (y^2 z = x^3 - xz^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, on a la structure réelle usuelle $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\overline{x} : \overline{y} : \overline{z}]$ de lieu réel $\mathcal{C}_0$ ;

# Structures réelles

## Définition

Soit $X$ une variété complexe. Une **structure réelle** sur $X$ est un antimorphisme involutif $\sigma : X \to X$ :

- antimorphisme : conjugué complexe d'un morphisme ;
- involutif : $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

Le **lieu réel** de $(X, \sigma)$ est l'ensemble $X^\sigma$ des points fixés par $\sigma$.

C'est tout simplement une **"conjugaison complexe"** sur $X$ !

## Exemples

- sur $\mathcal{C} : (y^2 z = x^3 - xz^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, on a la structure réelle usuelle $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\overline{x} : \overline{y} : \overline{z}]$ de lieu réel $\mathcal{C}_0$ ;
- mais on a aussi une autre structure réelle $\sigma_1 : [x : y : z] \mapsto [-\overline{x} : i\overline{y} : \overline{z}]$ de lieu réel $\mathcal{C}_1$.

# Le problème

## Définition

Deux structures réelles $\sigma$ et $\sigma'$ sont **équivalentes** si, et seulement si, il existe $\varphi \in \operatorname{Aut} X$ tel que $\boxed{\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}}$

# Le problème

## Définition

Deux structures réelles $\sigma$ et $\sigma'$ sont **équivalentes** si, et seulement si, il existe $\varphi \in \operatorname{Aut} X$ tel que $\boxed{\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}}$

## Théorème (Weil/Borel-Serre)

Pour toute variété complexe $X$, les classes d'isomorphisme des **formes réelles** de $X$ sont en bijection avec l'ensemble $H^1(\operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \operatorname{Aut} X)$ des classes d'équivalence des **structures réelles** sur $X$.

# Le problème

## Définition

Deux structures réelles $\sigma$ et $\sigma'$ sont **équivalentes** si, et seulement si, il existe $\varphi \in \operatorname{Aut} X$ tel que $\boxed{\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}}$

## Théorème (Weil/Borel-Serre)

Pour toute variété complexe $X$, les classes d'isomorphisme des **formes réelles** de $X$ sont en bijection avec l'ensemble $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \operatorname{Aut} X)$ des classes d'équivalence des **structures réelles** sur $X$.

## Exemple

Sur $\mathcal{C}$, les deux structures réelles $\sigma_0$ et $\sigma_1$ correspondent aux deux formes réelles de $\mathcal{C}$ que sont $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.

# Le problème

**Problème**

Un éclaté de $\mathbb{P}^2$ admet-il un **nombre fini** de formes réelles à isomorphisme près ?

# Le problème

**Problème**

Un éclaté de $\mathbb{P}^2$ admet-il un **nombre fini** de formes réelles à isomorphisme près ?

En utilisant la suite exacte en **cohomologie galoisienne** associée à la suite exacte

$$1 \to \operatorname{Aut}^{\#} X \to \operatorname{Aut} X \to \operatorname{Aut}^{*} X \to 1$$

on peut décomposer le problème en deux sous-problèmes :

# Le problème

**Problème**

Un éclaté de $\mathbb{P}^2$ admet-il un **nombre fini** de formes réelles à isomorphisme près ?

En utilisant la suite exacte en **cohomologie galoisienne** associée à la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Aut}^{\#} X \to \mathrm{Aut}\, X \to \mathrm{Aut}^{*} X \to 1$$

on peut décomposer le problème en deux sous-problèmes :

- la finitude de $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathrm{Aut}^{\#} X)$ ;

# Le problème

**Problème**

Un éclaté de $\mathbb{P}^2$ admet-il un **nombre fini** de formes réelles à isomorphisme près ?

En utilisant la suite exacte en **cohomologie galoisienne** associée à la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Aut}^{\#} X \to \mathrm{Aut}\, X \to \mathrm{Aut}^{*} X \to 1$$

on peut décomposer le problème en deux sous-problèmes :

- la finitude de $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathrm{Aut}^{\#} X)$ ;
- et celle de $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathrm{Aut}^{*} X)$.

# Premier théorème

On peut commencer par montrer le résultat suivant :

# Premier théorème

On peut commencer par montrer le résultat suivant :

**Théorème**

Soit $X$ un éclaté de $\mathbb{P}^2$ en $r$ points.

- $\mathrm{Aut}^{\#}X$ est un groupe algébrique linéaire réel.
- **Si $r \leq 8$**, alors $\mathrm{Aut}^{*}X$ est fini (il est inclus dans un groupe de Weyl).

# Premier théorème

On peut commencer par montrer le résultat suivant :

**Théorème**

Soit $X$ un éclaté de $\mathbb{P}^2$ en $r$ points.

- $\mathrm{Aut}^{\#}X$ est un groupe algébrique linéaire réel.
- **Si $r \leq 8$**, alors $\mathrm{Aut}^{*}X$ est fini (il est inclus dans un groupe de Weyl).

et obtenir grâce à des résultats cohomologiques de Borel et Serre :

# Premier théorème

On peut commencer par montrer le résultat suivant :

**Théorème**

Soit $X$ un éclaté de $\mathbb{P}^2$ en $r$ points.

- $\mathrm{Aut}^{\#}X$ est un groupe algébrique linéaire réel.
- **Si $r \leq 8$**, alors $\mathrm{Aut}^{*}X$ est fini (il est inclus dans un groupe de Weyl).

et obtenir grâce à des résultats cohomologiques de Borel et Serre :

**Théorème (M.B.)**

Tout éclaté de $\mathbb{P}^2$ en au plus 8 points admet un nombre fini de formes réelles (à isomorphisme près), et ce quelle que soit la position de ces points.

# Deuxième théorème

Pour aller plus loin, on emprunte une notion à la théorie des systèmes dynamiques :

# Deuxième théorème

Pour aller plus loin, on emprunte une notion à la théorie des systèmes dynamiques :

## Théorème et Définition

**L'entropie topologique** de $\varphi \in \operatorname{Aut} X$ est le logarithme du rayon spectral de $\varphi^* \in O(\operatorname{Pic} X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{R})$. C'est un réel $\geq 0$.

# Deuxième théorème

Pour aller plus loin, on emprunte une notion à la théorie des systèmes dynamiques :

**Théorème et Définition**

**L'entropie topologique** de $\varphi \in \operatorname{Aut} X$ est le logarithme du rayon spectral de $\varphi^* \in O(\operatorname{Pic} X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{R})$. C'est un réel $\geq 0$.

On peut alors obtenir le résultat principal de cet exposé :

**Théorème (M.B.)**

Si un éclaté $X$ de $\mathbb{P}^2$ admet une infinité de formes réelles (à iso près), alors $r \geq 10$ et $X$ admet au moins deux automorphismes à entropie $> 0$ "indépendants" (i.e. "$\operatorname{Aut} X$ est très gros").

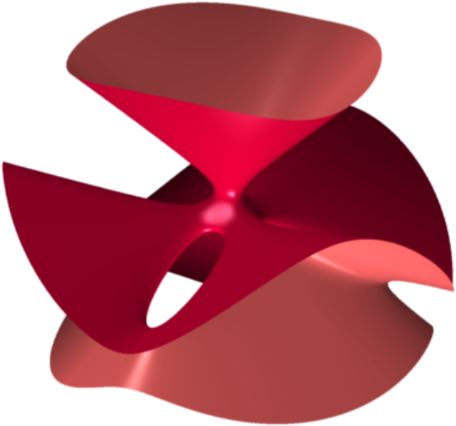
# Perspectives et questions

## Que faire avec l'entropie ?

# Perspectives et questions

## Que faire avec l'entropie ?

On n'a aucun résultat général (les groupes d'automorphismes de ces surfaces sont très peu connus) mais seulement des cas très particuliers (surfaces de Coble, exemple de Bedford-Kim, etc.) dans lesquels la finitude fonctionne encore.



***Cubique de Clebsch** : éclaté de* $\mathbb{P}^2$ *en 6 points contenant 27 droites et d'équation* $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = (x + y + z + t)^3$ *dans* $\mathbb{P}^3$.

# Références

- M.Benzerga, *Real structures on rational surfaces and automorphisms acting trivially on Picard groups*, arXiv:1409.3490, à paraître dans Math. Z.
- A.Borel, J.P.Serre, *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne*, Comment. Math. Helv. **39** (1964), 111–164.