UNIVERSITÉ d'ANGERS
UFR SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE
Présenté par

ABDALLAH ASSI

Pour obtenir le diplôme d'

HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES
Arrêté du 23 novembre 1988
Spécialité: Mathématiques pures

Le 26 Mai 2003 devant le jury composé de

Joël BRIANÇON, Professeur, Université Nice Sophia-Antipolis, Rapporteur

Avinash SATHAYE, Professeur, Kentucky University, Rapporteur

Mikael ZAIDENBERG, Professeur, Université Joseph Fourier, Rapporteur

Shreeram ABHYANKAR, Professeur, Purdue University, Examinateur

Michel GRANGER, Professeur, Université d'Angers, Examinateur

Monique LEJEUNE-JALABERT, Directeur de Recherche CNRS, Université Versailles-St Quentin, Examinateur

Adam PARUZINSKI, Professeur, Université d'Angers, Examinateur

Quelques contributions à la théorie des bases standard et aux singularités des courbes planes algébriques

Abdallah Assi*

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 3

CHAPITRE I. BASES STANDARD ET APPLICATIONS 4

Section 1. Bases de Gröbner 5
Section 2. Bases Standard 6
Section 3. Complexité 8
Section 4. Tropismes critiques d'un idéal 9
Section 5. Platitude de certaines projections génériques 10
Section 6. Base standard Universelle 12
Section 7. Bases standard des $\mathcal{D}$-modules 13
Section 8. Algorithmes de calcul de bases standard 15
Section 9. Pentes des $\mathcal{D}$-modules 17
Section 10. Bases standard universelles 18
Références 20

CHAPITRE II. SINGULARITÉS DES COURBES PLANES ALGÉBRIQUES 22

Section 11. Courbes planes méromorphes 22
Section 12. Lemme d'Abhyankar-Moh 23
Section 13. Régularité des courbes méromorphes 25
Section 14. Dérivées partielles de courbes méromorphes 27
Section 15. Le Jacobien des courbes méromorphes 29
Section 17. Pairs Jacobiens 30
Section 18. Polynômes irréductibles dans $\mathbf{K}[[x]][y]$ 32
Section 19. Modifications toriques des variétés toriques libres 33
Références 35

*Université d'Angers, Mathématiques, 49045 Angers cedex 01, France, e-mail:assi@univ-angers.fr

Introduction

Ce texte trace l'historique de mes travaux de recherche depuis la soutenance de ma thèse et se scinde en deux parties: d'une part mes travaux dans la théorie des bases standard et de Gröbner et leurs applications en Algèbre commutative et $\mathcal{D}$-modules, et d'autre part ceux dans la théorie des singularités, essentiellement celles des courbes planes algébriques. Ma thèse, soutenue en 1991, a été dirigée par Monique Lejeune-Jalabert. Elle portait sur l'étude d'un point de vue effectif des gradués associés à des filtrations quotients sur $\mathbf{K}[x_1,\ldots,x_n]/I$, où $\mathbf{K}$ est un corps et I est un idéal de $\mathbf{K}[x_1,\ldots,x_n]$, définies par des formes linéaires à coefficients réels (calcul, comportement lorsqu'on fait varier les coefficients, applications géométriques). Le calcul des gradués est équivalent à celui d'une base standard de l'idéal I. Le travail de thèse est détaillé dans les Sections 2 et 4.

Après la soutenance de ma thèse j'ai entamé une collaboration avec T. Mora portant sur la complexité de l'algorithme de calcul de bases standard, lorsque certains coefficients de la forme linéaire sont négatifs (voir Section 3). J'ai d'autre part généralisé mes travaux de thèse dans deux directions: dans la première le corps $\mathbf{K}$ est remplacé par un anneau commutatif et unitaire, le but étant de généraliser la notion de bases standard à cette situation et de trouver des applications géométriques (voir Section 5), dans la deuxième l'anneau de polynômes $\mathbf{K}[x_1,\ldots,x_n]$ est remplacé par l'anneau des séries formelles $\mathbf{K}[[x_1,\ldots,x_n]]$, le but étant d'étudier le comportement du gradué lorsque les coefficients de la forme linéaire varient dans $\mathbf{R}$ (voir Section 6).

Ensuite, en collaboration avec F. Castro et M. Granger, certains travaux ont été généralisés aux $\mathcal{D}$-modules, en particulier l'étude des gradués associés à des filtrations quotients sur R/I -où $R = A_n$ (resp. $\mathcal{D}_n$) et I est un idéal à gauche de R- définies par des formes linéaires à coefficients réels (voir Sections 7 à 11).

Entre temps j'ai commencé la lecture de l'article de S.S. Abhyankar à Kyoto -On the semigroup of a meromorphic curve-. Cette lecture a inspiré mes premiers résultats sur les courbes. J'ai d'abord étudié les courbes méromorphes (i.e. les polynômes de $\mathbf{K}((x))[y]$, où $\mathbf{K}((x))$ désigne le corps des séries méromorphes à coefficients dans un coprs algébriquement clos $\mathbf{K}$) d'un point de vue effectif, en utilisant la notion des racines approchées d'Abhyankar-Moh. Je me suis ensuite intéressé au Lemme d'Abhyankar-Moh et ses possibles généralisations (voir Sections 12 et 13), puis au problème de la décomposition des dérivées partielles d'une courbe méromorphe (Voir Section 14).

Avec S.S. Abhyankar, on s'est intéressé au problème de la décomposition du Jacobien $J(f,g)$ de deux courbes méromorphes f,g à partir de certaines données associées à f et g (voir Section 15). On a ensuite étudié les paires $(f,g)\in(\mathbf{K}((x))[y])^2$ dont le Jacobien est un élément de $\mathbf{K}((x))$ (voir Section 16).

Enfin, en collaboration avec M. Barile, on s'est intéressé à la classification d'un point de vue effectif des polynômes irréductibles dans $\mathbf{K}[[x]][y]$ (voir Section 17) puis à l'application de la théorie de désingularisation des variétés non dégénérées à certaines variétés définies en recollant des semi-groupes (voir Section 18).

Je remercie très sincèrement Joël Briançon, Avinash Sathaye et Mikael Zaidenberg pour l'honneur qu'ils me font d'avoir accepté de rapporter sur mes travaux, ainsi que Shreeram S. Abhyankar, Jean-Michel Granger, Monique Lejeune-Jalabert et Adam Paruzinski pour avoir accepté de participer à ce jury.

Ma reconnaissance va d'abord à Monique Lejeune-Jalabert, mon directeur de thèse, qui a influencé mes premiers travaux de recherche, et que je ne peux pas exprimer en quelques mots tout ce que je lui dois. Qu'elle trouve ici toute ma gratitude.

Mes travaux sur les courbes planes sont influencés par ceux de Shreeram Abhyankar, d'abord comme auteur, puis comme collaborateur. Je ne peux évidemment pas exprimer ici le plaisir de collaborer avec lui. Il m'a fait l'honneur de participer, pendant le semestre que j'ai passé à l'Université de Purdue en 2001, à son seminaire et à ses discussions avec ses étudiants. Ces moments restent pour moi un réel plaisir.

J'ai connu Jean-Michel Granger en tant que collègue, et en tant que collaborateur. J'ai beaucoups appris des deux. Sa gentillesse et sa disponibilité m'ont été inéstimables. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance.

Je dois énormément, à n'en pas douter, à ceux avec qui j'ai collaboré, en particulier: Francisco Castro et Teo Mora. Je les en remercie vivement.

Cette modeste contribution n'aurait jamais vu le jour sans l'aide de très nombreux mathématiciens que j'ai rencontrés. Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude.

Un grand merci à tous les collègues et personnels du département de Mathématiques d'Angers qui font de cet endroit un lieu très agréable pour la recherche.

Un immense Merci à Khouloud, Myriam et Rayanne.

Chapitre I: Bases standard et applications

1 Bases de Gröbner

Soit $\mathbf{K}$ un corps et soit $A = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{K}[x]$ l'anneau de polynômes à n indétérminées sur $\mathbf{K}$. Soit $L = \sum_{i=1}^{n} e_i\alpha_i \in \mathbf{R}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ une forme linéaire à coefficients dans $\mathbf{R}$ et soit $<$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^n$ compatible avec la structure du semi-groupe de $\mathbf{N}^n$. On considère sur $\mathbf{N}^n$ le bon ordre $<_L$ suivant:

$$\alpha <_L \beta \text{ ssi } L(\alpha) < L(\beta) \text{ ou } [L(\alpha) = L(\beta) \text{ et } \alpha < \beta].$$

Dans cette Section, les coefficientes $e_1, \ldots, e_n$ sont supposés dans $\mathbf{R}^+$. En particulier il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante:

$$\alpha_0 >_L \alpha_1 >_L \ldots >_L \alpha_k \ldots$$

Dans $\mathbf{N}^n$. On dit que l'ordre $<_L$ est Noethérien.

Soit $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ un élément non nul de A. On appelle **Support** de f, et on note $\mathrm{Supp}(f)$, l'ensemble $\{\alpha; c_\alpha \neq 0\}$. On appelle ***L*-ordre** de f, et on note $\nu_L(f)$, l'élément $\nu_L(f) = \max\{L(\alpha); c_\alpha \in \mathrm{Supp}(f)\}$. On appelle **forme initiale** de f, et on note $\mathrm{in}(f)$, l'élément $\mathrm{in}(f) = \sum_{L(\alpha)=\nu_L(f)} c_\alpha x^\alpha$. On appelle **exposant privilégié** de f, et on note $\exp(f)$, l'élément $\alpha_0 = \max_{<_L}\mathrm{Supp}(f) = \max_{<}\mathrm{Supp}(\mathrm{in} f)$. On appelle **monôme initial** de f, et on note $M(f)$, le monôme $c_{\alpha_0}x^{\alpha_0}$.

Soit I un idéal différent de (0) de A. On appelle **idéal initial** de I, et on note $\mathrm{in}(I)$, l'idéal engendré par $\{\mathrm{in}(f); f \in I - 0\}$ dans A; on note $\exp(I) = \{\exp(f); f \in I - 0\}$. On appelle **idéal monomial** de I, et on note $M(I)$, l'idéal engendré par $\{M(f); f \in I - 0\}$ dans A.

On appelle **base de Gröbner** de I, tout système d'éléments $f_1, \ldots, f_r$ de I tel que $M(I) = (M(f_1), \ldots, M(f_r))$. On vérifie que $M(I) = M(\mathrm{in}(I))$ et que:

$\{f_1, \ldots, f_r\}$ est une base de Gröbner de $I \Longleftrightarrow \exp(I) = \bigcup_{i=1}^{r} \exp(f_i) + \mathbf{N^n}$

Le résultat suivant est Du à B. Buchberger ([14]).

Théorème 1.1 : *Connaissant un système de générateurs de I, on peut calculer effectivement une base de Gröbner de I.*

L'ingrédient principal de l'algorithme de construction d'une base de Gröbner est un théorème de division qui généralise à l'anneau A la division euclidienne dans l'anneau de polynômes à une variable. Rappelons brièvement ce résultat:

Soit $\{f_1, \ldots, f_r\}$ un ensemble de polynômes de A, tous non nuls et soit $\alpha_i = \exp(f_i)$ pour tout $1 \leq i \leq r$. On considère la partition Δ, $\overline{\Delta}$ de $\mathbf{N}^n$, relative à $f_1, \ldots, f_r$, tel que $\Delta = \bigcup_{i=1}^{r} \alpha_i + \mathbf{N}^n$ et $\overline{\Delta} = \mathbf{N}^n - \Delta$. Soit f un élément de A et posons $\alpha = \exp(f)$. On définit les suites $f^k, h_j^k, j = 1, \ldots, r$ et h^k dans A par $f^0 = f, h_j^0 = 0, j = 1, \ldots, r, h^0 = 0$ et $\forall k \geq 0$:

(i) Si $\exp(f^k) \in \Delta$, soit $1 \leq i_k \leq r$ le plus petit entier tel qu'il existe $\beta_k \in \mathbf{N^n}$ et $c_k \in \mathbf{K}$ vérifiant $\mathrm{M}(f^k) = c_k x^{\beta_k}\mathrm{M}(f_{i_k})$. On pose:

$$f^{k+1} = f^k - c_k x^{\beta_k} f_{i_k},\ h_{i_k}^{k+1} = h_{i_k}^k + c_k x^{\beta_k},\ h_j^{k+1} = h_j^k, j \neq i_k \text{ et } h^{k+1} = h^k$$

(ii) Si $\exp(f^k) \in \overline{\Delta}$, on pose:

$$f^{k+1} = f^k - \mathrm{M}(f^{k+1}),\ h_j^{k+1} = h_j^k, j = 1, \ldots, r \text{ et } h^{k+1} = h^k + \mathrm{M}(f^k)$$

De sorte que $f = \sum_{j=1}^{r} h_j^{k+1} f_j + h^{k+1} + f^{k+1}$, et $h^{k+1} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Supp}(h^{k+1}) \subseteq \overline{\Delta}$. De plus, $f^{k+1} \neq 0 \Rightarrow \exp(f^{k+1}) <_L \exp(f^k)$.

L'ordre $<_L$ étant Noethérien, ce processus s'arrête construisant $h_1, \ldots, h_r, h \in A$ tel que:

i) $f = \sum_{i=1}^{r} h_i f_i + h$

ii) $\max_{h_i \neq 0} \exp(h_i f_i) \leq \alpha$.

iii) Si $h \neq 0$, alors $\exp(h) \leq \alpha$ et $\mathrm{Supp}(h) \subseteq \overline{\Delta}$.

On appelle h le **reste de la division** de f par $f_1, \ldots, f_r$, et on note $h = fR\{f_1, \ldots, f_r\}$.

Soit maintenant f, g deux polynômes de A et soit $M(f) = c_\alpha x^\alpha$ et $M(g) = d_\beta x^\beta$. Soit $x^\gamma = \text{p.p.c.m.}(x^\alpha, x^\beta)$ (i.e. $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$). On pose $fSg = d_\beta x^{\gamma - \alpha}.f - c_\alpha x^{\gamma - \beta}.g$, de sorte que $\exp(fSg) < \gamma$.

Proposition 1.2 *([14]): Un système de générateurs $f_1, \ldots, f_r$ de l'idéal I est une base de Gröbner de I si $\forall 1 \leq i \neq j \leq r, f_i S f_j R\{f_1, \ldots, f_r\} = 0$.*

On a aussitôt l'algorithme suivant:

Algorithme: Soit $g_1, \ldots, g_s$ un système de générateurs de I:

(i) Si $g_i S g_j R\{g_1, \ldots, g_r\} = 0, \forall 1 \leq i \neq j \leq s$, alors $\{g_1, \ldots, g_s\}$ est une base de Gröbner de I.

(ii) S'il existe $1 \leq i \neq j \leq s$ tel que $g_i S g_j R\{g_1, \ldots, g_s\} = h \neq 0$, on pose $h = g_{s+1}$ et on recommence avec $\{g_1, \ldots, g_s, g_{s+1}\}$.

Ce processus s'arrête (voir [14]) construisant un système de générateurs de I qui est aussi une base de Gröbner de I.

2 Bases Standard

Les notations sont celles de la Section précédente. On suppose ici que les coefficients $e_1, \ldots, e_n$ sont de signe quelconque. On appelle **base Standard** de l'idéal I de A tout système de polynômes $f_1, \ldots, f_r$ de I tel que $\mathrm{M}(I) = (\mathrm{M}(f_1), \ldots, \mathrm{M}(f_r))$.

Remarque 2.1 *:* S'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $e_i < 0$, l'ordre $<_L$ n'est plus Noetherien.

Exemple 2.2 *$n = 1$, $e_1 = -1$: $1 >_L 2 >_L \cdots >_L k >_L \cdots$.*

Par conséquent, le processus de division peut produire des séries formelles:

Exemple 2.3 *$n = 1$, $e_1 = -1$, $f = x$ et $f_1 = x + x^2$*

$$f - f_1 = -x^2$$

$$+xf_1 = x^3$$

$$\cdots \quad \cdots$$

on obtient

$$f = \Big[\sum_{i \geq 0} (-1)^i x^i\Big] f_1 \ .$$

L'exemple ci-dessus montre que le processus de division de la Section précédente ne permet pas de calculer effectivement une base standard, partant d'un système de générateurs de I. Pour contrôler où arrêter la division, on utilise la notion d'écart d'un polynôme, introduite par T. Mora ([26]):

Soit $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ un polynôme non nul de A et soit $\nu'(f) = \min\{L(\alpha); c_\alpha \neq 0\}$. On appelle **écart** de f, et on note $E(f)$, le réel $\nu(f) - \nu'(f)$.

Soit $\{f_1, \ldots, f_r\}$ un ensemble de polynômes de A, tous non nuls et soit $\alpha_i = \exp(f_i)$ et $E_i = E(f_i)$ pour tout $1 \leq i \leq r$. On considère la partition Δ, $\overline{\Delta}$ de $\mathbf{N}^n$, relative à $f_1, \ldots, f_r$, tel que $\Delta = \bigcup_{i=1}^r \alpha_i + \mathbf{N}^n$ et $\overline{\Delta} = \mathbf{N}^n - \Delta$. Soit f un élément de A et posons $\alpha = \exp(f)$ et $E = E(f)$. On considère l'ensemble $U_f = \{i; \alpha \in \alpha_i + \mathbf{N}^n \text{ et } E_i < E\}$. On dit que f est réduit modulo $\{f_1, \ldots, f_r\}$ si $U_f = \emptyset$. Avec ces notations, on a le résultat suivant:

Lemme 2.4 *[1] Il n'existe pas de suite infinie $f = f^0, f^1, \ldots,$ dans A tel que pour tout $k \geq 0$:*

i) $U_{f^k} \neq \emptyset$.

ii) Soit $i_k \in U_{f^k}$ et soit $\beta_k \in \mathbf{N^n}$ et $c_k \in \mathbf{K}$ tel que $M(f^k) = c_k x^{\beta_k} \mathrm{M}(f_{i_k})$, alors:

$$f^{k+1} = f^k - c_k x^{\beta_k} f_{i_k}$$

On obtient par conséquent, après un nombre fini d'étapes, $h_1, \ldots, h_r$ et $h \in A$ tel que:

i) $f = \sum_{i=1}^r h_i f_i + h$

ii) $\max_{h_i \neq 0} \exp(h_i f_i) \leq \alpha$.

iii) Si $h \neq 0$, alors $U_h = \emptyset$.

On appelle h le reste de la division tronquée de f par $f_1, \ldots, f_r$, et on note $h = f R_{Tr}\{f_1, \ldots, f_r\}$.

Avec les notations ci-dessus, on a un résultat similaire à celui de la Proposition 1.2., précisement:

Proposition 2.5 : *Un système de générateurs $f_1, \ldots, f_r$ de l'idéal I est une base standard de I si* $\forall 1 \leq i \neq j \leq r, f_i S f_j R_{Tr}\{f_1, \ldots, f_r\} = 0$.

Ceci aboutit a l'algorithme suivant

Algorithme: Soit $g_1, \ldots, g_s$ un système de générateurs de I:

(i) Si pour tout $1 \leq i \neq j \leq s$, $g_i S g_j R_{Tr}\{g_1, \ldots, g_s\} = 0$, alors $\{g_1, \ldots, g_s\}$ est une base standard de I.

(ii) S'il existe $1 \leq i \neq j \leq s$ tel que $g_i S g_j R_{Tr}\{g_1, \ldots, g_s\} = H \neq 0$, on pose $H = g_{s+1}$ et on recommence avec $\{g_1, \ldots, g_s, g_{s+1}\}$.

Ce processus s'arrête (voir [1]) construisant une base standard de I.

Cet algorithme est une variante de celui proposé par Mora dans ([26]). Alors que celui de Mora est de nature locale, celui-ci est de nature locale-globale et donc adapté à l'étude du comportement de la base standard lorsqu'on fait varier les coefficients de la forme linéaire L.

Remarque 2.6 : La base standard construite par notre algorithme est aussi un système de générateurs de l'idéal I. Une base standard n'est pas un système de générateur en général: Soit $I = (f_1, f_2)K[x_1, x_2]$ où $f_1 = x_1 - x_1^2$ et $f_2 = x_1 - x_1 x_2$, et soit $e_1 = e_2 = -1$. Alors f_1 est une base standard de I car $\mathrm{M}(I) = (x_1) = (\mathrm{M}(f_1))$, mais f_1 n'engendre pas I. Ceci est du au caractère local d'une base standard. Plus précisement, soit l'ensemble multiplicatif $S = \{1 + f, f \in A \text{ et } L(f) < 0\} \subseteq A$ et $S^{-1}I$ l'idéal engendré par I dans $S^{-1}A$. Soit d'autre part la filtration de A définie par les sous-groupes additifs $U(\alpha) = \{f \in A, L(f) < L(\alpha)\}$ et $\widehat{A}$ le complété de A par rapport à la topologie définie par cette filtration (remarquons que si $e_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, r$, $\widehat{A} = S^{-1}A = A$ et

$S^{-1}I = I$). Toutes les notations ci-dessus peuvent être étendues aux éléments et idéaux de $\widehat{A}$. On montre alors que le processus de division de la Section précédente construit des éléments $h_1, \ldots, h_r, h \in \widehat{A}$ tels que :

i) $f = \sum_{i=1}^{r} h_i f_i + h$.

ii) $\max_{h_i \neq 0}(\exp(h_i.f_i) \leq_L \exp(f)$.

iii) Si $h \neq 0$, alors $\exp(h) \leq_L \exp(f)$ et $\mathrm{Supp}(h) \subseteq \overline{\Delta}$.

Une base standard de I est aussi une base standard de $\widehat{I} = I.\widehat{A}$, qui est aussi un système de générateurs de $\widehat{I}$.

3 Complexité

L'algorithme de Buchberger a une complexité doublement exponentielle, i.e., le degré maximal des polynômes qui apparaissent dans le calcul d'une base de Gröbner possède une borne doublement exponentielle par rapport au degré maximal des générateurs de l'idéal et au nombre des indéterminées. Par ailleurs, D. Lazard ([20]) a démontré que l'algorithme de Buchberger peut être utilisé pour calculer une base standard, en homogénéisant le système de générateurs de l'idéal et en considérant l'extension de l'ordre $<_L$ à $\mathbf{N}^{n+1}$. Plus précisement, soit $g_1, \ldots, g_s$ un système de générateurs de l'idéal I de A et soit $h(g_1), \ldots, h(g_s)$ les homogénéisés de $g_1, \ldots, g_s$ dans $A[t]$. On considère sur $\mathbf{N}^n \times \mathbf{N}$ l'ordre total $<_h$ suivant:

$$(\alpha, a) <_h (\beta, b) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |\alpha| + a < |\beta| + b \\ \text{ou} \\ |\alpha| + a = |\beta| + b \text{ et } \alpha <_L \beta. \end{cases}$$

Le résultat suivant a été démontré par D. Lazard ([20]):

Proposition 3.1 : *si $F_1, \ldots, F_r$ est une base de Gröbner de l'idéal $J = (h(g_1), \ldots, h(g_s))$ pour l'ordre $<_h$ dans $A[t]$, alors $F_1(x, 1), \ldots, F_r(x, 1)$ est une base standard de l'idéal I de A.*

Ceci prouve en particulier que le degré maximal des éléments d'une base standard possède une borne doublement exponentielle par rapport au degré maximal des générateurs de l'idéal et au nombre des indétérminées. Utilisant ce résultat, j'ai proposé avec T. Mora (voir [5]) une variante de l'algorithme de calcul avec écart d'une base standard qui a la même complexité (doublement exponentielle) que celle de l'algorithme de Buchberger.

Notons ici que la complexité de l'algorithme de Mora et de celui de la Section précédente n'est pas connue.

4 Tropismes critiques d'un idéal

On reprend ici les notations des Sections 1) et 2). Soit $n = q + p$ et posons $x_i = T_i$ pour tout $1 \leq i \leq q$ (resp. $x_j = X_{j-q}$ pour tout $q+1 \leq j \leq n$). Soit $T = (T_1, \ldots, T_q)$, $X = (X_1, \ldots, X_p)$, et soit I un idéal de $K[T][X]$. Le morphisme naturel d'anneaux $\phi : K[T] \longmapsto K[T][X]/I, \phi(p(T)) = \mathrm{cl}(p(T))\mathrm{mod}I$ définit une famille de variétés algébriques paramétrées par $K[T]$. Soit d un réel négatif ou $-\infty$ et soit $L_d : \mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^p \longmapsto \mathbf{R}$ la forme linéaire définie par

$$L_d(\beta, \alpha) = |\alpha| + |\beta|/d \text{ if } d \neq 0, -\infty$$

$$L_0(\beta, \alpha) = -|\beta| \text{ and } L_{-\infty} = |\alpha|$$

où si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbf{N}^p$ (respectivement $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q) \in \mathbf{N}^q$), on note $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p$ (respectivement $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_q$).

Soit $f = \sum C_{\beta\alpha} t^\beta x^\alpha$ un élément non nul de A. On note $\mathrm{Supp}(f)$ (resp. $\nu(f, d)$, $\exp(f, d)$, $\mathrm{in}(f, d)$) le **support** de f (resp. le L_d**-ordre**, **l'exposant privilégié** de f, la **forme initiale** de f).

Soit I un idéal de $\mathbf{K}[T][X]$ et soit $d \in]-\infty, 0]$ ou $-\infty$. On note $\mathrm{in}(I,d)$ (resp. $\exp(I,d)$, resp. $\mathrm{M}(I,d)$) l'idéal initial de I (resp. l'ensemble des exposants privilégiés, resp. l'idéal monômial de I). On considère le morphisme naturel d'anneaux $\phi_d : K[T] \longmapsto K[T][X]/\mathrm{in}(I,d), \phi(p(T)) = \mathrm{cl}(p(T)) \mathrm{mod}\, \mathrm{in}(I,d)$.

dans ma thèse j'ai étudié les deux questions suivantes:

I) Comment varie $\mathrm{in}(I,d)$ lorsque d parcourt $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$?

II) Quelles proporiétés géométriques s'étendent de ϕ_d à ϕ?

En réponse à la première question, j'ai obtenu le théorème de finitude suivant:

Théorème 4.1 *:(voir [2],[6]) Soit I un idéal $\neq (0)$ de $\mathbf{K}[T][X]$; il existe une suite finie $\{d_1, \ldots, d_s\}$ de rationnels (éventuellement vide) telle que*

$$-\infty < d_1 < d_2 < \cdots < d_s < 0$$

et si on pose $d_0 = -\infty$ et $d_{s+1} = 0$, alors :

(i) $\forall j = 1, \ldots, s+1$, $\mathrm{in}(I,d)$, $d_{j-1} < d < d_j$ *est indépendant de d. On note* $\mathrm{in}(I,d) = I_{j-1}$.

(ii) Si on note $I'_j = \mathrm{in}(I, d_j)$, $j = 0, \ldots, s+1$, alors les I_j, I'_k, $j = 0, \ldots, s$, $k = 1, \ldots, s$, sont tous distincts et si $I'_0 \neq I_0$ (resp. $I'_{s+1} \neq I_s$), il en est de même pour $k = 0$ (resp. $k = s+1$).

(iii) Les inclusions suivantes sont impossibles : $I'_j \subseteq I'_k$, $I'_j \subseteq I_k$ et $I_j \subseteq I_k$ pour $0 \leq k \leq j-1$ et $I_j \subseteq I'_k$, $0 \leq k \leq j$.

Définition 4.2 Les rationnels $d_1, \ldots, d_s$ du théorème ci-dessus sont appelés les **tropismes critiques** de I. Cette notion a été introduite par M. Lejeune et B. Teissier dans un cadre local.

Le résultat du théorème 4.1. généralise à un idéal la notion de **polygone de Newton** associée à un polynôme de $\mathbf{K}[T][X]$, rappelée ci-dessous.

Soit $f = \sum C_{\beta\alpha} T^\beta X^\alpha$ un élément non nul de A ; on appelle polygone de Newton de f, la trace sur $\mathbf{R}^{+2}$ de l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^2$ de l'ensemble $\bigcup_{(\beta,\alpha)\in \mathrm{supp}\, f} \big(|\beta|, |\alpha|\big) + (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^-)$, où $\mathbf{R}^+$ (resp. $\mathbf{R}^-$) désigne l'ensemble des réels positifs (resp. négatifs) ou nuls. Le polygone de Newton de f possède un nombre fini de côtés ; si $-1/d_1 < -1/d_2 < \cdots < -1/d_s$ sont les pentes des côtés non parallèles aux deux axes et si on pose $d_0 = -\infty$ et $d_{s+1} = 0$, désignant par $L_{f,0}$ la droite contenant le côté parallèle à l'axe des x, la forme initiale $\mathrm{in}(f,d)$ est constante sur chacun des intervalles $]d_i, d_{i+1}[$, $i = 0, \ldots, s$ et si (b_i, a_i) est le point d'intersection de L_{f,d_i} et $L_{f,d_{i+1}}$, $0 \leq i \leq s$, alors:

$$\mathrm{in}(f,d) = M_{b_i,a_i} = \sum_{|\alpha|=a_i, |\beta|=b_i} C_{\beta\alpha} T^\beta X^\alpha \ , \ \forall d \in]d_i, d_{i+1}[\ .$$

La démonstration du théorème utilise de manière fondamentale les résultats de la Section 2. Cette approche effective m'a permis de calculer, partant d'un système de générateurs de I, l'ensemble de ses tropismes critiques.

Concernant la deuxième question, j'ai d'abord démontré que la finitude de ϕ est équivalente à celle de $\phi_{-\infty}$, et que cette assertion se lit sur les éléments d'une base de Gröbner de I pour $L_{-\infty}$. Je me suis ensuite intéressé au problème de la platitude de ϕ. J'ai alors démontré qu'une base de Gröbner de I pour $L_{-\infty}$ permet de construire effectivement un ouvert de platitude générique pour ϕ (i.e. un ouvert de Zariski $U \subseteq \mathrm{Spec}\mathbf{K}[T]$ tel que pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ dand U, $\mathbf{K}[T]_\mathcal{P}[X]/I_\mathcal{P}$ est un $\mathbf{K}[T]_\mathcal{P}$-module plat). Rappelons brièvement la construction de U: soit $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ une $L_{-\infty}$-base standard de I et soit $(\beta_i, \alpha_i) = \exp(f_i, -\infty)$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Posons $\forall 1 \leq i \leq r$, $\mathrm{In}(f_i, -\infty) = p_{\alpha_i} X^{\alpha_i}$. Puisque F est une $L_{-\infty}$-base standard de I, alors $\{\mathrm{In}(f_1, -\infty), \ldots, \mathrm{In}(f_r, -\infty)\}$ est un système de générateurs de $\mathrm{In}(I, -\infty) = (\mathrm{In}(f, -\infty) | f \in I - 0)$. Soit $\{X^{\alpha_{k_1}}, \ldots, X^{\alpha_{k_s}}\}$ un système minimal de générateurs de $(X^{\alpha_1}, \ldots, X^{\alpha_r})$ et soit, pour tout $1 \leq j \leq s$, $C_{\alpha_{k_j}}(F) = (p_{\alpha_{k_j}})\mathbf{K}[T]$. Soit finalement $J = \prod_{j=1}^s C_{\alpha_{k_j}}(F)$. On a:

Proposition 4.3 :*(voir [2],[6]) Pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ qui ne contient pas J, $\mathbf{K}[T]_{\mathcal{P}}[X]/I_{\mathcal{P}}$ est un $\mathbf{K}[T]_{\mathcal{P}}$-module plat.*

J'ai ensuite considéré le lien entre la platitude en (T) de $\phi_d, d_s < d < 0$ et celle de ϕ. Précisement, notons par (T) l'idéal maximal $(T_1, \ldots, T_q)$ de $\mathbf{K}[T]$ et soit $\mathbf{K}[T]_{(T)}$ le localisé de $\mathbf{K}[T]$ en (T). Quand est ce qu'on a l'équivalence entre (*) la platitude de $\mathbf{K}[T]_{(T)}[X]/\mathrm{in}(I, d)$, $d_s < d < 0$, sur $\mathbf{K}[T]_{(T)}$ et (**) celle de $\mathbf{K}[T]_{(T)}[X]/I$ sur $\mathbf{K}[T]_{(T)}$? j'ai obtenu à ce propos les résultats suivants:

Théorème 4.4 :*(voir [2],[6]) i) $\mathbf{K}[T]_{(T)}[X]/I$ est un $\mathbf{K}[T]_{(T)}$-module plat $\Longrightarrow \mathbf{K}[T]_{(T)}[X]/\mathrm{in}(I, d)$, $d_s < d < 0$, est un $\mathbf{K}[T]_{(T)}$-module plat. L'implication dans l'autre sens n'est pas vraie en général.*

ii) Sous l'une des conditions supplémentaires suivantes:

1) $q = 1$,

2) I est un idéal homogène par rapport à (X),

3) $\mathbf{K}[T]_{(T)}[X]/I$ est un $\mathbf{K}[T]_{(T)}$-module fini-,

l'implication dans i) est une équivalence.

En fait, pour avoir l'équivalence en général, il faut localiser un peu plus, précisement on a le résultat suivant:

Proposition 4.5 :*(voir [6]) Considérons dans $\mathbf{K}[T]_{(T)}[X]$ l'ensemble multiplicatif $S = \{1 + f(T, X); f(0, X) = 0\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes::*

(i) $\mathbf{K}[T]_{(T)}[X]/\mathrm{in}(I, d)$, $d_s < d < 0$ est un $\mathbf{K}[T]_{(T)}$-module plat.

(ii) $\mathrm{in}(I, d)$, $d_s < d < 0$, peut être engendré par des polynômes homogènes de $\mathbf{K}[X]$.

iii) $S^{-1}(\mathbf{K}[T][X]/I)$ est un $\mathbf{K}[T]_{(T)}$-module plat.

5 Platitude de certaines projections génériques

Soit R un anneau commutatif unitaire et Noethérien et soit $A = R[x] = R[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n indéterminées et à coefficients dans R. Soit, comme en Section 1, $L = \sum_{i=1}^{n} e_i\alpha_i \in \mathbf{R}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ une forme linéaire à coefficients dans $\mathbf{R}^+$ et $<$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^n$ compatible avec la structure du semi-groupe de $\mathbf{N}^n$, et considérons l'ordre total $<_L$ défini sur $\mathbf{N}^n$ à partir de L et $<$. Soit $0 \neq f$ un polynôme non nul de A. On définit le **support**, **l'exposant privilégié**, la **forme initiale**, et le **monôme initial** de f comme en Section 1. De même, soit I un idéal non nul de A, on définit comme en Section 1 **l'idéal initial**, **l'ensemble des exposants privilégiés**, et **l'idéal monômial de** I . On appelle **base de Gröbner de** I tout système d'éléments $f_1, \ldots, f_r$ de I tel que $\mathrm{M}(I) = (\mathrm{M}(f_1), \ldots, \mathrm{M}(f_r))$.

Soit $\psi : R \longmapsto R[x]/I$ (resp. $\psi_L : R \longmapsto R[x]/\mathrm{in}(I)$) le morphisme naturel d'anneaux et soit $\phi : \mathrm{Spec}R[x]/I \longmapsto \mathrm{Spec}R$ (resp. $\phi_L : \mathrm{Spec}R[x]/\mathrm{in}(I) \longmapsto \mathrm{Spec}R$) la projection définie par ψ (resp. ψ_L). Les questions étudiées en Section 4. se généralisent de manière naturelle a notre situation. Plus précisement:

Quels renseignements sur ψ peut on lire sur une base de Gröbner de I? Quant est ce que la platitude (resp. la finitude) de ψ_L implique celle de ψ?

Si $\{f_1, \ldots, f_r\}$ est une base de Gröbner de I, alors $\exp(I) = \bigcup_{i=1}^{r} \exp(f_i) + \mathbf{N}^n$. La réciproque n'est pas vraie en général. On appelle **escalier** de I, et on note par $\mathrm{esc}(I)$, l'ensemble $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} \subseteq \{\exp(f_1), \ldots, \exp(f_r)\}$ tel que $\exp(I) = \bigcup_{i=1}^{r} \alpha_i + \mathbf{N}^n$ et pour tout $1 \leq i \leq s, \alpha_i \notin \bigcup_{j \neq i} \alpha_j + \mathbf{N}^n$.

Dans [33], en vue de caractériser les bases de Gröbner sur R, W. Trinks a introduit les notations suivantes: soit E un sous-ensemble of A et soit $\alpha \in N^n$. On pose:

$M_\alpha(E) = \{c_\beta; \exists f \in E, M(f) = c_\beta x^\beta \text{ and } \alpha \in \beta + N^n\} \subseteq R.$

On note par $C_\alpha(E)$ l'idéal engendré par $M_\alpha(E)$ dans R. Remarquons que si I est un idéal de A, alors $C_\alpha(I) = (c_\alpha; \exists f \in I, M(f) = c_\alpha x^\alpha)R$.

Avec ces notations W. Trinks a obtenu le résultat suivant:

Proposition 5.1 : *(voir [33]) Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $F = \{f_1, \ldots, f_r\} \subseteq I$ *est une base de Gröbner de* I.
(ii) $\forall \alpha \in \mathrm{N}^n, C_\alpha(I) = C_\alpha(F)$.

Une base de Gröbner permet de construire un ouvert de platitude générique pour ϕ. Ceci généralise à $R[x]$ le résultat de la Proposition 4.3., plus précisement on a:

Proposition 5.2 : *(voir [7]) Soit* $J = \prod_{k=1}^{s} C_{\alpha_k}(I) \subseteq R$, *où* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} = esc(I)$. *Soit* $V(J) = \{\mathcal{P} \in SpecR; J \subseteq \mathcal{P}\}$ *et* $U = SpecR - V(J)$. *Alors* $\phi|\phi^{-1}(U) : \phi^{-1}(U) \longmapsto U$ *est plat.*

Ceci donne une réponse à la première question. Remarquons que l'ouvert U a la bonne propriété suivante: soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de R et soit $k(\mathcal{P})$ le corps résiduel du localisé $R_\mathcal{P}$ de R en $\mathcal{P}$. Soit $I(\mathcal{P}) = Ik(\mathcal{P})$. On a:

Proposition 5.3 : *(voir [7])* $\mathcal{P} \in U \Longrightarrow \mathrm{esc}(I(\mathcal{P})) = \mathrm{esc}(I)$.

La réciproque n'est pas vraie en général.

Soit maintenant $\mathcal{P}$ un idéal premier n'appartenant pas l̀'ouvert U introduit dans la Proposition 5.2. Pour tenter de tester si ϕ est plat en $\mathcal{P}$, j'ai d'abord supposé que R est un anneau principal. J'ai alors donné deux critères effectifs de platitude. Le premier est global, il est basé sur le résultat suivant:

Lemme 5.4 *(voir [7]) Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $R_\mathcal{P}[x]/I_\mathcal{P}$ *est un* $R_\mathcal{P}$*-module plat.*

ii) Soit $\mathcal{P} = (p)R$, *alors* p *n'est pas un diviseur de* 0 *dans* $R_\mathcal{P}[x]/I_\mathcal{P}$.

iii) $(I : \mathcal{P}) = \{r; p.r \in I\} = I$.

iv) $(I : \mathcal{P}^\infty) = \{r; \exists k \geq 0 \quad \text{t.q.} \quad p^k r \in I\} = I$.

Le deuxième est local-global. Il est basé sur la notion de bases standard avec écart minimal proposé par T. Mora (voir [3]), et le résultat suivant:

Lemme 5.5 *(voir [7]) Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $R_\mathcal{P}[x]/I_\mathcal{P}$ *est un* $R_\mathcal{P}$*-module plat.*

ii) Soit $\mathcal{P} = (p)R$, *alors* p *n'est pas un diviseur de* 0 *dans* $R_\mathcal{P}[x]/I_\mathcal{P}$.

iii) t *n'est pas un diviseur de* 0 *dans* $R[t][x]/(I, t-p)$.

J'ai ensuite considéré le cas général, i.e. R est un anneau quelconque. Pour tester la platitude de $R_\mathcal{P}[x]/I_\mathcal{P}$ sur $R_\mathcal{P}$, on considère la filtration $\mathcal{P}$-adique sur $R_\mathcal{P}[x]$ et le gradué associé à cette filtration. La $\mathcal{P}$-forme initiale $\mathrm{in}(I, \mathcal{P})$ par rapport à cette filtration est l'idéal engendré par les éléments $\mathrm{in}(f, \mathcal{P}), f \in I - 0$, où $\mathrm{in}(f, \mathcal{P})$ désigne l'image de f dans le gradué associé. Soit S l'ensemble multiplicatif $1 + \mathcal{P}R_\mathcal{P}[x]$ et soit $B = S^{-1}R_\mathcal{P}[x]$ et $J = I.B \bigcap R_\mathcal{P}[x]$. On a alors:

Proposition 5.6 *(voir [7]) Les conditions suivantes sont équivalentes:*
i) $R_\mathcal{P}[x]/J$ *est un* $R_\mathcal{P}$*-module plat.*
ii) $in(I, \mathcal{P}) = \mathrm{in}(J, \mathcal{P})$ *est engendré par des éléments d'ordre* 0 *(où on rappelle que l'ordre d'un élément* f *est le plus petit entier* s *tel que* $f \in \mathcal{P}^s$*).*

Ceci implique le résultat suivant:

Proposition 5.7 *(voir [7]) Sous l'une des conditions supplémentaires suivantes:*

1) I est engendré par des polynômes (x)-homogènes,

2) A/I est un R-module fini,

les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $R_{\mathcal{P}}[x]/I_{\mathcal{P}}$ est un $R_{\mathcal{P}}$-module plat.

ii) in(I) est engendré par des éléments d'ordre 0.

Dans cette approche j'ai été amené à généraliser à $R[x]$ la notion de **base standard** définie dans $\mathbf{K}[x]$, où $\mathbf{K}$ est un corps (voir Section 2.).

Tous les résultats de cette Section deviennent algorithmiques si R est un anneau constructif (voir ci-dessous). Dans ce cas il existe des algorithmes qui, partant d'un système de générateurs de l'idéal I, construisent une base de Gröbner de cet idéal (voir [33]). Dans ([2]) j'ai généralisé l'algorithme de calcul d'une base standard a cette situation.

Définition 5.8 *(voir [33]) On dit que R est un anneau constructif s'il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Soit J un idéal différent de (0) dans R et b un élément non nul de R, alors on peut décider si b appartient à I. Plus précisément, on peut construire un élément $\rho(b,I)$ ne dépendant que de la classe résiduelle de b modulo J, tel que $b-\rho(b,I)\in I$ et que $\rho(b,J)=0$ si et seulement si $b\in J$.

(ii) Sous les mêmes hypothèses que dans (i), $c_1,\ldots,c_s$ étant un système de générateurs de J, on peut calculer $\lambda_1,\ldots,\lambda_s\in R$ tels que $b-\rho(b,J)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i c_i$.

(iii) Soit $c_1,\ldots,c_s$ un système d'éléments de R, on peut calculer un système de générateurs du R-module $\big\{(y_1,\ldots,y_s)\in R^s\ ;\ \sum_{i=1}^{s}y_i c_i=0\big\}$.

6 Base standard universelle

Soit $S=\mathbf{K}[[x_1,\ldots,x_n]]$ l'anneau des séries formelles en $x_1,\ldots,x_n$ à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ et soit $L=\sum_{i=1}^{n}e_i\alpha_i\in\mathbf{R}_{-}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ une forme linéaire à coefficients dans $\mathbf{R}_{-}$. La forme linéaire L définit sur S une filtration tel que si $e_1=\ldots,e_r=0$ (resp. $e_{r+1}<0,\ldots e_n<0$), alors le gradué associé est $\mathrm{gr}^L(S)=\mathbf{K}[[x_1,\ldots,x_r]][x_{r+1},\ldots,x_n]$.

Soit $f=\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ un élément non nul de S. On appelle **Support** de f, et on note $\mathrm{Supp}(f)$, l'ensemble $\{\alpha;c_\alpha\neq 0\}$. On appelle ***L*-ordre** de f, et on note $\nu_L(f)$, l'élément $\nu_L(f)=\max\{L(\alpha);c_\alpha\in\mathrm{Supp}(f)\}$. On appelle **L-forme initiale** de f, et on note $\mathrm{in}(f,L)$, l'élément $\mathrm{in}(f,L)=\sum_{L(\alpha)=\nu_L(f)}c_\alpha x^\alpha$.

Soit I un idéal différent de (0) de S. On appelle **L-idéal initial** de I, et on note $\mathrm{in}(I,L)$, l'idéal engendré par $\{\mathrm{in}(f,L);f\in I-0\}$ dans S.

Soit $<$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^n$ compatible avec la structure du semi-groupe de $\mathbf{N}^n$. On considère sur $\mathbf{N}^n$ le bon ordre $<_L$ suivant:

$$\alpha <_L \beta \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} L(\alpha)<L(\beta) \\ \text{ou} \\ L(\alpha)=L(\beta) \text{ et } \beta<\alpha. \end{cases}$$

Soit $f=\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ un élément non nul de S. On appelle **L-exposant privilégié** de f, et on note $\exp(f)$, l'élément $\alpha_0=\max_{<_L}\mathrm{Supp}(f)=\max_{<}\mathrm{Supp}(\mathrm{in}(f,L))$. On appelle **L-monôme initial** de f, et on note $M(f,L)$, le monôme $c_{\alpha_0}x^{\alpha_0}$.

Soit I un idéal différent de (0) de S. On note $\exp(I,L) = \{\exp(f,L); f \in I-0\}$. On appelle **L-idéal monomial** de I, et on note $M(I,L)$, l'idéal de I engendré par $\{M(f,L); f \in I-0\}$.

On appelle **L-base standard** de I, tout système d'éléments $f_1,\ldots,f_r$ de I tel que $M(I,L) = (M(f_1,L),\ldots, M(f_r,L))$. On a le résultat suivant:

$\{f_1,\ldots,f_r\}$ est une base standard de $I \Longleftrightarrow \exp(I,L) = \bigcup_{i=1}^{r} \exp(f_i,L) + \mathbf{N^n}$

La question abordée dans [4] est la suivante: comment varie $\mathrm{in}(I,L)$ lorsque le vecteur $e = (e_1,\ldots,e_n)$ varie dans $\mathbf{R_-}^n$?

Dans le cas algébrique, avec les notations de la Section 1, T. Mora et L. Robbiano ([29]) avaient démontré que l'ensemble $\{\exp(I,L); e \in \mathbf{R}^+\}$ est fini. Ils ont associé à l'idéal I un éventail (une collection des cônes polyhédraux, rationnels, et convexes) dans $(\mathbf{R}^+)^n$ qui règle la répartition des éléments de cet ensemble. Dans le cas où les coefficients $e_1,\ldots,e_n$ sont de signe quelconque, le même résultat se généralise a $h(I)$, l'homogénéisé de I dans $\mathbf{K}[t][x_1,\ldots,x_n]$.

C'est ce résultat que j'ai généralisé aux idéaux de S. Plus précisement, j'ai d'abord obtenu le résultat de finitude suivant:

Proposition 6.1 :*(voir [4])* $\{\exp(I,L); e \in (\mathbf{R}^-)^n\}$ *est fini.*

Duquel j'ai déduit le résultat suivant:

Proposition 6.2 :*(voir [4])* $\{\mathrm{in}(I,L); e \in (\mathbf{R}^-)^n\}$ *est fini.*

Concernant la répartition de ces idéaux en fonction de L, j'ai démontré le résultat suivant: soit $E \subseteq \mathbf{N}^n$ et J est un idéal de S. Soit $U_E = \{e \in (\mathbf{R}_-)^n; \exp(I,L) = E\}$ et $V_{E,J} = \{e \in U_E; \mathrm{in}(I,L) = J\}$. On a:

Théorème 6.3 *(voir [4]): $V_{E,J}$ est un cône polyhédral convexe et rationnel. De plus, $U_E = \bigcup_J V_{E,J}$.*

j'ai précisé dans cet eventail les idéaux correspondant aux cônes de dimension maximale.

7 Bases Standard des $\mathcal{D}$-modules: notations

Le cas algébrique

Soit $A_n(\mathbf{C})$ (ou A_n) l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbf{C}[x] = \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n]$, et soit $L = \sum_{i=1}^n e_i\alpha_i + \sum_{i=1}^n f_i\beta_i \in \mathbf{R}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n]$ une forme linéaire à coefficients dans $\mathbf{R}$, où on suppose que $f_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit $<$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$ compatible avec la structure du semi-groupe de $\mathbf{N}^{2n}$. On considère sur $\mathbf{N}^{2n}$ le bon ordre $<_L$ suivant:

$$(\alpha,\beta) <_L (\alpha',\beta') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L(\alpha,\beta) < L(\alpha',\beta') \\ \text{ou} \\ L(\alpha,\beta) = L(\alpha',\beta') \text{ et } (\alpha',\beta') < (\alpha,\beta). \end{cases}$$

Soit $P = P(x,\partial) = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha,\beta}x^\alpha D^\beta$ un élément non nul de A_n. On appelle **Support** de P l'ensemble $\mathrm{Supp}(P) = \{(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^{2n} \mid p_{\alpha,\beta} \neq 0\}$. On appelle **$L$-ordre** de P, et on note $\nu_L(P)$, l'élément maximal de $\{L(\alpha,\beta),(\alpha,\beta) \in \mathrm{Supp}(P)\}$. On appelle **$L$-exposant privilégié** de P, et on note $\exp(P,L)$, l'élément de $\mathbf{N}^{2n}$ $\max_{<_L}(\mathrm{Supp}(P))$.

Si $e_i + f_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors pour tout $P,Q \in A_n$, $\nu_L(P.Q) = \nu_L(P) + \nu_L(Q)$, en particulier L definit une filtration sur A_n (où pour tout $k \in \mathbf{R}, F_k^L(A_n) = \{P \in A_n)|\nu_L(P) \leq k\})$. Soit $\mathrm{gr}^L(A_n))$ le gradué de A_n associé à cette filtration. On a:

Lemme 7.1 *Si $e_i + f_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, l$ (resp. $e_i + f_i = 0$ pour tout $i = l+1, \ldots, n$), alors:*

$$\mathrm{gr}^L(A_n) \simeq \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_l][D_{l+1}, \ldots, D_n]$$

Le symbole principal de $P \in A_n$ est l'élément de $\mathrm{gr}^L(A_n)$,

$$\sigma^L(P) = \sum_{L(\alpha,\beta)=\nu_L(P)} p_{\alpha\beta}\underline{x}^\alpha \xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_l^{\beta_l} D_{l+1}^{\beta_{l+1}} \cdots D_n^{\beta_n}$$

Si $exp(P, L) = (\alpha, \beta)$, on note $M(P) = p_{\alpha\beta}x^\alpha \xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_l^{\beta_l} D_{l+1}^{\beta_{l+1}} \cdots D_n^{\beta_n}$. On appelle $M(P)$ le monôme initial de P.

Remarquons que dans le cas commutatif, il n'y a pas de condition de type $e_i+f_i \geq 0$. Ici, puisque $D_ix_i - x_iD_i = 1$, nous devons demander que $\nu_L(1) \leq \nu_L(x_i) + \nu_L(D_i)$.

Soit I un idéal (à gauche) de A_n, on note $gr^L(I)$ l'idéal gradué, associé à la filtration induite par $F_{L,\bullet}$ sur I. L'idéal $gr^L(I)$ est engendré par la famille $\{\sigma^L(P) | P \in I - 0\}$ où $\sigma^L(P)$ est le symbole principal de P par rapport à L. On note $E_L(I)$ l'ensemble $\{\exp(P, L); P \in I - 0\}$.

Une famille $\{P_1, \ldots, P_r\}$ d'éléments de I est une **base standard** (relativement à l'ordre $<_L$, ou relativement à L) de I si $E_L(I) = \bigcup_{i=1}^r (\exp_L(P_i) + \mathbf{N}^{2n})$.

Le cas analytique

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbf{C})$ (ou $\mathcal{D}_n$) l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbf{C}\{x\} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et soit $L = \sum_{i=1}^n e_i\alpha_i + \sum_{i=1}^n f_i\beta_i \in \mathbf{R}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n]$ une forme linéaire à coefficients dans $\mathbf{R}$, où on suppose que $e_i \leq 0$ et $f_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit $<$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$ compatible avec la structure du semi-groupe de $\mathbf{N}^{2n}$. On considère sur $\mathbf{N}^{2n}$ le bon ordre $<_L$ suivant:

$$(\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L(\alpha, \beta) < L(\alpha', \beta') \\ \text{ou} \\ L(\alpha, \beta) = L(\alpha', \beta') \text{ et } |\beta| < |\beta'| \\ \text{ou} \\ L(\alpha, \beta) = L(\alpha', \beta'), |\beta| = |\beta'| \text{ et } (\alpha', \beta') < (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Soit $P = P(x, \partial) = \sum_\beta p_\beta(x)D^\beta = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha,\beta}x^\alpha D^\beta$ un élément non nul de $\mathcal{D}_n$. On appelle **Support** de P l'ensemble $\mathrm{Supp}(P) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n} \mid p_{\alpha,\beta} \neq 0\}$. On appelle **$L$-ordre** de P, et on note $\nu_L(P)$, l'élément maximal de $\{L(\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \in \mathrm{Supp}(P)\}$. On appelle **$L$-exposant privilégié** de P, et on note $\exp(P, L)$, l'élément de $\mathbf{N}^{2n}$ $\max_{<_L}(\mathrm{Supp}(P))$.

Si $e_i + f_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors pour tout $P, Q \in \mathcal{D}_n$ $\nu_L(P.Q) = \nu_L(P) + \nu_L(Q)$, en particulier L definit une filtration sur $\mathcal{D}_n$ (où pour tout $k \in \mathbf{R}, F_k^L(\mathcal{D}_n) = \{P \in \mathcal{D}_n; \nu_L(P) \leq k\}$). Soit $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n)$ le gradué de $\mathcal{D}_n$ (resp. A_n) associé à cette filtration. On a:

Lemme 7.2 *Sous les conditions suivantes:*

- *$e_i < 0$ pour $1 \leq i \leq p_2$ avec $e_i + f_i = 0$ for $1 \leq i \leq p_1$ et $e_i + f_i > 0$ pour $p_1 < i \leq p_2$*
- *$e_i = 0, f_i > 0$ pour $p_2 < i \leq p_3$*
- *$e_i = f_i = 0$ pour $p_3 < i \leq n$,*

$\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n)$ est isomorphe à

$$\mathbf{C}\{x_{p_2+1}, \ldots, x_n\}[x_1, \ldots, x_{p_2}, \xi_{p_1+1}, \ldots, \xi_{p_3}, D_1, \ldots, D_{p_1}, D_{p_3+1}, \ldots, D_n]$$

Le symbole principal de $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha.\beta}x^\alpha D^\beta \in \mathcal{D}_n$ est la classe de P dans $F_{L,\nu_L(P)}/F_{L,<\nu_L(P)}$.

Si $\exp(P) = (\alpha, \beta)$*, on note* $M(P) = p_{\alpha\beta}\xi_{p_1+1}^{\beta_{p_1+1}} \cdots \xi_{p_3}^{\beta_{p_3}} D_1^{\beta_1} \cdots D_{p_1}^{\beta_{p_1}} D_{p_3+1}^{\beta_{p_3+1}} \cdots D_n^{\beta_n}$*. On appelle* $M(P)$ *le monôme initial de* P*.*

Comme dans le cas algébrique, puisque $-x_iD_i + D_ix_i = 1$, il n'y a pas de condition de type $e_i + f_i \geq 0$.

Soit I un idéal (à gauche) de $\mathcal{D}_n$ (resp. A_n), on note $gr^L(I)$ l'idéal gradué, associé a la filtration induite par $F_{L,\bullet}$ sur I. L'idéal $gr^L(I)$ est engendré par la famille $\{\sigma^L(P) | P \in I\}$ où $\sigma^L(P)$ est le symbole principal de P par rapport à L. On note $E_L(I)$ l'ensemble $\{\exp(P, L); P \in I - 0\}$.

Une famille $\{P_1, \ldots, P_r\}$ d'éléments de I est dite une **base standard** (relativement à l'ordre $<_L$, ou relativement à L) de I si $E_L(I) = \bigcup_{i=1}^r (\exp_L(P_i) + \mathbf{N}^{2n})$.

8 Algorithmes de calcul de bases standard

On reprend ici les notations de la Section précédente. En particulier $L = \sum_{i=1}^n e_i\alpha_i + \sum_{i=1}^n f_i\beta_i \in \mathbf{R}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n]$ est une forme linéaire à coefficients dans $\mathbf{R}$. Nous nous intéressons ici au problème suivant: soit I un idéal à gauche de A_n (resp. de $\mathcal{D}_n$). Etant donné un système de générateurs de I, comment calculer une base standard?

Bases de Gröbner des idéaux de A_n

On suppose ici que les coefficients $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ sont positifs ou nuls. On suppose que $e_i + f_i > 0$ (resp $e_j + f_j = 0$) pour tout $1 \leq i \leq l$ (resp. $l + 1 \leq j \leq n$). La construction d'une base standard (ou de Gröbner) est basée sur un théorème de division similaire à celui de la Section 1. Plus précisement:

Soit $\{P_1, \ldots, P_r\}$ un ensemble d'éléments de A_n, tous non nuls et soit $(\alpha_i, \beta_i) = \exp(P_i)$ pour tout $1 \leq i \leq r$. On considère la partition Δ, $\overline{\Delta}$ de $\mathbf{N}^n$, relative à $P_1, \ldots, P_r$, telle que $\Delta = \bigcup_{i=1}^r (\alpha_i, \beta_i) + \mathbf{N}^{2n}$ et $\overline{\Delta} = \mathbf{N}^{2n} - \Delta$. Soit P un élément non nul de A_n et posons $(\alpha, \beta) = \exp(P)$.

Théorème 8.1 *On peut construire des éléments* $Q_1, \ldots, Q_r, R \in A_n$ *tel que:*

i) $P = \sum_{i=1}^r Q_iP_i + R$

ii) $max_{Q_i \neq 0}\exp(Q_iP_i) \leq (\alpha, \beta)$.

iii) Si $R \neq 0$*, alors* $exp(R) \leq (\alpha, \beta)$ *et* $Supp(R) \subseteq \overline{\Delta}$.

La démonstration du théorème est similaire à celle du théorème 1.1. à une différence près: on divise d'abord $\sigma(P, L)$ par $\sigma(P_1, L), \ldots, \sigma(P_r, L)$, puis on relève la division à A_n, et ainsi de suite... Ce processus s'arrête car $<_L$ est Nothérien.

On appelle R le **reste de la division** de P par $P_1, \ldots, P_r$, et on note $R = PR\{P_1, \ldots, P_r\}$.

Soit P, Q deux élements de A_n et soit, avec les notations de la Section 7., $M(P) = c_{(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1)}x^{\alpha^1}D^{\beta^1}\xi^{\gamma^1}$ et $M(Q) = d_{(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)}x^{\alpha^2}D^{\beta^2}\xi^{\gamma^2}$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) = \text{p.p.c.m.}\{(\alpha^1, \beta^1, \gamma^1), (\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\}$. On pose

$$PSQ = d_{(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)}x^{\alpha-\alpha^1}D^{\beta-\beta^1}\xi^{\gamma-\gamma^1}P - c_{(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1)}x^{\alpha-\alpha^2}D^{\beta-\beta^2}\xi^{\gamma-\gamma^2}Q,$$

de sorte que $\exp(PSQ) <_L (\alpha, \beta, \gamma)$.

Le résultat suivant est similaire à celui de la Proposition 1.2.:

Proposition 8.2 *: Un système de générateurs* $P_1, \ldots, P_r$ *de l'idéal* I *est une base de Gröbner de* I *si* $\forall 1 \leq i \neq j \leq r, P_iSP_jR\{P_1, \ldots, P_r\} = 0$.

On a aussitôt l'algorithme suivant:

Algorithme: Soit $Q_1, \ldots, Q_s$ un système de générateurs de I:

(i) Si $\forall 1 \leq i \neq j \leq s$, $Q_i S Q_j R\{Q_1, \ldots, Q_s\} = 0$, alors $\{Q_1, \ldots, Q_s\}$ est une base de Gröbner de I.

(ii) S'il existe $1 \leq i \neq j \leq s$ tel que $Q_i S Q_j R\{Q_1, \ldots, Q_s\} = H \neq 0$, on pose $H = Q_{s+1}$ et on recommence avec $\{Q_1, \ldots, Q_s, Q_{s+1}\}$.

Ce processus s'arrête après un nombre fini d'étapes, construisant un système de générateurs de I qui est aussi une base de Gröbner de I.

Bases standard des idéaux de A_n

On suppose ici que les f_i sont positifs ou nuls mais que les e_i sont de signe quelconque. L'ordre total $<_L$ n'est plus dans ce cas Noethérien. Pour surmonter cette difficulté, on a introduit les techniques d'homogénéisation et proposé un théorème de division dans $A_n[t]$ qui nous a permis de construire effectivement une base standard (voir [9]).

Soit $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha,\beta} x^\alpha D^\beta \in A_n$ on appelle **ordre total** de P (et on note $\mathrm{ord}^T(P)$) le nombre entier $\max\{|\alpha| + |\beta| \text{ t.q. } p_{\alpha,\beta} \neq 0\}$. On pose $A_n[t] = A_n \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[t]$. On appelle homogénéisé de P l'opérateur différentiel $h(P) = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha,\beta} t^{\mathrm{ord}^T(P) - |\alpha| - |\beta|} x^\alpha D^\beta \in A_n[t]$.

On définit sur $\mathbf{N}^{2n+1}$ le bon ordre total, noté $\prec_L$, compatible avec la somme :

$$(k, \alpha, \beta) \prec_L (k', \alpha', \beta') \Longleftrightarrow \begin{cases} k + |\alpha| + |\beta| < k' + |\alpha'| + |\beta'| \\ \text{ou bien } \begin{cases} k + |\alpha| + |\beta| = k' + |\alpha'| + |\beta'| \text{ et} \\ (\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta') \end{cases} \end{cases}$$

On appelle $\prec_L$ l'extention de $<_L$ à $\mathbf{N}^{2n+1}$. On a pour tout $H \in A_n[t]$ des notions de **Support** et d'**exposant privilégié** $\exp_{\prec_L}(H)$. On note $\pi : \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{2n} = \mathbf{N}^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{N}^{2n}$ la projection sur $\mathbf{N}^{2n}$.
Si $(\mu^1, \ldots, \mu^r) \in (\mathbf{N}^{2n+1})^r$ on lui associe la partition $\{\Delta, \overline{\Delta}\}$ de $\mathbf{N}^{2n+1}$ tel que:

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{r} \mu^i + \mathbf{N}^{2n+1} \text{ et } \overline{\Delta} = \mathbf{N}^{2n+1} \setminus \Delta.$$

Théorème 8.3 *Soit $P_1, \ldots, P_r$ un ensemble d'éléments non nuls de A_n. On note $\{\Delta, \overline{\Delta}\}$ la partition de $\mathbf{N}^{2n+1}$ associée à $(\exp_{\prec_L}(h(P_1)), \ldots, \exp_{\prec_L}(h(P_r)))$. Alors, pour tout $P \in A_n[t]$ il existe $Q_1, \ldots, Q_r, R$ dans $A_n[t]$ tel que:*

1. $P = \sum Q_i h(P_i) + R$.
2. $\exp_{\prec_L}(Q_i h(P_i)) \preceq_L \exp_{\prec_L}(P)$ *pour* $1 \leq i \leq r$ *tel que* $Q_i \neq 0$.
3. *Si $R \neq 0$, alors* $\mathrm{Supp}(R) \subset \overline{\Delta}$ *et* $\exp(R) \preceq_L \exp_{\prec_L}(P)$.

Ce résultat "homogène" implique le résultat suivant:

Proposition 8.4 *Soit $P_1, \ldots, P_r$ un ensemle d'éléments non nuls de A_n, et soit $P \in A_n[t]$. Soit $R^{(1)}$ le reste de la division de P par $(h(P_1), \ldots, h(P_r))$ et soit $R^{(p)}$, $p \geq 2$, le reste de la division de $h(R^{(p-1)}{}_{|t=1})$ par $(h(P_1), \ldots, h(P_r))$. Alors il existe s minimum tel que* $\mathrm{Supp}(h(R^{(s)}{}_{|t=1})) \subset \overline{\Delta}$.

On appelle $R^{(s)}$ le **reste de la division itérée** de P par $\{h(P_1), \ldots, h(P_r)\}$. Il est noté $R^{it}(P; h(P_1), \ldots, h(P_r))$.

Soient $H_1, H_2 \in A_n[t]$. On note $\mu^i = \exp(H_i)$ et $\mu = ppcm(\mu^1, \mu^2)$. Ecrivons $\mu = \nu^1 + \mu^1 = \nu^2 + \mu^2$. On pose $H_1 S H_2 = M_1 H_1 - M_2 H_2$ où M_i est le monôme d'exposant ν^i et de coefficient $1/c(H_i)$, $c(H_i)$ étant le coefficient du monôme correspondant à $\exp_{\prec_L}(H_i)$. On a aussitôt le résultat suivant:

Proposition 8.5 *Soit $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots, P_r\} \subset A_n$ un système de générateurs de l'idéal I tel que, pour tout couple (i,j), le reste itéré de la division de $h(P_i)Sh(P_j)$ par $(h(P_1), \ldots, h(P_r))$ est égal à zéro, modulo $(t-1)A_n[t]$. Alors $\mathcal{F}$ est une base standard de I.*

De ce résultat on déduit un algorithme de construction de bases stantard, à partir d'un système de générateurs de I, consistant à ajouter les déshomogénéisés des restes itérés des syzygies élémentaires.

Peu après, F. Castro et L. Narvaez proposaient dans ([18]) d'homogénéiser en respectant les relations dans A_n, i.e. $h(D_i x_i) = x_i D_i + t^2$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Avec cette nouvelle définition, soit P, Q deux éléments non nuls de A_n, alors $h(PQ) = h(QP) = h(P).h(Q)$, par conséquent, la division d'un opérateur homogène par une suite d'opérateurs homogènes dans $A_n[t]$ produit des quotients et un reste homogènes. D'un autre côté, la forme linéaire $L^h(k, \alpha, \beta) = L(\alpha, \beta)$ induit sur $A_n[t]$ une filtration pour laquelle, soit $h(I)$ l'idéal de $A_n[t]$ engendré par $\{h(P); P \in I - 0\}$ et soit $gr^L(h(I))$ l'idéal gradué associé à $h(I)$, alors $gr^L(I) = gr^L(h(I))|_{t=1}$ et $\pi(\exp_{\prec_L}(h(I)) = \exp_{<_L}(I)$, où π désigne la projection sur $\mathbf{N}^{2n}$. On a ainsi un algorithme de calcul d'une base standard similaire à celui proposé par D. Lazard dans le cas commutatif. Il consiste à calculer une base standard de $h(I)$ pour $\prec_L$ puis à déshomogénéiser les éléments de la base.

Remarquons que les résultats ci-dessus s'adaptent facilement aux idéaux à gauche de $\mathcal{D}_n$, donnés par des opérateurs algébriques.

9 Pentes des $\mathcal{D}$-modules

On reprend ici les notations de la Section précédente. En particulier $L = \sum_{i=1}^n e_i \alpha_i + \sum_{i=1}^n f_i \beta_i \in \mathbf{R}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n]$ est une forme linéaire à coefficients dans $\mathbf{R}$. On se restreint ici aux formes L telles que $f_1 = p+q, f_2 = \ldots = f_n = 1, e_1 = -q, e_2 = \ldots = e_n = 0$ (avec (p,q) entiers non négatifs, premiers entre eux). Plus précisement, $L(\alpha, \beta) = p|\beta| + q(\beta_1 - \alpha_1)$. Si P est un opérateur différentiel, on appelle L-ordre de P, et on note $ord_L(P)$, le maximum des $L(\alpha, \beta)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Supp}(P)$. On note L_0 (resp. L_1) la forme définie par $L_0(\alpha, \beta)) = |\beta|$ (resp. $L_1(\alpha, \beta) = \beta_1 - \alpha_1$).

Soit I un idéal (à gauche) de $\mathcal{D}_n$ (resp. A_n) et soit $gr^L(I)$ l'idéal gradué, associé a la filtration induite par $F_{L,\bullet}$ sur I (voir Section 7). Rappelons que l'idéal $gr^L(I)$ est engendré par la famille $\{\sigma^L(P) | P \in I - 0\}$ où $\sigma^L(P)$ est le symbole principal de P par rapport à L. Si $L \neq L_1$, (resp. $L = L_1$) on a :

$$\sigma^L(P) = \sum_{L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) = ord_L(P)} p_{\alpha,\beta} x^\alpha \xi^\beta \quad (\text{resp.} \sum_{\beta_1 - \alpha_1 = ord_{L_1}(P)} p_{\alpha,\beta} x^\alpha D^\beta)$$

Si P est un élément différent de 0 de A_n (resp. $\mathcal{D}_n$), on note par $\exp(P, L)$ l'exposant privilégié de P par rapprot à l'ordre total $<_L$.
Si I est un idéal de A_n (resp. $\mathcal{D}_n$),on note $\exp(I, L)$ l'ensemble $\{\exp(P, L) | P \in I - 0\}$.

La forme linéaire L_0 induit la filtration (notée par $\mathbf{F}$) définie par l'ordre. La forme linéaire L_1 induit la filtration notée par $\mathbf{V}$ et appelée filtration de Malgrange-Kashiwara. Si $L \neq L_0, L_1$, la filtration induite par L est une filtration intermédiare entre $\mathbf{F}$ et $\mathbf{V}$. Supposons $L \neq L_0, L_1$ et soit $r = p/q \in \mathbf{Q}^+$. Il est alors évident que $gr^L(I) = gr^{L_r}(I)$ où $L_r(\alpha, \beta) = r|\beta| + (\beta_1 - \alpha_1)$. Dans [21], Y. Laurent a démontré que $gr^{L_r}(I)$ est localement constant sur $\mathbf{Q}^+$, i.e. il existe un nombre fini de rationnels $r_1, \ldots, r_s$ tel que si on pose $r_0 = 0, r_{s+1} = +\infty$, alors $gr^{L_r}(I)$ ne dépend pas de $r \in]r_i, r_{i+1}[$ pour tout $0 \leq i \leq s$. Les rationnels $r_1, \ldots, r_s$ sont appelés les indices critiques de l'idéal I. Ce sont les rationnels r pour lesquels $gr^{L_r}(I)$ n'est pas bihomogène (On dit que $gr^{L_r}(I)$ est bihomogène s'il existe $a, b \in \mathbf{N}$ et un système de générateurs de $gr^{L_r}(I)$ de la forme peur être engendré par des éléments de la forme $\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} x^\alpha \xi^\beta$ avec $c_{\alpha,\beta} \neq 0$ $\beta_1 - \alpha_1 = a, |\beta| = b$). Ces rationnels généralisent à un idéal la notion du polygône de Newton d'un opérateur différentiel défini de la manière suivante:

Soit $P \in A_n$ (resp. $\mathcal{D}_n$). On appelle **polygone de Newton de** P et on note $\mathcal{P}(P)$, l'enveloppe convexe, dans $\mathbf{R}^2$, de l'ensemble:

$$\bigcup_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{Supp}(P)} ((|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) + (-\mathbf{N})^2).$$

Les pentes des faces non compactes de $\mathcal{P}(P)$ donnent les indices critiques de l'idéal engendré par P. Lorsque $n = 1$, l'absence des indices critiques est équivalente a la régularité de $\mathcal{D}_n/(P)$. En dimension supérieur, les indices critiques de l'idéal I tel qu'ils sont définies ci-dessus mesurent l'irrégularité de $\mathcal{D}_n/I$ le long de l'hypersurface $x_1 = 0$.

C'est le résultat de finitude que l'on retrouve en utilisant l'approche effective des bases standard. Ceci nous a permis de donner un algorithme de calcul des indices critiques de l'idéal I lorsqu'un système de générateurs de I est donné.

10 Bases standard universelles

Cas algébrique

Soit I un idéal à gauche de A_n, différent de (0) et reprenons les notations de la Section 7. Dans [10] on s'est intéressé au problème suivant: Etudier le comportement de l'idéal gradué $gr^L(I)$ lorsque les coefficients $(e_i, f_i)_{1\leq i\leq n}$ varient dans le sous ensemble $U = \{(e, f) \in \mathbf{R}^{2n}; e_i + f_i \geq 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbf{R}^{2n}$.

Soit $h(I)$ l'homogénéisé de I dans $A_n[t]$ (où h désigne ici l'opération d'homogénéisation au sens de [18]). Soit $\exp_{\prec_L}$ l'extention de l'ordre $<_L$ à $\mathbf{N}^{2n+1}$ (voir Section 8).

Utilisant les techniques d'homogénéisation de [18], et le Théorème de division qui en résulte dans $A_n[t]$, nous avons d'abord obtenu le résultat de finitude suivant:

Théorème 10.1 *(voir [10]) L'ensemble* $\{\exp_{\prec_L}(h(I)); (e, f) \in U\}$ *est fini.*

A partir duquel nous avons démontré le résultat suivant:

Théorème 10.2 : *(voir [10]) L'ensemble* $\{gr^L(h(I)); (e, f) \in U\}$ *est fini.*

Comme $gr^L(h(I))|_{t=1} = gr^L(I)$, il suit que:

Corollaire 10.3 : *(voir [10]) L'ensemble* $\{gr^L(I); (e, f) \in U\}$ *est fini.*

Nous nous sommes ensuite intéressés au problème de la répartition des ensembles ci-dessus dans U. Soit E un sous ensemble de $\mathbf{N}^{2n+1}$ et soit $U_E = \{(e, f) \in U; \exp_{\prec_L}(h(I)) = E\}$. Avec ces notations nous avons démontré le résultat suivant:

Théorème 10.4 : *(voir [10]) Il existe une partition $\mathcal{E}$ de U suivant des cônes polyhèdraux rationnels et convexes, telle que pour tout élément σ de $\mathcal{E}$, $\exp_{\prec_L}(h(I))$ et $gr^L(h(I))$ ne dépendent pas de (e, f) dans σ. De plus, chaque U_E est convexe et réunion de cônes de $\mathcal{E}$.*

Ce résultat ne reste pas vrai si on remplace $h(I)$ par I. Elle le devient si on suppose que les e_i sont positifs ou nuls. Précisement, soit E un sous ensemble de $\mathbf{N}^{2n}$ et et considérons le sous ensemble $U' \subseteq U$ des éléments (e, f) pour lesquels $e_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit $U'_E = \{(e, f) \in U'; \exp(I, L) = E\}$. On a:

Théorème 10.5 : *Il existe une partition $\mathcal{E}$ de U' suivant des cônes polyhèdraux rationnels et convexes, tel que pour tout élément σ de $\mathcal{E}$, $\exp_{<_L}(I)$ et $gr^L(I)$ ne dépendent pas de (e, f) dans σ. De plus, chaque U'_E est convexe et réunion de cônes de $\mathcal{E}$.*

Le cas analytique

Dans [11] nous avons généralisé les résultats ci-dessus aux idéaux de $\mathcal{D}_n$. Plus précisement on s'est intéressé au problème suivant: Soit I un idéal à gauche de $\mathcal{D}_n$, différent de (0) et reprenons les notations de la Section 7. Etudier le comportement de l'idéal gradué $gr^L(I)$ lorsque les coefficients $(e_i, f_i)_{1\leq i\leq n}$ varient dans le sous ensemble $U = \{(e,f) \in \mathbf{R}^{2n}; e_i \leq 0, f_i \geq 0 \text{ and } e_i + f_i \geq 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbf{R}^{2n}$.

Nous avons pour ce faire considéré l'anneau $\mathcal{D}_n[t]$ avec les relations:

$$[t,a] = [t,D_i] = [a,b] = [D_i,D_j] = 0, [D_i,a] = \frac{\partial a}{\partial x_i}t$$

où $a, b \in \mathbf{C}\{x\}$. L'algèbre $\mathcal{D}[t]$ est une algèbre graduée; la graduation, en d, étant

$$\mathcal{D}[t] = \bigoplus_{d\geq 0}\left(\bigoplus_{k+|\beta|=d}\mathbf{C}\{x\}t^k D^\beta\right).$$

Soit $P = \sum_{\beta\in\mathbf{N}^n} p_\beta(x)D^\beta$ un élément non nul de $\mathcal{D}$. L'opérateur

$$h(P) = \sum_\beta p_\beta(x)t^{\mathrm{ord}^F(P)-|\beta|}D^\beta \in \mathcal{D}[t]$$

est appelé l'homogénéisé de P (où $\mathrm{ord}^F(P) = \max\{|\beta|, p_\beta(x) \neq 0\}$).

On définit l'idéal à gauche $h(I)$ de $\mathcal{D}_n[t]$ comme étant l'idéal engendré par $\{h(P); P \in I - 0\}$.

Comme dans le cas algébrique, la forme linéaire $L^h(k,\alpha,\beta) = L(\alpha,\beta)$ définit sur $\mathcal{D}_n[t]$ une filtration, et si note par $gr^L(h(I))$ le gradué associé à $h(I)$ pour cette filtration, alors $gr^L(h(I))|_{t=1} = gr^L(I)$. De plus, si $\prec_L$ désigne l'extention de $<_L$ à $\mathbf{N}^{2n+1}$, alors $\pi(\exp_{\prec_L}(h(I))) = \exp_{<_L}(I)$.

Nous avons d'abord obtenu dans l'anneau $\mathcal{D}_n[t]$ un Théorème de division convergente, ce qui représentait la majeure difficulté pour généraliser les résultats algébriques. Utilisant ce Théorème, et avec les notations ci-dessus, nous avons d'abord obtenu le résultat de finitude suivant:

Théorème 10.6 : *(voir [11]) L'ensemble* $\{\exp_{\prec_L}(h(I)); (e,f) \in U\}$ *est fini.*

A partir duquel nous avons démontré le résultat suivant:

Théorème 10.7 : *(voir [11]) L'ensemble* $\{gr^L(h(I)); (e,f) \in U\}$ *est fini.*

Comme $gr^L(h(I))|_{t=1} = gr^L(I)$, il suit que:

Corollaire 10.8 : *(voir [11]) L'ensemble* $\{gr^L(I); (e,f) \in U\}$ *est fini.*

Concernant la répartition de ces ensembles dans U, soit E un sous ensemble de $\mathbf{N}^{2n+1}$ et soit $U_E = \{(e,f) \in U; \exp_{\prec_L}(h(I)) = E\}$. Nous avons démontré le résultat suivant:

Théorème 10.9 : *(voir [11]) Il existe une partition $\mathcal{E}$ de U suivant des cônes polyhèdraux rationnels et convexes, telle que pour tout élément σ de $\mathcal{E}$, $gr^L(h(I))$ et $\exp_{\prec_L}(h(I))$ ne dépendent pas de (e,f) dans σ. De plus, chaque U_E est convexe et réunion de cônes de $\mathcal{E}$.*

References

[1] A. Assi.- Une variante de l'algorithme de Mora, C.R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 310 (1990), n^o 10, 683–686.

[2] A. Assi.- Constructions effectives en Algèbre commutative, Thèse, Institut Fourier, Université Joseph Fourier, 1991

[3] A.Assi.- Homogénéisation et bases standard avec écart minimal, Preprint, 1991

[4] A. Assi.- Some remarks on universal standard bases, Preprint, 1993

[5] A. Assi, T. Mora.- The virtues of laziness: complexity of the tangent cone algorithm, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 4 (1993), n^o 4, 231–238.

[6] A. Assi.- Standard bases, critical tropisms and flatness, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 4 (1993), n^o 3, 197–215.

[7] A. Assi.- On flatness of generic projections, J. Symbolic Comput. 18 (1994), n^o 5, 447–462.

[8] A. Assi., F. J. Castro-Jiménez, J.-M. Granger.- Dtermination des pentes des $\mathcal{D}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 320 (1995), n^o 2, 193–198.

[9] A. Assi., F. J. Castro-Jiménez, J.-M. Granger.- How to calculate the slopes of a $\mathcal{D}$-module, Compositio Math., 104 (1996), 107-123.

[10] A. Assi., F. Castro, J.-M. Granger.- The Grobner fan of an A_n-module, J. Pure Appl. Algebra 150 (2000), n^{o}1, 27–39.

[11] A. Assi., F. Castro, J.-M. Granger.- The analytic standard fan of a $\mathcal{D}$-module, Effective methods in algebraic geometry (Bath, 2000). J. Pure Appl. Algebra 164 (2001), n^o 1-2, 3–21.

[12] D. Bayer and D. Mumford.- What can be computed in algebraic geometry? dans: D. Eisenbud and L. Robbiano, eds., Computational algebraic geometry and commutative algebra, Procceding Cortona 1991, Cambridge University Press, 1993, pp. 1-48.

[13] J. Briançon.- Weierstrass préparé à la Hironaka, dans "Singularités Cargèse", Asterisque n^{0}s 7 et 8 (1972), 67–73.

[14] B. Buchberger.- Ein algorithmisches Kriterium for die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems, Aequationes Math. 4 (1970) 374-383.

[15] F. Castro.- Thèse de 3ème cycle, Univ. de Paris VII, 1984.

[16] F. Castro.- Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels, in: J.M. Aroca et al., eds., Géométrie algébrique et applications, Travaux en Cours, vol. 24, Hermann, Paris, 1987, pp. 1-19.

[17] F. Castro-Jiménez, J.-M. Granger.- Explicit calculations in rings of differential operators, Preprint n^0 40, 1997, Université d'Angers.

[18] F. Castro-Jiménez, L. Nárvaez-Macarro.- Homogenising differential operators, Preprint n^0 36, 1997, Universidad de Sevilla.

[19] H. Hironaka.- Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Annals of Maths 79 (1964), 109–326.

[20] D. Lazard.- Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations, in: Proc. of Eurocal 83, Springer, L.N.C.S. 162, pp. 146-156.

[21] Y. Laurent.- Polygone de Newton et b-fonction pour les modules microdifférentiels, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, 20 (1987) 391-441.

[22] Y. Laurent et Z. Mebkhout.- Pentes algébriques et pentes analytiques, Prépublication n^0 372, Institut Fourier, 1997.

[23] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier.- Transversalité, polygone de Newton et installations, dans "Singularités à Cargèse", Astérisque n^0 7,8 (1973), 75–119.

[24] M. Lejeune-Jalabert.- Effectivité de calculs polynomiaux, Cours de D.E.A., Institut Fourier, Université de Grenoble I (1984-85).

[25] Z. Mebkhout.- Le polygone de Newton d'un $\mathcal{D}_X$–module, in: A. Campillo and L. Narváez-Macarro, eds., Algebraic geometry and singularities, Progress in Math., vol. 134, 1996, pp. 237-258.

[26] F. Mora.- An algorithm to compute the equations of tangent cones, Proc. Eurocam 83, Springer, L.N.C.S. 144 (1982), 24–31.

[27] F. Mora.- A constructive characterization of standard bases Belletino I.M.I., Algebra e Geometria, Série VI-II (1983), 158–165.

[28] T. Mora.- Seven variations on standard bases Preprint, Univ. Genova (1988).

[29] T. Mora, L. Robbiano.- The Gröbner fan of an ideal, Journal of Symbolic Computation, 6 (1988) 183-208.

[30] C. Sabbah and F. Castro.- Appendice à "proximité évanescente" I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$–module, Compositio Math. 62 (1987) 283-328.

[31] M. Saito, B. Sturmfels and N. Takayama.- Gröbner deformations of regular holonomic systems, Preprint, 1998.

[32] B. Sturmfels.- Gröbner bases and convex polytopes, AMS University Lecture Series, 8, 1996.

[33] W. Trinks.- "Uber Buchbergers verfahnen, systeme algebraicher Gleichugen Zu Lösen, J. of Number Theory, n^{o}10 (1978), 475-488.

Chapitre II: Singularités des courbes planes algébriques

11 Courbes planes méromorphes

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Une courbe méromorphe sur $\mathbf{K}$ est un polynôme $f(x,y) \in \mathbf{K}((x))[y]$, où $\mathbf{K}((x))$ désigne le corps des séries méromorphes en x, à coefficients dans $\mathbf{K}$. Supposons f unitaire en y et écrivons $f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$. Par le théorème de Newton-Puiseux, f se factorise comme suit:

$$f(x,y) = \prod_{i=1}^{n}(y - y_i(x)),$$

où les racines $(y_i(x))_{1\leq i\leq n}$ sont des séries méromorphes fractionnaires en x, i.e. il existe un entier naturel $N \in \mathbf{N}$ tel que $y_i(x) \in \mathbf{K}((x^{1/N}))$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Lorsque f est irréductible, $N = n$ suffit, dans ce cas les racines sont liées par le groupe multiplicatif des racines n-ièmes de l'unité (plus précisément, soit $w \neq 1$ une racine primitive n-ième de 1, alors $y_i(x) = y_1(w^{i-1}x)$ pour tout $1 \leq i \leq n$).

Supposons f irréductible et écrivons $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$. Soit, par le théorème de Newton-Puiseux, $y(x) \in \mathbf{K}((x^{1/n}))$ tel que $f(x, y(x)) = 0$, et rappelons que $f(x,y) = \prod_{w^n=1}(y - y(wx))$. Soit $y(x) = \sum_i a_i x^{i/n}$. L'ensemble $\{i, a_i \neq 0\}$ ne dépend pas du choix de la racine $y(x)$. On le note par **Supp**(f). Les **exposants de Newton-Puiseux** de f sont définis comme suit: $\mid m_0 \mid = n$, $m_1 = \inf\{i \in \operatorname{supp}(f); n \text{ ne divise pas } i\}$, et pour tout $k \geq 2$:

$m_k = \inf\{i \in \operatorname{supp}(f); d_k = \operatorname{pgcd}(m_0, \ldots, m_{k-1}) \text{ ne divise pas } i\}$.

Le polynôme f étant irréductible, pgcd $(n, \operatorname{supp}(f)) = 1$, par conséquent il existe $h \in N$ tel que $d_{h+1} = 1$. On note par convention $m_{h+1} = +\infty$.

Soit finalement la suite $(r_k)_{k\geq 0}$ définie par: $\mid r_0 \mid = n$, $r_1 = m_1$ et pour tout $2 \leq k \leq h+1$:
$r_k = r_{k-1}.(d_{k-1}/d_k) + m_k - m_{k-1}$.

On note $\underline{m} = (m_0, m_1, \ldots, m_{h+1})$, $\underline{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_{h+1})$, $\underline{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_{h+1})$, et on appelle ces suites les suites caractéristiques associées à f.

En général, soit $f(x,y)$ une courbe méromorphe de degré n en y, alors $f(x,y) = f_0(x).\tilde{f}(x,y)$, où $f_0 \in \mathbf{K}((x))$ et $\tilde{f}$ est une courbe méromorphe unitaire de degré n en y. Soit $g(x,y)$ un élément de $\mathbf{K}((x))[y]$ de degré m en y. Soit par le théorème de Newton $\tilde{f}(x,y) = \prod_{i=1}^{n}(y - y_i(x))$. On définit la **multiplicité d'intersection** de f avec g par:

$$\operatorname{int}(f,g) = \begin{cases} m.\operatorname{ord}_x f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ord}_x g(x, y_i(x)) \text{ if } f \neq 0 \neq g \\ 0 \quad \text{if } f = 0 \neq g \in k((X)) \text{ or } g = 0 \neq f \in k((X)) \\ \infty \quad \text{if } f = 0 \neq g \notin k((X)) \text{ or } g = 0 \neq f \notin k((X)) \\ \infty \quad \text{if } f = 0 = g \end{cases}$$

où on suppose que la somme d'une famille vide est 0. Notons que si $f.g \neq 0$, alors $\operatorname{int}(f,g) = \operatorname{ord}_x \operatorname{Res}_y(f,g)$, où $\operatorname{Res}_y(f,g)$ est le y-résultant de f et g. Il suit que $\operatorname{int}(f,g) = \operatorname{int}(g,f)$.

Lemme 11.1 *(voir [1]) Soit $f \in \mathbf{K}[[x]][y]$ (resp. $f \in \mathbf{K}[x^{-1}][y]$). Supposons que $n = deg_y(f) > 0$ et que f est irréductible dans $\mathbf{K}((x))[y]$. L'ensemble des multiplicités d'intersection int(f,g), $g \in \mathbf{K}[[x]][y], f$ ne divise pas g (resp. $g \in \mathbf{K}[x^{-1}][y], f$ ne divise pas g) est un sous semi-groupe de $\mathbf{Z}$. On le note par $\Gamma(f)$ et on l'appelle le* **semi-groupe** *de f. Avec les notations ci-dessus, pour tout $k = 0, \ldots, h$, $r_k > 0$ (resp. $r_k < 0$) et $r_0, r_1, \ldots, r_h$ engendrent $\Gamma(f)$.*

Définition 11.2 *(voir[1]) Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 11.1, soit* $u(x) \in \mathbf{K}((x^{1/q}))$. *On définit le* **contact** *de* u *avec* f *par* $cont(f, u(x)) = max_{w^n=1} O_x(u(x) - y(wx))$, *où* O_x *désigne l'ordre en* x. *Soit* $g = y^m + b_1(x)y^{m-1} + \ldots + b_m(x)$ *un polynôme irréductible de* $\mathbf{K}((x))[y]$ *et soit par le théorème de Newton* $g(x, y) = \prod_{v^m=1}(z - z(vx))$ *où* $z(x)$ *est une racine de* $g(x, y) = 0$. *On définit le* **contact** *entre* f *et* g *par* $cont(f, g) = cont(f, z(x))$. *Notons que* $cont(f, g) = cont(g, y(x))$ *et que cette définition ne dépend pas du choix de la racine* $z(x)$ *de* g *(resp.* $y(x)$ *de* f*).*

Racines approchées de f: Supposons f irréductible dans $\mathbf{K}((x))[y]$ et soit $\underline{m}, \underline{d}, \underline{r}$ les suites caractéristiques associées à f. Soit d un entier positif et supposons que d divise n. Soit g un polynôme unitaire de $\mathbf{K}((x))[y]$, de degré n/d en y.

Définition 11.3 *(voir[1]) On dit que* g *est la* d*-ième* **racine approchée** *de* f *si l'une des conditions équivalentes est vérifiée:*

i) $deg_y(f - g^d) < n - n/d$.

ii) Soit $f = g^d + \alpha_1(x, y)g^{d-1} + \ldots + \alpha_d(x, y)$ *le développement de* f *suivant les puissances de* g *(i.e. si* $\alpha_i \neq 0$, *alors* $deg_y\alpha_i(x, y) < n/d$*), alors* $\alpha_1 = 0$.

La d-ième racine approchée de f existe et est unique (voir[1]).

soit $g_1, \ldots, g_h, g_{h+1} = f$ l'ensemble des d_k-ièmes racines approchées de f, $k = 1, \ldots, h$. On a:

Lemme 11.4 *(voir [1]) Pour tout* $k = 1, \ldots, h$:

i) $int(f, g_k) = r_k$.

ii) $cont(f, g_k) = \frac{m_k}{n}$.

iii) g_k *is irreducible dans* $\mathbf{K}((x))[y]$ *et* $\Gamma(g_k) =< r_0/d_k, \ldots, r_{k-1}/d_k >$. *De plus, pour tout* $1 \leq i \leq k$, g_i *est la* d_i/d_k*-ième racine approchée de* g_k.

L'étude des courbes méromorphes a des applications intéressantes dans le deux cas suivants:

1) Le cas formel, i.e. f est un polynôme de $\mathbf{K}[[x]][y]$, où $\mathbf{K}[[x]]$ désigne l'anneau des séries formelles en x, à coefficients dans $\mathbf{K}$. Dans ce cas, les racines $y_i(x)$ dans le théorème de Newton sont des éléments de $\mathbf{K}[[x^{1/N}]]$.

2) Le cas algébrique, i.e. $f(x, y)$ est un polynôme de $\mathbf{K}[x^{-1}][y]$. Dans ce cas, la factorisation de f dans $\mathbf{K}((x))[y]$ ainsi que ses racines $(y_i(x))_{1\leq i\leq n}$, sont liées au comportement à l'infini du polynôme $F(x, y) = f(x^{-1}, y) \in \mathbf{K}[x][y]$. De plus, si $f(x, y)$ est irréductible dans $\mathbf{K}((x))[y]$, alors $F(x, y)$ possède une seule place à l'infini (i.e. $F(x, y)$ possède un point à l'infini et il est analytiquement irréductible en ce point). C'est dans ce cadre que se situe le Lemme d'Abhyankar-Moh à propos du problème du plongement de $\mathbf{K}$ dans le plan $\mathbf{K}^2$.

Dans la suite, par souci de clarté, on va utiliser les notations suivantes: soit $F(x, y)$ un polynôme de $\mathbf{K}[x, y]$. La courbe méromorphe $f(x, y) = F(x^{-1}, y) \in \mathbf{K}[x^{-1}, y] \subseteq \mathbf{K}((x))[y]$ sera appelée la courbe méromorphe associée à F, on notera dans ce cas $f \sim_m F$. On dira aussi que F est le polynôme associé à f et on notera $F \sim_p f$. De même, si $F(x, y) = f(x^{-1}, y)$ et $G(x, y) = g(x^{-1}, y)$ sont deux polynômes de $\mathbf{K}[x, y]$, on notera $(f, g) \sim_m (F, G)$ et $(F, G) \sim_p (f, g)$. Soit F, G deux polynômes de $\mathbf{K}[x, y]$ et désignons par $\mathrm{Int}(F, G)$ la multiplicité d'intersection de F et G dans $\mathbf{K}^2$ (i.e. $\mathrm{Int}(F, G)$ est le rang de $\mathbf{K}[x, y]/(F, G)$ sur $\mathbf{K}$). On peut alors démontrer que si $(f, g) \sim_m (F, G)$ et F est unitaire en y, alors $\mathrm{Int}(F, G) = -\mathrm{int}(f, g)$.

12 Lemme d'Ahyankar-Moh

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. En 1973, dans [9], S.S. Abhyankar et T.T. Moh ont démontré, en utilisant la théorie des courbes méromorphes, le résultat suivant, connu depuis sous le nom du Lemme d'Abhyankar-Moh:

Théorème 12.1 *Soit $F(x,y) \in \mathbf{K}[x,y]$ tel que la courbe $V(F) = \{(a,b) \in \mathbf{K}^2; F(a,b) = 0\}$ est isomorphe à $\mathbf{K}$, alors il existe un automorphisme de $\mathbf{K}^2$ qui transforme F en une coordonnée de $\mathbf{K}^2$.*

Ce résultat possède la reformulation équivalente suivante:

Théorème 12.2 *Soit $F(x,y) \in \mathbf{K}[x,y]$ un polynôme ayant une seule place à l'infini. Si F est lisse (i.e. la courbe $V(F)$ n'a pas de points singuliers) et rationnel, alors il existe un automorphisme de $\mathbf{K}^2$ qui transforme F en une coordonnée de $\mathbf{K}^2$.*

Soit $F(x,y)$ un polynôme ayant une place à l'infini et écrivons, après un possible changement de variables, $F = y^n + a_2(x)y^{n-2} + \ldots + a_n(x)$. Si $f \sim_m F$ désigne la courbe méromorphe associée à F, alors $f(x,y)$ est irréductible dans $\mathbf{K}((x))[y]$. Soit $\underline{m}, \underline{d}, \underline{r}$ les suites caractéristiques associées à f comme dans la Section précédente. Soit $(g_i)_{1 \leq i \leq h+1}$ l'ensemble des racines approchées de f (en particulier, $g_1 = y$). Dans [14], utilisant les mêmes ingrédients que dans la preuve d'Abhyankar-Moh, j'ai d'abord donné une preuve constructive de leur résultat que j'ai ensuite généralisé à une classification constructive des courbes ayant une seule place à l'infini. La démonstration utilise de manière fondamentale l'égalité suivante:

Désignons par f_x, f_y les dérivées partielles de f par rapport à x et y. On a: $\mathrm{int}(f, f_y) = \mathrm{int}(f_x, f_y) + n - 1$. En particulier $\mathrm{Int}(F, F_y) = \mathrm{Int}(F_x, F_y) + n - 1$.

Supposons d'abord que $\mathrm{Int}(F_x, F_y) = 0$. Comme $\mathrm{int}(f, f_y) = \sum_{k=1}^{h}(\frac{d_k}{d_{k+1}} - 1).(r_k)$ (voir[37], par exemple), et $\mathrm{int}(F, F_y) = -\mathrm{int}(f, f_y)$, alors $\mathrm{int}(F, F_y) = \sum_{k=1}^{h}(\frac{d_k}{d_{k+1}} - 1).(-r_k)$, et puisque par hypothèse $\mathrm{Int}(F, F_y) = n - 1 = \sum_{k=1}^{h}(\frac{d_k}{d_{k+1}} - 1).n/d_k$, il résulte que:

$$\sum_{k=1}^{h}(\frac{d_k}{d_{k+1}} - 1).(-r_k) = \sum_{k=1}^{h}(\frac{d_k}{d_{k+1}} - 1).n/d_k.$$

Cette égalité est vraie si et seulement si $-r_k = d_{k+1}$ pour tout $1 \leq k \leq h$, en particulier $r_h = -1$. On sait par ailleurs que si on pose $G_i \sim_p g_i$ pour tout $1 \leq i \leq h$, alors $-r_h = \mathrm{Int}(F, G_h)$. En utilisant la notion des polygones de Newton généralisés d'Abhyankar et son critère d'irréductibilité (voir [3]), j'ai démontré que:

$$F = G_h^{d_h} + a_2 G_h^{d_h - 2} + \ldots + a_{n-1}.G_h + aG_{h-1}$$

où $a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{K}$ et $a \in \mathbf{K} - \{0\}$. On a donc $\mathbf{K}[F, G_h] = \mathbf{K}[G_h, G_{h-1}]$. D'autre part, $\mathrm{Int}(F_x, F_y) = 0$ implique que $\mathrm{Int}(G_{h_x}, G_{h_y}) = 0$ (voir [14]), on recommence alors avec G_h....Ceci montre que $\mathbf{K}[F, G_h] = \mathbf{K}[G_h, G_{h-1}] = \ldots = \mathbf{K}[G_2, G_1] = \mathbf{K}[G_2, y] = \mathbf{K}[x, y]$.

Cette construction se généralise à une classification des courbes ayant une seule place à l'infini de la manière suivante: soit F un polynôme de $\mathbf{K}[x,y]$ possédant une seule place à l'infini, et reprenons les notations ci-dessus. Pour tout automorphisme σ de $\mathbf{K}^2$, soit $F_\sigma = F \circ \sigma$ et posons $d_\sigma = \deg(F_\sigma)$. Si (X_σ, Y_σ) désignent les nouvelles coordonnées de $\mathbf{K}^2$, on peut supposer, après des possible changement de variables qui ne changent pas le degré, que $F_\sigma = Y^{d_\sigma} + a_2^\sigma(X_\sigma).Y^{d_\sigma - 2} + \ldots + a_{d_\sigma}^\sigma(X_\sigma)$. On appelle F_σ l'équation réduite de g par rapport à σ. Soit h_σ la longueur du système des générateurs du semi-groupe de $f_\sigma \sim_m F_\sigma$ obtenu par le procédé de la Section précédente (et notons que ce système c'est pas nécessairement minimal). Soit $D(F)$ (resp. $H(F)$) l'ensemble des d_σ (resp. h_σ) et soit $r(d) = \inf(D(G)$. Si σ' est un automorphisme de $\mathbf{K}^2$ tel que $d_{\sigma'} = r(d)$, on montre qu'alors $h_{\sigma'} = \inf(H(F)$. On note $r(h) = h_{\sigma'}$ et on appelle $F_{\sigma'}$ **l'équation réduite** de F et on note $r(F) = F_{\sigma'}$. Avec ces données on a:

Lemme 12.3 *(voir [14]) Soit $m = \mathrm{Int}(F_x, F_y)$, alors $m \geq 2.(2^{r(h)-1} - 1)$.*

Remarquons qu'une nouvelle preuve du Lemme d'Abhyankar-Moh en découle immédiatement:

Corollaire 12.4 *(voir [14]) Soit $m = \mathrm{Int}(F_x, F_y)$. Si $m = 0$, alors $r(h) = 0$, en particulier $r(F)$ est une coordonnée de $\mathbf{K}^2$.*

Supposons $\mathrm{Int}(F_x, F_y) > 0$ et soit l le plus grand entier tel que $\mathrm{Int}(G_{l_x}, G_{l_y}) = 0$. On peut alors construire un automorphisme σ de $\mathbf{K}^2$ transformant G_l en une coordonnée de $\mathbf{K}^2$ (l'autre coordonnée étant alors G_{l-1} si $l \geq 2$ et x si $l = 1$). On montre qu'alors $r(F) = F_\sigma$. On a ainsi un algorithme qui, partant d'un polynôme ayant une seule place à l'infini, construit son équation réduite. Ceci nous permet de construire, pour un semi-groupe donné Γ (resp. pour un entier naturel m) les équations réduites de tous les polynômes F de semi groupe Γ (resp. tel que $\mathrm{int}(F_x, F_y) = m$).

13 Régularité des courbes méromorphes

Soit $0 \neq f(x, y) \in \mathbf{K}((x))[y]$ une courbe méromorphe sur un corps $\mathbf{K}$ algébriquement clos de caractéristique 0 et écrivons $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_n(x)$ où pour tout $1 \leq i \leq n, a_i(x) \in \mathbf{K}((x))$. Supposons $n \geq 1$ et considérons la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$, où pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $f_\lambda = f - \lambda$. Supposons f_λ réduit pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$. Dans ([14]) j'ai introduit la notion de régularité de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$ comme suit:

Définition 13.1 *On dit que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$ est régulière si int(f_λ, f_y) ne dépend pas de λ.*

La régularité de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$ peut être mesurée comme suit: écrivons $\mathrm{Res}_y(f, f_y) = P_{i_0}(\lambda).x^{i_0} + P_{i_1}(\lambda)x^{i_1} + \ldots + P_{i_k}(\lambda)x^{i_k} + \ldots$ avec $i_0 < i_1 < \ldots$ et soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ l'ensemble des racines de $P_{i_0}(\lambda)$: $\mathrm{int}(f_\lambda, f_y) = i_0$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K} - \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. De plus, pour tout $1 \leq k \leq r, i_0 < \mathrm{int}(f_{\lambda_k}, f_y)$. On note $i_0 = \min_{\lambda \in \mathbf{K}} \mathrm{int}(f_\lambda, f_y)$ par $\mathrm{int}(f_{gen}, f_y)$ et on l'appelle la multiplicité d'intersection générique de f et f_y. Soit $A_f = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{int}(f_{\lambda_k}, f_y) - \mathrm{int}(f_{gen}, f_y)$: $A_f \in \mathbf{N}$ et $A_f = 0$ si et seulement si la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$ est régulière.

Définition 13.2 *On note $I(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ et on appelle $I(f)$ l'ensemble des valeurs irrégulières de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$.*

Avec ces notations on a l'égalité suivante:

Lemme 13.3 *(voir [14]) On a:*

$$\mathrm{int}(f_{gen}, f_y) = \mathrm{int}(f_x, f_y) + n - 1 - A_f.$$

De plus, pour tout $1 \leq k \leq r$, si on note $A_k = \mathrm{int}(f_{\lambda_k}, f_y) - \mathrm{int}(f_{gen}, f_y)$, alors int$(f_{\lambda_k}, f_y) = \mathrm{int}(f_x, f_y) + n - 1 - A_f + A_k$.

La notion de régularité possède de très importantes applications dans la théorie des courbes planes algébriques, elle offre une approche intéressante dans l'étude de la conjecture Jacobienne en dimension deux. Soit pour le moment $F(x, y)$ un polynôme de $\mathbf{K}[x, y]$ tel que $F(0, 0) = 0$ et considérons la famille de polynômes $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$, où pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $F_\lambda = F - \lambda$. On va supposer par la suite que F_λ est réduit pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$. Quitte à faire un changement de variables convenable, on peut écrire $F = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_n(x)$ où $\deg_x a_i(x) < i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, en particulier F (et donc F_λ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$) possède un seul point à l'infini, défini par $u = y = 0$, où u est la variable d'homogénéisation. Soit $f \sim_m F$ la courbe méromorphe associée à F. En particulier $f_\lambda \sim_m F_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$.

Définition 13.4 *On dit que la famille de polynômes $(F_\lambda)_\lambda$ est régulière si la famille des courbes méromorphes $(f_\lambda)_\lambda$ l'est. Ceci est équivalent à dire que la multiplicité d'intersection Int(F_λ, F_y) ne dépend pas de λ.*

Soit $I(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. On a:

$$\mathrm{Int}(F_\lambda, F_y) = \mathrm{Int}(F_x, F_y) + n - 1 + A_f$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{K} - I(f)$. De plus, toujours avec les notations ci-dessus, pour tout $1 \leq k \leq r$, $\mathrm{Int}(F_{\lambda_k}, F_y) = \mathrm{Int}(F_x, F_y) + n - 1 + A_f - A_k$. Par abus de notation on écrit $I(f) = I(F)$ et on appelle $I(F)$ l'ensemble des valeurs irrégulières de $(F_\lambda)_\lambda$.

La notion de régularité est équivalente à celle introduite par S.S. Abhyankar et A. Sathaye dans [10]: la famille $(F_\lambda)_\lambda$ est bonne à l'infini si le coefficient dominant du y-résultant $\mathrm{Res}_y(F_\lambda, F_y)$ de F_λ et F_y est une constante non nulle. Elle est aussi équivalente à la notion classique de l'équisingularité à l'infini: soit $p = (0, 1, 0)$ le point à l'infini de F et soit $h(F)$ l'homogénéisé de F dans $\mathbf{K}[u, x, y]$. Soit $\mu_p(F_\lambda)$ le nombre de Milnor local de $h(F_\lambda) = h(F) - \lambda.u^n$ en p. On dit que la famille $(F_\lambda)_\lambda$ est équisingulière à l'infini si $\mu_p(F_\lambda)$ ne dépend pas de λ.

Rappelons que la conjecture Jacobienne en dimension deux s'énonce comme suit:

(CJ) Soit $F, G \in \mathbf{K}[x, y]$. Si $J(F, G) = F_x G_y - F_y G_x \in \mathbf{K} - \{0\}$, alors $\mathbf{K}[F, G] = \mathbf{K}[x, y]$.

Supposons que F possède une seule place à l'infini, par le Lemme d'Abhyankar-Moh ([9], voir la Section précédente), si $\mathrm{Int}(F_x, F_y) = 0$, alors il existe un automorphisme σ de $\mathbf{K}^2$ tel que $\sigma(F) = F \circ \sigma$ est une coordonnée de $\mathbf{K}^2$. Ainsi, (CJ) est équivalente à l'assertion suivante:

Soit $F, G \in \mathbf{K}[x, y]$. Si $J(F, G) \in \mathbf{K} - \{0\}$, alors F possède une seule place à l'infini.

Remarquons que si F possède une seule place à l'infini, alors il en est de même pour F_λ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$. De plus, la famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$ est régulière. Ephraim ([23]) a ainsi généralisé le Lemme d'Abhyankar-Moh de la manière suivante: supposons que la famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$ est régulière (ou équisingulière à l'infini). Si $\mathrm{Int}(F_x, F_y) = 0$, alors il existe un automorphisme σ de $\mathbf{K}^2$ tel que $F \circ \sigma$ est une coordonnée de $\mathbf{K}^2$. Par conséquent, (CJ) est équivalente à l'assertion suivante:

Soit $F, G \in \mathbf{K}[x, y]$. Si $J(F, G) \in \mathbf{K} - \{0\}$, alors la famille $(F_\lambda)_\lambda$ est régulière.

Soit $I(F)$ l'ensemble des valeurs irrégulières de la famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{K}}$. (CJ) est alors équivalente à l'assertion suivante:

(*) Soit $F \in \mathbf{K}[x, y]$. Supposons que $I(F) \neq \emptyset$, alors pour tout $G \in \mathbf{K}[x, y]$, $J(F, G) \notin \mathbf{K} - \{0\}$.

Dans [14] (voir aussi [7]) j'ai généralisé le Lemme d'Abhyankar-Moh aux familles de polynômes ayant une seule valeur irrégulière, ce qui m'a permis de démontrer (*) dans ce cas particulier. Plus précisement j'ai démontré le résultat suivant:

Théorème 13.5 *Supposons que $I(F) = \{\lambda_1\}$ et que $\mathrm{int}(F_x, F_y) = 0$, alors F_{λ_1} n'est pas irréductible. De plus, il existe un automorphisme σ de $\mathbf{K}^2$ tel que dans les nouvelles coordonnées (X, Y), $\sigma(F_{\lambda_1}) = Y.(1 + Y.G(X, Y))$ et $G(X, Y) \neq 0$.*

Soit $H = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in \mathbf{K}[x, y]$. On appelle **Support** de H, et on note $\mathrm{Supp}(H)$, l'ensemble des $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ tel que $a_{i,j} \neq 0$. On définit le **polygone de Newton** de H (noté $N(H)$) comme étant l'enveloppe convexe de $\mathrm{Supp}(H) \bigcup \{0\}$ dans $\mathbf{R}^2_+$. Par un résultat du à Abhyankar et démontré indépendamment par Briançon ([20]) et par Oka ([34]), étant donné deux polynômes $H_1, H_2 \in \mathbf{K}[x, y]$, si $J(H_1, H_2) \in \mathbf{K} - \{0\}$, et si $N(H_1)$ (resp. $N(H_2)$) contient au moins deux points différents de l'origine, alors ces deux polygônes sont similaires. Utilisant ce résultat j'ai déduit le suivant:

Théorème 13.6 *(voir [14]) Supposons que la famille $(F_\lambda)_\lambda$ possède une seule valeur irrégulière, alors il n'existe pas de G tel que $J(F, G) \in \mathbf{K} - \{0\}$.*

Remarque 13.7 Soit $(F_\lambda)_\lambda$ une famille de polynômes telle que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, F_λ est irréductible et lisse, et soit $I(F)$ l'ensemble des valeurs irrégulières de $(F_\lambda)_\lambda$. Théorème 13.5. montre que ou bien $I(F) = \emptyset$ (dans ce cas F possède une seule place à l'infini), ou bien $I(F)$ contient au moins deux éléments. Par ailleurs Briançon (voir [20]) a donné un exemple d'une famille vérifiant les conditions ci-dessus et possédant exactement deux valeurs irrégulières: $F(x,y) = y^2.(1+xy)^4 + 3y(1+xy)^3 + (3-8/3y)(1+xy)^2 - 4(1+xy) + x$. Cet exemple a été généralisé par E. Artal, P. Cassou-Noguès et I. Luengo ([11]) en une famille de polynômes F_n de degé $6n+4, n \in \mathbf{N}-\{0\}$ vérifiant les mêmes conditions. Cet exemple répond par le négatif à la conjecture suivante de S. Kaliman (voir[27], où il démontre qu'elle implique la conjecture Jacobienne en dimension deux): une famille dont tous les éléments sont irréductibles et possédant au moins une valeur irrégulière, doit avoir un élément singulier.

14 Dérivées partielles d'une courbe méromorphe

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et soit f un élément de $\mathbf{K}((x))[y]$. Supposons f unitaire en y et écrivons $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x).y + a_n(x)$. Supposons f réduit et soit $f = f_1.\ldots.f_r$ où f_i est irréductible pour tout $1 \leq i \leq r$. Posons $n_i = \deg_y f_i$ et soit, par le théorème de Newton, $f_i(x,y) = \prod_{k=1}^{n_i}(y - y_k^i(x))$ où $y_1^i(x), \ldots, y_{n_i}^i(x)$ sont des éléments de $\mathbf{K}((x^{1/n_i}))$. Soit $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\} = \{y_k^i; 1 \leq i \leq r$ et $1 \leq k \leq n_i\}$. L'ensemble $C(f) = \{\mathrm{ord}_x(y_i(x) - y_j(x)); 1 \leq i \neq j \leq n\}$-où ord_x désigne l'ordre en x- est appelé l'ensemble des contacts de la courbe f. Dans [16] on s'est intéressé au problème suivant: étant donné f, sa décomposition en composantes irrédutibles, et son ensemble des contacts $C(f)$, quelles informations peut-on avoir sur f_y?

Lorsque f est irréductible et $a_i(x) \in \mathbf{K}[[x]]$ pour tout $1 \leq i \leq n$, l'ensemble $C(f)$ n'est autre que l'ensemble des exposants de Newton-Puiseux de f: soit $\underline{m} = (m_0 = n, m_1, \ldots, m_h, m_{h+1} = +\infty)$, $\underline{r} = (r_0 = n, r_1, \ldots, r_h, r_{h+1} = +\infty)$, $\underline{d} = (d_1 = n, d_2, \ldots, d_h, d_{h+1} = 1)$ l'ensemble des suites caractéristiques associées à f (voir Section 11.), alors $C(f) = \{m_1/n, \ldots, m_h/n\}$. D'autre part,

$$\mathrm{int}(f, f_y) = \sum_{i=1}^{h}\left(\frac{d_i}{d_{i+1}} - 1\right).r_i$$

Analysant cette égalité et utilisant l'arithmétique du semi-groupe $\Gamma(f) =< r_0, r_1 \ldots, r_h >$ de f, M. Merle ([31]) a démontré le théorème suivant:

Théorème 14.1 *$f_y = Q_1.\ldots.Q_h$ où $\forall i = 1, \ldots, h$:*

i) $\deg_y Q_i = (\frac{d_i}{d_{i+1}} - 1).n/d_i$ et $\mathrm{int}(f, Q_i) = (\frac{d_i}{d_{i+1}} - 1).r_i$.

ii) $\mathrm{cont}(f, P) = m_i/n$ pour toute composante irréductible P de Q_i.

Dans [22], lorsque $f \in \mathbf{K}[[x]][y]$ et $r = 2$ (i.e. f possède deux composantes irréductibles), utilisant l'arithmétique du semi-groupe (dans $\mathbf{N}^2$) de f, et suivant la même démarche que Merle, F. Delgado a obtenu un résultat similaire pour la décomposition de f_y. Il a donné un exemple montrant que l'arithmétique du semi-groupe ne suffit pas si f possède 3 branches ou plus.

Dans [29], toujours pour $f \in \mathbf{K}[[x]][y]$, T.C. Kuo et T.T. Lu ont proposé un modèle d'arbre qui utilise l'ensemble $C(f)$. Bien que la décomposition de f_y n'était pas le but de leur travail, leur modèle contenait des informations importantes qui servait dans la progression du problème.

Dans [16], j'ai considéré le cas où f est une courbe méromorphe. J'ai alors associé à f un modèle d'arbre $T(f)$ défini à partir des composantes irréductibles de f. Il est défini comme suit:

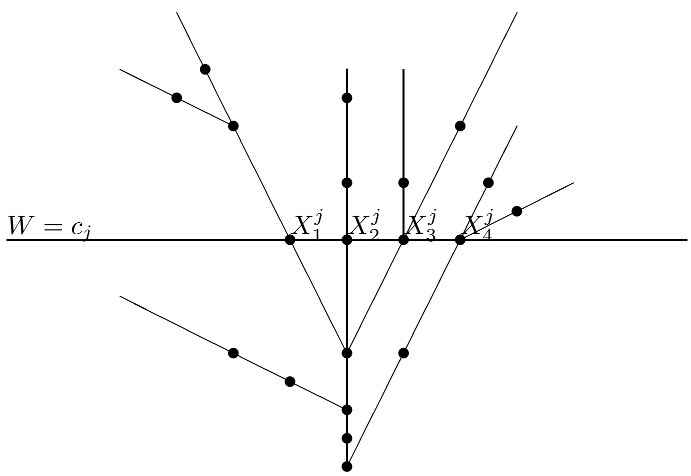
Pour tout $i = 1, \ldots, r$, désignons par $\mathrm{NP}(f_i)$ l'ensemble des exposants de Newton-Puiseux de f_i et soit $\mathrm{C}(f_i, f) = \mathrm{NP}(f_i) \bigcup \{\mathrm{cont}(f_i, f_j); j \neq i\}$. Clairement $\mathrm{C}(f) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{C}(f_i, f)$. Soit $\mathrm{C}(f) = \{c_1, \ldots, c_t\}$ et supposons que $c_1 < c_2 < \ldots < c_t$. L'arbre $T(f)$ associé à f est une réunion de r branches. Il est construit comme suit:

Dans $\mathbf{R}^2$ equipé du système des coordonnées (Z, W) on considère le point $(0, c_1)$. Remarquons que $c_1 \in C(f_i, f)$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Soit $i = 1$ et considérons le segment de droite B_1 liant les points $\{(0, c); c \in C(f_1, f)\}$: B_1 est la première branche de $T(f)$ (remarquons que si $C(f_1, f) = \{c_1\}$, alors $B_1 = \{(0, c_1)\}$).

Supposons construits $B_1, \ldots, B_{i-1}$ et soit $c = \max_{k<i} \mathrm{cont}(f_i, f_k)$. Soit $p < i$ tel que $c = \mathrm{cont}(f_i, f_p)$. La branche B_i est une réunion de deux segments: le premier noté B'_i est le sous ensemble de B_p contenant les points de B_p d'ordonnées $\leq c$. Le deuxième noté B''_i est construit comme suit:

i) Si $c = \max C(f_i, f)$, alors $B''_i = \emptyset$.

ii) Si $c < \max C(f_i, f)$, alors B''_i est le segment de droite liant le point B_l (qui appartient aussi à B'_i) à un point du plan d'ordonnée $\max C(f_i, f)$, tel que $S''_i \bigcap (\bigcup_{k=1}^{i-1} B_k)$ est réduit à l'unique point d'ordonnée c de B_l. Ceci nous donne la représentation suivante:



L'arbre $T(f)$ peut aussi être intérprété de la manière suivante: $T(f)$ est une collection de points, un point P est défini d'une part par un élément $c(P)$ de $C(f)$, et d'autre part par un sous ensemble $U(P)$ de $\{f_1, \ldots, f_r\}$ tel que:

i) $\forall g \in U(P)$ et $\forall h \notin U(P)$, $\mathrm{cont}(g, h) < c(P)$.

ii) $\forall g, h \in U(P)$, $\mathrm{cont}(g, h) \geq c(P)$.

On écrit $P \sim (c(P), U(P))$. Soit $P_1, \ldots, P_s$ l'ensemble des points de $T(f)$ et soit pour tout $1 \leq i \leq s$, $(c(P_i), U(P_i))$ tel que $P_i \sim (c(P_i), U(P_i))$. J'ai démontré dans [16] une correspondance biunivoque entre l'ensemble $\{P_1, \ldots, P_s\}$ et une collection de courbes méromorphes $Q_1, \ldots, Q_s$ tel que:

Théorème 14.2 *i) $f_y = Q_1. \ldots .Q_s$.*

ii) Soit $1 \leq i \leq s$, alors pour toute composante irrédutible Q de Q_i et pour tout élément $g \in U(P_i)$, cont$(g, Q) = c(P_i)$.

J'ai de plus donné explicitement pour tout $1 \leq i \leq s$, le degré en y de Q_i et la multiplicité d'intersection de Q_i avec f_k pour tout $1 \leq k \leq r$.

15 Le Jacobien des courbes méromorphes

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Soit f, g deux courbes méromorphes de $\mathbf{K}((x))[y]$ et considérons le Jacobien $J(f,g) = f_x g_y - f_y g_x$. Dans [5] (voir aussi [6]) on s'est intéressé au problème suivant: dans quelle mesure les ensembles $\mathrm{C}(f)$, $\mathrm{C}(g)$ et $\mathrm{C}(f.g)$ permettent d'avoir des informations sur $J(f,g)$? lorsque $g = -x$, $J(f,g) = f_y$, dans ce cas, par les résultats de la Section précédente, la courbe $J(f,g)$ est déterminée en partie par la structure de l'arbre $T(f)$. Nos résultats généralisent ainsi tous les résultats traitant le problème de la décomposition de f_y non seulement au cas méromorphe mais aussi à une factorisation du Jacobien. La méthode utilisée dans notre approche est celle de la déformation développé par Abhyankar dans [2]. Cette méthode peut être illustrée comme suit: on veut étudier une courbe méromorphe h en la comparant avec une courbe méromorphe irréductible p. Pour ce faire, on considère une racine de p (voir Section 11) et on la déforme en remplaçant un de ses coefficients par une indéterminée. On substitue cette déformation dans h: une des informations que l'on peut obtenir porte sur les contacts de p avec les composantes irréductibles de h.

Après avoir rappelé (avec démonstrations) les résultats utilisés de [2], nous avons proposé un modèle d'arbre universel qui structure l'ensemble $\mathbf{K}((\mathbf{x}))[\mathbf{y}]^\natural$ des courbes méromorphes irréductibles: cet arbre universel est lui même déterminé par des arbres définis comme suit: le contact de deux courbes étant rationnel, l'ensemble des niveaux de l'arbre est un sous ensemble du corps des rationnels $\mathbf{Q}$, les points de l'arbre sont définis par des paires $B = (\sigma(B), \lambda(B))$, où $\emptyset \neq \sigma(B)$ est un sous ensemble de $\mathbf{K}((\mathbf{x}))[\mathbf{y}]^\natural$ et $\lambda(B) \in \mathbf{Q}$ est tel que $\mathrm{con}(f, f') \geq \lambda(B)$ pour tout $f, f' \in \sigma(B)$. Un tel arbre est partiellement ordonné par $B' \geq B$ si $\lambda(B') \geq \lambda(B)$ et $\sigma(B') \subset \sigma(B)$. On note $T = (\bigcup_B \sigma(B), \Lambda(T))$, où $\Lambda(T) = \{\lambda(B), B \in T\}$. L'arbre universel n'est donc autre que $T = (\mathbf{K}((\mathbf{x}))[\mathbf{y}]^\natural, \mathbf{Q})$ auquel on rajoute son point "racine" $(\mathbf{K}((\mathbf{x}))[\mathbf{y}]^\natural, -\infty)$

Remarquons que pour une courbe méromorphe f, l'arbre $T(f)$ introduite dans la Section précédente peut être redéfini avec les notations ci-dessus ($T(f) = (\{f_1, \ldots, f_r\}, C(f))$), et que si f est irréductible, alors $T(f) = (f, C(f,f))$ où $C(f,f)$ désigne l'ensemble des exposants de Newton-Puiseux de f.

Soit T un arbre. Pour tout point $B = (\sigma(B), \lambda(B))$ de T, on pose

$$\tau(B) = \{f' \in \mathbf{K}((\mathbf{x}))[\mathbf{y}]^\natural ; \mathrm{cont}(f', f) \geq \lambda(B) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad f \in \sigma(B)\}$$

$$\tau'(B) = \{f' \in \tau(B) ; \mathrm{cont}(f', f) > \lambda(B) \quad \text{pour} \quad \text{au} \quad \text{moins} \quad \text{un} \quad f \in \sigma(B)\}.$$

et

$$\tau^*(B) = \tau(B) - \tau'(B) = \{f' \in \tau(B) ; \mathrm{cont}(f', f) = \lambda(B) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad f \in \sigma(B)\}.$$

Ces ensembles mesurent en quelque sorte le contact des éléments de $\mathbf{K}((\mathbf{x}))[\mathbf{y}]^\natural$ avec les éléments de T. Plus précisement, soit H une courbe méromorphe et soit $H = H_1 \ldots . H_p$ La décomposition de H suivant ses composantes irréductibles. Pour tout $B \in T$, soit $\Omega_B(H) = \prod_{1 \leq j \leq p; H_j \in \tau(B)} H_j$, $\Omega'_B(H) = \prod_{1 \leq j \leq p; H_j \in \tau'(B)} H_j$, et $\Omega^*_B(H) = \prod_{1 \leq j \leq p; H_j \in \tau^*(B)} H_j$ alors $H = \prod_{B \in T} \Omega^*_B(H)$ et si $B \neq B'$, alors $\mathrm{pgcd}(\Omega^*_B(H), \Omega^*_{B'}(H)) = 1$. Avec ces notations, la partie principale du Théorème de décomposition du Jacobien $J(f,g)$ de deux courbes méromorphes s'énonce comme suit:

Théorème 15.1 *Soit $T = T(f.g)$, alors $J = J(f,g) = \prod_{B \in T} \Omega^*_B(J)$ et si $deg_y(\Omega_B(g)) = 1$, alors $deg_y \Omega^*_B(J) =$* $\deg_y \Omega^*_B(f_y) > 1$.

On a par conséquent une correspondance biunivoque entre un sous ensemble de points de $T = T(f.g)$ et des paquets de courbes méromorphes figurant dans la décomposition de J. Nous avons donné à propos de ces composantes des informations précises quant à la multiplicité d'intersection de chaque paquet avec les composantes irréductibles de $f.g$, puis au contact de ses composantes irréductibles avec celles de $f.g$.

16 Pairs Jacobiens

Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Nous avons étudié dans la Section précédente le problème suivant: étant donnés deux courbes méromorphes $f, g \in \mathbf{K}((x))[y]$, comment obtenir des informations sur le Jacobien $J = J(f, g)$ connaissant les courbes f et g? Dans [7] nous nous sommes intéressés au problème inverse: connaissant le Jacobien $J = J(f, g)$, que peut-on dire de f et g? En premier temps nous avons introduit la notion de régularité des familles $(f_\lambda = f - \lambda, g_\mu = g - \mu)_{\lambda,\mu\in\mathbf{K}}$ et étudié certaines de ses applications, en particulier à la conjecture Jacobienne en dimension deux. Soit $f, g \in \mathbf{K}((x))[y]$ deux courbes méromorphes et considérons les familles $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{K}}$ et $(g_\mu)_{\mu\in\mathbf{K}}$. Supposons que f_λ (resp. g_μ) est réduit pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ (resp. $\mu \in \mathbf{K}$).

Définition 16.1 On dit que f est régulière par rapport à la famille $(g_\mu)_\mu$ si $\text{int}(f, g_\mu)$ ne dépend pas de μ. On dit que g est régulière par rapport à la famille $(f_\lambda)_\lambda$ si $\text{int}(f_\lambda, g)$ ne dépend pas de λ. On dit que la famille (f_λ, g_μ) est régulière si $\text{int}(f_\lambda, g_\mu)$ ne dépend pas de λ, μ.

Supposons f et g unitaires en y et écrivons $f = y^n+a_1(x)y^{n-1}+\ldots+a_n(x)$ et $g = y^m+b_1(x)y^{m-1}+\ldots+b_m(x)$. La notion de régularité introduite ci-dessus peut être mesurée de la manière suivante: Soit $R(\lambda, \mu, x) = P_0(\lambda, \mu)x^i + P_1(\lambda, \mu)x^{i+1} + \ldots +$ le résultant en y de f_λ et g_μ. Il suit que, étant donnés $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbf{K}$, $R(\lambda_0, \mu, x)$ (resp. $R(\lambda, \mu_0, x)$) est le résultant en y de f_{λ_0} et g_μ (resp. f_λ et g_{μ_0}).

Proposition 16.2 *Soit $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbf{K}$ et reprenons les notations ci-dessus. Écrivons $R(\lambda_0, \mu, x) = P_{\lambda_0}(\mu)x^{i(\lambda_0,\mu)}+$ ... (resp. $R(\lambda, \mu_0, x) = Q_{\mu_0}(\lambda)x^{i(\lambda,\mu_0)}+\ldots$), où on suppose que $ord_x R(\lambda_0, \mu, x) = i(\lambda_0, \mu)$ (resp. $ord_x R(\lambda, \mu_0, x) = i(\lambda, \mu_0)$). On a:*

i) f_{λ_0} est régulière par rapport à la famille $(g_\mu)_\mu$ si $P_{\lambda_0}(\mu) \in \mathbf{K} - \{0\}$.

ii) g_{μ_0} est régulière par rapport à la famille $(f_\lambda)_\lambda$ si $Q_{\mu_0}(\lambda) \in \mathbf{K} - \{0\}$.

iii) La famille (f_λ, g_μ) est régulière si $P_0(\lambda, \mu) \in \mathbf{K} - \{0\}$.

Soit $\lambda_0 \in \mathbf{K}$ et reprenons les notations ci-dessus. Soit $\mu^1_{\lambda_0}, \ldots, \mu^{r_{\lambda_0}}_{\lambda_0}$ l'ensemble des racines de $P_{\lambda_0}(\mu)$. Pour tout $\mu \in \mathbf{K} - \{\mu^1_{\lambda_0}, \ldots, \mu^{r_{\lambda_0}}_{\lambda_0}\}$, $\text{int}(f_{\lambda_0}, g_\mu) = i(\lambda_0, \mu)$. De plus, $\text{int}(f_{\lambda_0}, g_{\mu^i_{\lambda_0}}) > i(\lambda_0, \mu)$ pour tout $1 \leq i \leq r_{\lambda_0}$. On note $i(\lambda_0, \mu) = \text{int}(f_{\lambda_0}, g_{gen})$ et on l'appelle la multiplicité d'intersection générique de f_{λ_0} et $(g_\mu)_\mu$. Posons

$$B(f_{\lambda_0}, g) = \sum_{i=1}^{r_{\lambda_0}} [\text{int}(f_{\lambda_0}, g_{\mu^i_{\lambda_0}}) - \text{int}(f_{\lambda_0}, g_{gen})].$$

On a: $B(f_{\lambda_0}, g) \in \mathbf{N}$ et $B(f_{\lambda_0}, g) = 0$ si et seulement si f_{λ_0} est régulière par rapport à la famille $(g_\mu)_\mu$.

Définition 16.3 On note $I(f_{\lambda_0}, g) = \{\mu^1_{\lambda_0}, \ldots, \mu^{r_{\lambda_0}}_{\lambda_0}\}$, et on appelle $I(f_{\lambda_0}, g)$ l'ensemble des valeurs irrégulières de f_{λ_0} par rapport à g.

On peut de la même manière définir $I(f, g_{\mu_0})$ et $B(f, g_{\mu_0})$ si $\mu_0 \in \mathbf{K}$.

Dans [7], on a démontré l'égalité suivante:

Lemme 16.4 *(voir [7]) Soit $\lambda_0 \in \mathbf{K}$ et reprenons les notations ci-dessus. On a:*

$$\text{int}(f_{\lambda_0}, J(f, g)) = \text{int}(f_{\lambda_0}, g) + \text{int}(f_{\lambda_0}, f_y) - n + B(f_{\lambda_0}, g)$$

Remarquons que l'égalité du Lemme 13.3. découle de celle-ci en remplacant f_{λ_0} par f_y et g par f.

La notion de régularité introduite ci-dessus se généralise aux polynômes de la manière suivante: Soit $F(x, y)$ et $G(x, y)$ deux polynômes de $\mathbf{K}[x, y]$ et considérons les familles $(F_\lambda)_\lambda$ et $(G_\mu)_\mu$. Supposons que F_λ (resp. G_μ est réduit pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ (resp. $\mu \in \mathbf{K}$) et soit $(f, g) \sim_m (F, G)$.

Définition 16.5 Soit $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbf{K}$:

i) On dit que F_{λ_0} est régulière par rapport à la famille $(G_\mu)_\mu$ si f_{λ_0} est régulière par rapport à la famille $(g_\mu)_\mu$.

ii) On dit que G_{μ_0} est régulière par rapport à la famille $(F_\lambda)_\lambda$ si g_{μ_0} est régulière par rapport à la famille $(f_\lambda)_\lambda$.

iii) On dit que (F_λ, G_μ) est régulière si (f_λ, g_μ) l'est.

Soit $\lambda_0 \in \mathbf{K}$. On pose $I(F_{\lambda_0}, G) = I(f_{\lambda_0}, g)$ et $B(F_{\lambda_0}, G) = B(f_{\lambda_0}, g)$. Soit $I(F_{\lambda_0}, G) = \{\mu^1_{\lambda_0}, \ldots, \mu^{r_{\lambda_0}}_{\lambda_0}\}$. Il est clair que $\mathrm{Int}(F_{\lambda_0}, G_\mu)$ ne dépend pas de $\mu \in \mathbf{K} - I(F_{\lambda_0}, G)$ et que si on note cet élément par $\mathrm{Int}(F_{\lambda_0}, G_{gen})$, alors $\mathrm{Int}(F_{\lambda_0}, G_{gen}) > \mathrm{Int}(F_{\lambda_0}, G_{\mu^i_{\lambda_0}})$ pour tout $1 \le i \le r_{\lambda_0}$, et

$$B(F_{\lambda_0}, G) = \sum_{i=1}^{r_{\lambda_0}} [\mathrm{Int}(F_{\lambda_0}, G_{gen}) - \mathrm{Int}(F_{\lambda_0}, G_{\mu^i_{\lambda_0}})].$$

Soit $J(F, G) = F_x G_y - F_y G_x$. Le lemme suivant donne une version affine du Lemme 16.4.:

Lemme 16.6 *(voir [7]) Soit $\lambda_0 \in \mathbf{K}$ et reprenons les notations ci-dessus. On a:*

$$\mathrm{Int}(F_{\lambda_0}, J(F, G)) = \mathrm{Int}(F_{\lambda_0}, G) + \mathrm{Int}(F_{\lambda_0}, F_y) - n - B(F_{\lambda_0}, G))$$

Utilisant cette égalité et celle du lemme 13.3., on a démontré le suivant:

Théorème 16.7 *(voir [7]) Soit F, G deux polynômes de $\mathbf{K}[x, y]$ et soit $(f, g) \sim_m (F, G)$. Soit $\lambda_0 \in \mathbf{K}$ et reprenons les notations ci-dessus. Supposons que $A_{f_{\lambda_0}} = A_f$-i.e. $int(f_{\lambda_0}, f_y) = \mathrm{int}(f_{gen}, f_y)$- et soit c le cardinal de $I(F_{\lambda_0}, G)$. On a:*

i) Si $c = 0$ et $J(F, G) \in \mathbf{K} - \{0\}$, alors $A_f = 0$, $Int(F_{\lambda_0}, G) = 1$, et $\mathbf{K}[F, G] = \mathbf{K}[x, y]$.

ii) Si $c = 1$, alors $I(F)$ est réduit à un seul élément. En particulier $J(F, G) \notin \mathbf{K} - \{0\}$.

Soit $F(x, y)$ un polynôme de $\mathbf{K}[x, y]$ soit $f \sim_m F$. Soit $\lambda_0 \in \mathbf{K}$ et supposons que $A_{f_{\lambda_0}} = A_f$. Si F_{λ_0} possède deux places à l'infini, alors pour tout $G \in \mathbf{K}[x, y]$, le cardinal c de $I(F_{\lambda_0}, G)$ est au plus 1. Il résulte du Théorème précédent que $J(F, G) \notin \mathbf{K} - \{0\}$ pour tout $G \in \mathbf{K}[x, y]$.

Le théorème 16.7. offre une nouvelle approche à l'étude de la conjecture Jacobienne en dimension deux. En effet, la partie i) du Théorème montre que la conjecture Jacobienne est équivalente à la conjecture suivante:

Soit F, G deux polynômes de $\mathbf{K}[x, y]$. Si $J(F, G) \in \mathbf{K} - \{0\}$, alors $I(F, G) = \emptyset$ (ceci est équivalent à $B(F, G) = 0$).

Cette conjecture possède aussi la réformulation suivante:

(*) Soit F, G deux polynômes de $\mathbf{K}[x, y]$. Si $I(F, G) \neq \emptyset$ ($\Longleftrightarrow B(F, G) \neq 0$), alors $J(F, G) \notin \mathbf{K} - \{0\}$.

En particulier, la partie ii) du Thérème 16.7. montre (*) losrsque $I(F, (G_\mu))$ est réduit à un seul élément.
Remarquons que, étant donnés deux polynômes F, G de $\mathbf{K}[x, y]$, si $(f, g) \sim_m (F, G)$, alors: $J(F, G) = a \in \mathbf{K} - \{0\} \Longleftrightarrow J(f, g) = a.x^{-2}$. Par ailleurs, la notion de régularité est définie pour les éléments de $\mathbf{K}((x))[y]$ qui ne sont pas nécessairement dans $\mathbf{K}[x^{-1}][y]$. Ceci nous a amené à poser les deux conjectures suivantes (appelées conjectures Jacobiennes méromorphes):

Soit f, g deux éléments de $\mathbf{K}((x))[y]$ de degrés respectives n et m en y.

Conjecture I) Si $J(f, g) = x^{-2}$, alors $B(f, g) = 0$.

Conjecture II) Si $J(f, g) = x^{-2}$, alors m/n ou n/m.

La régularité des courbes méromorphes introduite ci-dessus peut être interprétée en fonction des polygones de Newton de ces courbes. Cette notion offre aussi une approche intéressante à l'étude de la conjecture Jacobienne en dimension deux, et plus généralement aux deux conjectures ci-dessus. Ainsi, la deuxième partie du papier [7] est consacrée à l'étude du polygone de Newton d'une courbe méromorphe, en particulier la relation entre les polygones de Newton de deux courbes méromorphes f et g dont le Jacobien $J(f,g)$ dépend seulement de x. Nous avons d'abord introduit la notion de parallèlisme et pseudoparallélisme de deux polygones de Newton. Ceci généralise aux courbes méromorphes la notion de similarité définie dans un cadre algébrique. Nous avons ensuite démontré que si le Jacobien $J(f,g)$ de deux courbes méromorphes f et g est un élément de $\mathbf{K}((x))$, alors les polygones de Newton de f et g sont pseudoparallèlles, et si $\triangle(f)$ et $\triangle(g)$ désignent deux côtés similaires des polygones de Newton de f et g respectivement, alors $f_{\triangle(f)}$ et $g_{\triangle(g)}$ sont proportionnelles (où si $h \in \mathbf{K}((x))[y]$ et $\triangle$ est un côté du polygone de Newton de h, alors $h_\triangle$ est la somme des monômes $h_{ij}x^iy^j$ de h tel que $(i,j) \in \triangle$). Ceci généralise aux courbes méromorphes la notion de proportionnalité définie dans un cadre algébrique. Utilisant ces résultats nous avons cherché à caractériser l'arbre $T(f.g)$ lorsque le Jacobien $J(f,g) \in \mathbf{K}((x))$. Nous avons supposé pour ce faire que $\mathrm{int}(f,g) = \min_{\lambda,\mu}\mathrm{int}(f_\lambda, g_\mu)$ (ceci n'est pas une restriction car $J(f_\lambda, g_\mu)$ ne dépend pas du choix de λ et μ dans $\mathbf{K}$). Nous avons alors démontré une série de lemmes qui montrent que les composantes irréductibles de $f.g$ sont réparties en des paquets qui définissent les points maximaux de l'arbre $T(f.g)$, et que dans chaque paquet, certaines caractéristiques numériques des branches telles que le degré en y, la multiplicité d'intersection avec les autres branches peuvent être contrôlées.

17 Polynômes irréductibles dans $\mathbf{K}[[x]][y]$

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Désignons par R l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbf{K}[[x]][y]$ et soit $\tilde{R}$ l'ensemble des polynômes f de R tel que si $f(x,y) = y^n + a_1(x).y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$, alors $a_1(x) = 0$, et $\mathrm{ord}_x a_i(x) > i$ pour tout $2 \le i \le n$ tel que $a_i(x) \ne 0$ (remarquons qu'on peut toujours se ramener à cette forme moyennant un possible changement de variables). Soit $f(x,y) = y^n + a_1(x).y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$ un élément non nul de $\tilde{R}$. On associe à f son semi-groupe $\Gamma(f) = \{\mathrm{int}(f,g); g \in \mathbf{K}[[x]][y], g \notin (f)\mathbf{K}[[x]][y]\}$, ses suites caractéristiques $\underline{m} = (m_0 = n, m_1, \ldots, m_h, m_{h+1} = +\infty)$, $\underline{r} = (r_0 = n, r_1, \ldots, r_h, r_{h+1} = +\infty)$, $\underline{d} = (d_1 = n, d_2, \ldots, d_h, d_{h+1} = 1)$, et l'ensemble de ses racines approchées $\underline{g} = (g_1 = y, g_2, \ldots, g_h, g_{h+1} = f)$ (voir Section II-1). On sait que:

1) $\mathrm{int}(f, g_k) = r_k$ pour tout $1 \le k \le h$.

2) $r_0 = n, r_1, \ldots, r_h$ engendrent $\Gamma(f)$.

3) $r_k.(\frac{d_k}{d_{k+1}}) < r_{k+1}$ pour tout $1 \le k \le h$.

De plus, d'après les hypothèses sur f, on a:

4) $r_0 = n < r_1 < \ldots < r_h$ et $d_1 > d_2 > \ldots > d_{h+1} = 1$.

D'autre part, on sait qu'étant donnée une suite $r_0 < r_1 < \ldots < r_h$ vérifiant 3) et 4), il existe un polynôme $f \in \tilde{R}$, de degré r_0 en y, tel que $\Gamma(f)$ est engendré par $r_0, \ldots, r_h$.

Soit $f(x,y) = y^n + a_2(x).y^{n-2} + \ldots + a_n(x)$ un polynôme de $\tilde{R}$. La classe d'équisingularité de f, notée $\mathrm{Cl}(f)$ est l'ensemble de tous les polynômes irréductibles de $\mathbf{K}[[x]][y]$ dont le semi-groupe est $\Gamma(f)$. Utilisant les polygones de Newton généralisés et le critère d'irréductibilité d'Abhyankar (voir [3]), on a construit dans [19], étant donné une suite $r_0 < r_1 < \ldots < r_h$ vérifiant 3) et 4), tous les polynômes de $\tilde{R}$ (à déformation près) dont le semi-groupe est engendré par $r_0, \ldots, r_h$, ainsi que leurs racines approchées. Ceci donne en particulier les éléments de la classe d'équisingularité correspondant à la suite $\underline{r}$ et aux suites $\underline{r}/d_k = (r_0/d_k, \ldots, r_{k-1}/d_k)$ pour tout $1 \le k \le h$.

Remarquons qu'un polynôme f dont le semi-groupe est engendré par $r_0, \ldots, r_h$ peut être calculé en utilisant la théorie des bases de of Gröbner: une base de Gröbner réduite par rapport à un bon ordre sur $\mathbf{N^3}$ qui élimine t des équations $x - t^n, y - t^{m_1} - \ldots - t^{m_h}$ contient un unique polynôme $f(x,y)$. Si nous considérons f comme étant un élément de $\mathbf{K}[[x,y]]$, alors $\Gamma =< r_0, \ldots, r_h >$ est le semi-groupe de f. Il est connu que la complexité de calcul d'une base de Gröbner est doublement exponentielle. De plus, l'algorithme calcule beaucoup plus qu'il nous faut. Bien que nous n'ayons pas considéré le problème de la complexité de notre algorithme, mais nous pensons qu'il est plus naturel et plus adapté, en particulier parce que les données que l'on obtient sont attachées au polynôme f et sont exprimées en fonction des suites associées à ce polynôme. Notre algorithme nous permet aussi d'associer de manière unique un élément canonique dans la classe d'équisingularité qui correspond à la suite $\underline{r}$ (resp. aux suites $\underline{r}/d_k = (r_0/d_k, \ldots, r_{k-1}/d_k)$ pour tout $1 \leq k \leq h$ et de contrôler les monômes à rajouter à cet élément pour avoir toute la classe déquisingularité.

Soit $f(x,y) = y^n + a_2(x).y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$ un polynôme de $\tilde{R}$. Le nombre de Milnor $m = \mathrm{int}(f_x, f_y)$ est un invariant de $\mathrm{Cl}(f)$. Comme $\mathrm{int}(f, f_y) = \mathrm{int}(f_x, f_y) + n - 1 = m + n - 1$, il suit que le nombre de Milnor m s'exprime en fonction de la suite $\underline{r}$ par la formule suivante:

$$(*) \quad m = \sum_{i=1}^{h} (e_i - 1).r_i - r_0 + 1.$$

La deuxième question qu'on a étudiée dans [19] est la suivante: soit $m \in \mathbf{N}$ un entier positif fixé, construire tous les polynômes $g \in \tilde{R}$ (à déformation près) tels que $m = \mathrm{int}(g_x, g_y)$. Nous avons d'abord démontré qu'étant donnée une suite $r_0, r_1, \ldots, r_h$ vérifiant les conditions 3) et 4) ci-dessus, alors:

$$m \geq (5/3).2^{2h} - 3.2^h + (4/3)$$

Ceci implique que le nombre des longueurs h possibles est fini. D'autre part, étant donné $h \in \mathbf{N}$, la relation (*) ainsi que celles pour les racines approchées montrent que l'ensemble des suites $\underline{r}$ de longueur h vérifiant (3) et (4) est fini. Le problème est donc réduit au suivant: soit $\underline{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_h)$ une suite vérifiant 3) et 4), calculer tous les polynômes de $\tilde{R}$ dont le semi-groupe est engendré par $\underline{r}$.

Dans ([19]) nous avons développé et implementé nos algorithmes en Mathematica.

18 Modifications toriques des variétés toriques libres

Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique 0. Soit $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_r}$ les éléments de la base canonique de $\mathbf{Z}^r$, et pour tout $i = r+1, \ldots, n$ soit $\mathbf{h_i} = (h_{i,1}, \ldots, h_{i,r}) \in \mathbf{N}^r$. Soit $d_1 \ldots, d_r \in \mathbf{N}$ et posons $T = \{d_1\mathbf{e_1}, \ldots, d_r\mathbf{e_r}, \mathbf{h_{r+1}}, \ldots, \mathbf{h_n}\} \subseteq \mathbf{N}^r$. Soit

$$\phi : \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n] \to \mathbf{K}[t_1, \ldots, t_r]$$

l'homomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres tel que:

$$\begin{aligned} \phi(x_i) &= \mathbf{t}^{d_i \mathbf{e_i}} \qquad \forall i = 1, \ldots, r, \\ \phi(x_i) &= \mathbf{t}^{\mathbf{h_i}} \qquad \forall i = r+1, \ldots, n, \end{aligned}$$

où $\mathbf{t}^{\mathbf{h_i}} = t_1^{h_{i,1}} \ldots t_r^{h_{i,r}}$. Soit $Ker\phi = I_T$ est l'idéal de T. La variété $V = V(I_T)$ des zéros dans $\mathbf{A}^n_{\mathbf{K}}$ est une variété affine torique dans le sens de [24]. L'image $\phi(\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n])$ est l'anneau affine $\mathbf{K}[T]$ du semi-groupe T. en d'autres termes, I_T est l'idéal de définition de la variété V dans $\mathbf{A}_{\mathbf{K}^n}$ paramétrisée comme suit:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1^{d_1} \\ &\vdots \\ x_r &= u_r^{d_r} \\ x_{r+1} &= u_1^{h_{r+1,1}} \ldots u_r^{h_{r+1,r}} \\ &\vdots \\ x_n &= u_1^{h_{n,1}} \ldots u_r^{h_{n,r}}. \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{N}T = \{l_1d_1\mathbf{e_1} + \cdots l_rd_r\mathbf{e_r} + l_{r+1}\mathbf{h_{r+1}} + \cdots + l_n\mathbf{h_n} : l_1, \ldots, l_n \in \mathbf{N}\}$ le semi-groupe engendré par T et $\mathbf{Z}T = \{l_1d_1\mathbf{e_1} + \cdots l_rd_r\mathbf{e_r} + l_{r+1}\mathbf{h_{r+1}} + \cdots + l_n\mathbf{h_n} : l_1, \ldots, l_n \in \mathbf{Z}\}$ le réseau engendré par T. On sait que $ht(I_T) = n - r$; c'est une intersection complète si et seulement si il est engendré par $n - r$ éléments.

Soit T_1 et T_2 des sous ensembles non vides de T tel que $T = T_1 \cup T_2$ et $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Le semi-groupe T est appelé *le recollement* de T_1 et T_2 s'il existe un élément non nul $\mathbf{a} \in \mathbf{N}T_1 \cap \mathbf{N}T_2$ tel que $\mathbf{Za} = \mathbf{Z}T_1 \cap \mathbf{Z}T_2$.

La notion de semi-groupe obtenu par recollement a été introduite par J.C. Rosales dans [36] et utilisée par K. Fisher, W. Morris and J. Shapiro dans [25] pour caractériser les semi-groupes affines qui sont des intersections complètes.

Le semi-groupe $\mathbf{T}$ est une intersection complète libre (par rapport à la suite $\mathbf{h_{r+1}}, \ldots, \mathbf{h_n}$) si et seulement si pour tout $i = r + 1, \ldots, n$,

$$T_i = \{d_1\mathbf{e_1}, \ldots, d_r\mathbf{e_r}, \mathbf{h_{r+1}}, \ldots, \mathbf{h_i}\}$$

est le recollement de $T_{i-1} = \{d_1\mathbf{e_1}, \ldots, d_r\mathbf{e_r}, \mathbf{h_{r+1}}, \ldots, \mathbf{h_{i-1}}\}$ et $\{\mathbf{h_i}\}$. On dit que la variété $V(I_T)$ est une variéé torique libre si le semi-groupe T est une intersection complète libre.

Dans [17] nous avons étudié l'effet des modifications toriques au sens de [35] aux variétés toriques libres. Nous avons démontré que ces modifications résolvent les singularités de ces variétés. Remarquons que si $\mathbf{T} =< \mathbf{r_0}, \mathbf{r_1} \ldots, \mathbf{r_h} >$ est le semi-groupe d'un polynôme irréductible f de $\mathbf{K}[[x]][y]$, alors $V(I_T)$ est une variété torique libre. Utilisant la représentation algorithmique des éléments de Cl(f) obtenue dans [18], on obtient une résolution plongée des singularités de Cl(f). D'autre part, étant donné un polynôme irréductible quasi-ordinaire f de $\mathbf{K}[[x_1, \ldots, x_n]][y]$, M. Micusn, dans sa thèse ([28], [32]), a associé à f un semi-groupe $\Gamma(f)$ et a démontré à propos de $\Gamma(f)$ des résultats similaires à ceux connus pour les singularités de courbes (voir aussi [26]). Dans [18] on a démontré que $T = \Gamma(f)$ est une intersection complète libre, en particulier les mêmes résultats obtenus pour les courbes peuvent être appliqués aux singularités définies par les polynômes irréductibles quasi-ordinaires.

References

[1] S.S. Abhyankar.- Lectures on expansion techniques in Algebraic Geometry, Tata Institue of Fundamental research, Bombay, 1977.

[2] S.S. Abhyankar.- On the semigroup of a meromorphic curve, Part 1, Proceedings of International Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto, pp. 240-414, 1977.

[3] S.S. Abhyankar.- Irreducibility criterion for germs of analytic functions of two complex variables, Advances in Mathematics 74 (1989), pp. 190-257.

[4] S.S. Abhyankar.- Some remarks on the Jacobian problem, Proc.Indian Acad.Sci., vol 104, n^{o}3 (1994), pp. 515-542.

[5] S.S. Abhyankar, A.Assi.- Jacobian of meromorphic curves, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 109 (1999), n^{o}2, 117–163.

[6] S.S. Abhyankar, A. Assi.- Factoring the Jacobian, Singularities in algebraic and analytic geometry (San Antonio, TX, 1999), 1–10, Contemp. Math., 266, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[7] S.S. Abhyankar, A. Assi.- Jacobian pairs, Contemp. Math., volume dédié à la mémoire de Ruth Michler, à paraître (41 pages).

[8] S.S. Abhyankar and T.T. Moh.- Newton Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation, J.Reine Angew.Math, 260, pp. 47-83 and 261, pp. 29-54, 1973.

[9] S.S. Abhyankar and T.T. Moh.- Embedding of the line in the plane, J.Reine Angew.Math., 276 (1975), pp. 148-166.

[10] S. S. Abhyankar and A. Sathaye.- Uniqueness of plane embeddings of special curves, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 124 (1996), pages 1061-1069.

[11] E. Artal Bartolo, P. Cassou-Noguès, I. Luengo Valasco.- On polynomials whose fibers are irreducible with no critical points, Math. nn., 299, n^{o}3 (1994) pp. 477-490.

[12] A. Assi.- Deux remarques sur les racines approchées d'Abhyankar-Moh, C.R.A.S., t.319, Serie 1 (1994), 1191-1196.

[13] A.Assi.- Familles de courbes planes ayant une seule valeur irrgulire, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 322 (1996), n^{o}12, 1203–1207.

[14] A.Assi.- Meromorphic plane curves, Math. Z. 230 (1999), n^{o}1, 165–183.

[15] A.Assi.- Sur l'intersection des courbes mromorphes, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 329 (1999), n^o 7, 625–628.

[16] A.Assi.- Partial derivatives of a meromorphic plane curve, Prépublication, Université d'Angers.

[17] A. Assi, M. Barile.- Toric modifications of free toric varieties, Proceedings of the Conference on Algebra and Algebra and Algebraic Geometry with applications: The Celebration of the seventieth birthday of Professor S.S. Abhyankar, Springer-Verlag, à paraître.

[18] A. Assi, M. Barile.- Effective constructions of irreducible curve singularities Prépublication n^o 110 , Université d'Angers.

[19] A. Assi et M. Barile.- Computing irreducible curve singularities with Mathematica Preprint.

[20] J. Briançon.- Tentative ratée au Jacobien par la voie du polygone de Newton Preprint n^o 80, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1985.

[21] J. Briançon.- Un polynôme appartient-il à l'idéal de ses dérivées? Preprint n° 632, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2001.

[22] F. Delgado de la Mata.- A factorization theorem for the polar of a curve with two branches Compositio Mathematica, 92 (1994), pp. 327-375.

[23] R. Ephraim.- Special polars and curves with one place at infinity Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 40, Part 1 (1983), pp. 353-359.

[24] D. Eisenbud and B. Sturmfels.- Binomial ideals, Duke Math. J., 84 (1996), pp. 1-45.

[25] K. Fischer, W. Morris, J. Shapiro.- Affine semigroup rings that are complete intersections, Proc. Amer. Math. Soc. n^o125 (1997), pp. 3137-3145.

[26] P. Gonzalez.- Quasi-ordinary singularities via toric geometry Thèse, Universidad de la Laguna, 2000.

[27] S. Kaliman.- On the Jacobian conjecture, Proc.Amer.Math.Soc., 117, n° 1 (1993), pp. 45-51.

[28] K. Kiyek, M. Micus.- Semigroup of a quasiordinary singularity Topics in Algebra, Banach Center Publications n^o26, part. 2, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1990.

[29] T.C. Kuo et Y.C. Lu.- On analytic function germs of two complex variables Topology 16 (1977), pp. 299-310.

[30] M. Lejeune-Jalabert.- Sur l'équivalence des singularités des courbes algebroides planes. Coefficients de Newton Thesis, 1972.

[31] M. Merle.- Invariants polaires des courbes planes Invent. Math., 41 (1977), pp. 103-111.

[32] M. Micus.- Zur Formalen Äquivalenz von quasigewöhnlichen singularitäten Thèse, Paderborn, 1987.

[33] J. Milnor Singular points of complex hypersurfaces Ann. of Math. Studies, 61, Princeton, Univ. Press, Princeton, N.J., 1968.

[34] M. Oka.- On the boundary obstructions to the Jacobian problem Kodai Math. J. 6, n^o 3 (1983), pp. 419-433.

[35] M. Oka.- Non-degenerate complete intersection singularity, Actualités Mathématiques. Hermann, Paris., 1997.

[36] J.C. Rosales.- On Presentations of Subsemigroups of $\mathbf{N}^n$, Semigroup Forum n^o55 (1997) 152-159.

[37] O. Zariski.- Le problème des modules pour les branches planes Cours au Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 1973.